DM de Mathématiques n° 4

Réduction des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note χ_A son polynôme caractéristique et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Pour tout $\lambda \in Sp(A)$, on appelle n_λ la multiplicité de λ (dans le polynôme caractéristique χ_A) et on pose $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$.

Dans tout le devoir, on pourra utiliser librement le théorème de Cayley-Hamilton, qui dit que le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme est annulateur de la matrice ou de l'endomorphisme.

Enfin, on pose :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Nilpotence

On suppose dans cette partie que A est nilpotente, d'indice $p \geq 1$ ($p = \min\{k \in \mathbb{N},\ A^k = 0_n\}$).

1) Prouver que 0 est valeur propre de A et que c'est sa seule valeur propre réelle ou complexe. En déduire χ_A.
2) A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, justifier que $p \leq 3$.
3) Que dire quand $p = 1$?
4) On suppose dans cette question que $p = 2$. Prouver que $rg\,(A) = 1$, puis que A est semblable à la matrice N_1 et à N_1'.
5) On suppose dans cette question que $p = 3$. Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\big(x, u(x), u^2(x)\big)$ est libre, puis prouver que A est semblable à la matrice N_2.
6) Montrer que $rg\,(A) = p - 1$.

Partie II : Réduction

On note r le nombre de racines réelles distinctes de χ_A.

1) Justifier que $r \leq 3$ et prouver que $r \geq 1$.
2) On suppose dans cette question que $r = 3$. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Justifier.

3) On suppose dans cette question que $r=2$ et on pose $Sp(A)=\{\lambda,\mu\}$ avec $n_\lambda \leq n_\mu$.

   a. Que valent n_λ et n_μ ? Que vaut $\dim E_\lambda$? Quelles sont les valeurs possibles de $\dim E_\mu$?

   A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ? Donner alors une matrice diagonale semblable à A.

   b. On suppose ici que A n'est pas diagonalisable. Prouver que $F=\ker\left[(A-\mu I_3)^2\right]$ et E_λ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et en déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$.

   ⚠ *Question longue et non guidée, qui réclame une rédaction et une argumentation précises et claires.*

4) On suppose dans cette question que $r=1$ et on appelle λ l'unique valeur propre réelle de A.

   a. Quelles sont les multiplicités possibles de λ dans χ_A.

   b. Montrer que, si λ est de multiplicité 3 dans χ_A, alors $A-\lambda I_3$ est nilpotente et en déduire que A est semblable à λI_3 ou λI_3+N_1 ou λI_3+N_2.

   c. On suppose que λ n'est pas de multiplicité 3 dans χ_A. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & r\cos\theta & -r\sin\theta\\ 0 & r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

   ☺ *Cette question peut être faite assez rapidement et élégamment en passant dans $\mathbb{C}$.*

   On admettra que si deux matrices réelles sont semblables dans $\mathbb{C}$, alors elles le sont dans $\mathbb{R}$. Ceux qui veulent prouver ce résultat intéressant et pas si trivial sont les bienvenus.

5) Réduire la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$. On donnera une matrice de passage adéquate.