TD du chapitre19 : Applications géométriques des fonctions vectorielles

Dans tout ce qui suit, le plan (resp. l'espace) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (*resp.* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

Exercice 1

Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes. Calculer sa longueur totale s'il y a lieu.

a. $\begin{cases} x(t)=3\cos t-\cos 3t \\ y(t)=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$ (*Néphroïde*)

b. $\begin{cases} x(t)=t^3-2t+\dfrac{1}{t} \\ y(t)=t^2-t+\dfrac{1}{t} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t)=\cos^2 t+\ln(\sin t) \\ y(t)=\sin t\cos t \end{cases}$

Exercice 2

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $a>0$ et A un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque M décrit $\mathscr{C}$. *La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.*

Exercice 3

Déterminer un paramétrage de la courbe plane C d'équation $(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$ et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>0$, $b>0$ et $a>b$.

Trouver les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O, l'origine du repère (et centre de symétrie de $\mathcal{E}$).

Exercice 5

Soit $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2$.

1) Tracer l'intersection de $\Sigma=f^{-1}(\{1\})$ et du plan P d'équation $z=0$. Dessiner l'allure de Σ.

2) Soit M_0 un point de Σ de coordonnées (x_0,y_0,z_0). Donner une équation du plan tangent à Σ en M_0.

3) Soit $g\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ telle que la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0.

   Soient $G_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\left(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\right)$ et $G_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\left(x_0,y_0,z_0+t\right)$ avec $\varphi\in\mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.

   a. Montrer que G_1 et G_2 sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.

   b. Montrer que $\nabla g(M_0)$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.

Exercice 6

On définit Σ par l'équation $xyz = 1$.

1) Montrer que Σ est une surface régulière.
2) Etudier l'intersection de Σ avec les plans d'équations respectives $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$. En déduire l'allure de Σ.
3) Montrer que pour tout plan tangent à Σ, le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

   ☺ *Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par* $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

Exercice 7

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

1) Quelle est l'intersection de S avec le plan (xOy) ?
2) Quels sont les points singuliers de S ?
3) Quelles sont les droites tracées sur S ?
4) Montrer que la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u,v) \mapsto \big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big).$$

Exercice 8

Fenêtre de Viviani : Soit un réel $a > 0$ et C la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a\sin(2t) \\ y = a\big(1-\cos(2t)\big) \\ z = 2a\cos t \end{cases}$$

Montrer que C est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

Exercice 9

Soient les surfaces : $S_1 \;:\; y^2(x^2+z^2) - x^2 - 3z^2 = 0$ et $S_2 \;:\; -x^2 + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

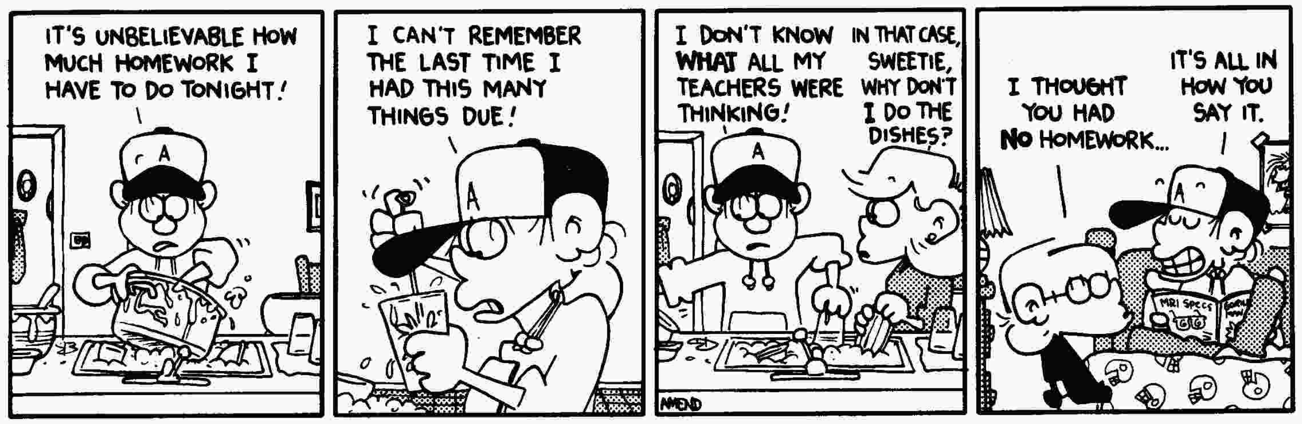
Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.

Exercice 10

1) Soit $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z+1)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+1\right)$. Après avoir justifié qu'elle est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, calculer la matrice hessienne de *f* en $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, puis rechercher les extrema de *f* sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
2) Mêmes questions pour $f : (x,y) \mapsto (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 11

Soit $f:(x,y)\mapsto(x^2-y)(3x^2-y)$. Montrer que la restriction de *f* à toutes les droites passant par $(0,0)$ admet un extremum local strict en $(0,0)$ mais que *f* n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.



Exercice 12 (*Centrale adapté*)

On considère l'arc paramétré $\mathscr{C}$ défini par $\begin{cases} x(t)=\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3} \\ y(t)=\sin t \end{cases}$.

1) Déterminer le domaine de définition de $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$ et réduire au mieux le domaine d'étude.
2) Etudier et construire $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé. On précisera les éventuels points singuliers.
3) Donner les équations des tangentes à l'origine du repère.
4) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Exercice 13 (*Navale*)

Soient la surface *S* d'équation $x^2-y^2-z=1$ et *P* le plan d'équation $x-2y-z=0$.

Donner l'ensemble des points *M* de *S* tels que le plan tangent à *S* en *M* soit parallèle à *P*.

Exercice 14

On considère la surface *S* d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1) Montrer que *S* ne contient aucune droite parallèle au plan (xOy).
2) Soit *D* la droite définie par $\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases}$.

   Montrer que *D* est incluse dans *S* si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale.
3) Montrer que par tout point de *S*, passent deux droites D_1 et D_2 incluses dans *S* et déterminer les points de *S* pour lesquels ces deux droites, que l'on précisera, sont perpendiculaires.