DS de Mathématiques n° 2

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Problème 1

Extrait de Centrale 2011 – PC – Maths 1

Le but du problème est d'étudier l'existence d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$). On notera $\binom{n}{p}$ les coefficients binomiaux.

I - Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta,\delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$.

I.A – Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta,\delta[$, avec $\delta > 0$, donner, pour $k \in \mathbb{N}$, une expression de $f^{(k)}(x)$ sur $]-\delta,\delta[$, et en déduire $f^{(k)}(0)$ en fonction de a_k pour tout entier $k \geq 0$.

I.B – Dans les exemples suivants, proposer une solution *f*, en précisant une valeur de δ convenable :

I.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$ et pour tout *n* impair, $u_n = 0$.

I.C – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n)!$. Montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II - Le théorème de Borel

II.A – Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x\in\,]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

II.A.1)

a) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_p\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$g^{(p)}(x)=\frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}.$$

On précisera l'expression de Q_{p+1} en fonction de Q_p et Q_p'.

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.

II.A.2)

a) Montrer que pour tout entier naturel p :

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x)=\lim_{x\to 1^-} g^{(p)}(x)=0.$$

b) En déduire que $g\in\mathcal{W}$.

II.B – Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$h(x)=\frac{\int_{x-1}^{1} g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt}.$$

II.B.1) Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty,1]$ et sur $[2,+\infty[$.

II.B.2) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.

a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0)=0$ pour tout entier $p\geq 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel :

$$\lambda_p=\max_{k\in[\![0,p-1]\!]}\left(\max_{x\in[-1,1]}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|\right).$$

II.C – Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par $g_0=\varphi$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$g_n : x\mapsto \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n=\max\left(1\,,\,4^n\left|u_n\right|\lambda_n\right)$ avec $\beta_0=1$.

II.C.1)

a) Montrer que pour tout entier naturel *n*, la fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$.

II.C.2) Soient *n* et *j* des entiers naturels tels que $j < n$.

a) Montrer que pour tout réel *x* :

$$g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) Montrer que, pour tout réel *x* tel que $|x| \geq \frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout réel *x* tel que $|x| \leq \frac{1}{\beta_n}$, on a $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

II.C.3) Déduire des questions précédentes que pour tous $n, j \in \mathbb{N}$:

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

II.C.4) En considérant $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction *f* de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$ (*théorème de Borel*).

Problème 2

Extrait de Centrale 2019 – PSI – Maths 2

Notations et rappels

Dans tout le sujet, *n* désigne un entier naturel non nul et *E* un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension *n*.

Si *M* est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de *M* par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel *k*, $M^{k+1} = M M^k$.

De même, si *u* est un endomorphisme de *E*, on définit la suite des puissances de *u* par $u^0 = Id_E$ et, pour tout entier naturel *k*, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice *M* est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de *M*.

Soit $\mathcal{B}$ une base de *E*. Un endomorphisme de *E* est nilpotent d'indice *p* si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice *p*.

On pose $J_1 = (0)$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$) et, pour $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $diag\left(A, B\right)$, la matrice diagonale par blocs :

$$diag\left(A, B\right) = \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}), A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note $diag\left(A_1, A_2, \dots, A_k\right)$, la matrice diagonale par blocs :

$$diag\left(A_1, A_2, \dots, A_k\right) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I – Nilpotence d'indice 1

Q1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

II – Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q4. Montrer que $\ker u = \operatorname{Im} u$.

Q5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

Q6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

III – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E, nilpotent d'indice 2 et de rang r.

Q7. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ et que $2r \leq n$.

Q8. On suppose que $\ker u = \operatorname{Im} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\right)$ est une base de E. Donner la matrice de u dans cette base.

Q9. On suppose $\ker u \neq \operatorname{Im} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\ker u$ tels que $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\right)$ est une base de E. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

IV – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose dans cette partie d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

IV.1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q10. Calculer la trace et le rang de A.

Q11. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q12. Démontrer que A est semblable à la matrice $diag\left(J_2, J_1\right)$.

Donner une matrice P inversible telle que $diag\left(J_2, J_1\right) = P^{-1}AP$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à une éventuelle telle matrice R.

Q13. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q14. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.

☺ *On pourra considérer* $R' = P^{-1}RP$.

IV.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q15. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

IV.3) Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q16. Montrer que si $2p-1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q17. Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.

V – Réduction des matrices nilpotentes

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties II et III.

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q18. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

Q19. Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$. Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q20. Démontrer que $\left(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par *u* sur $C_u(x)$.

Q21. Démontrer par récurrence sur *p* qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

☺ *On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur* $\operatorname{Im} u$.

Q22. Donner la matrice de *u* dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Fin de l'énoncé