Corrigé du DS n° 3

Problème I

I – Une fonction affine par morceaux

I.1) Soit $x\in\mathbb{R}$.

- Si $x\in\left]-\infty,-a_0\right]$, on a $x\leq -a_0\leq 0\leq a_0$, donc :
$$f_0(x)=\frac{1}{2a_0^2}\left(-(x+a_0)-(x-a_0)+2x\right)=0.$$
- Si $x\in\left[-a_0,0\right]$, on a $-a_0\leq x\leq 0\leq a_0$, donc :
$$f_0(x)=\frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0-(x-a_0)+2x\right)=\frac{a_0+x}{a_0^2}.$$
- Si $x\in\left[0,a_0\right]$, on a $-a_0\leq 0\leq x\leq a_0$, donc :
$$f_0(x)=\frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0-(x-a_0)-2x\right)=\frac{a_0-x}{a_0^2}.$$
- Si $x\in\left[a_0,+\infty\right[$, on a $-a_0\leq 0\leq a_0\leq x$, donc :
$$f_0(x)=\frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0+x-a_0-2x\right)=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{f_0(x)=\begin{cases}0 & \text{quand } x\in\left]-\infty,-a_0\right]\\ \dfrac{a_0+x}{a_0^2} & \text{quand } x\in\left[-a_0,0\right]\\ \dfrac{a_0-x}{a_0^2} & \text{quand } x\in\left[0,a_0\right]\\ 0 & \text{quand } x\in\left[a_0,+\infty\right[\end{cases}}$$

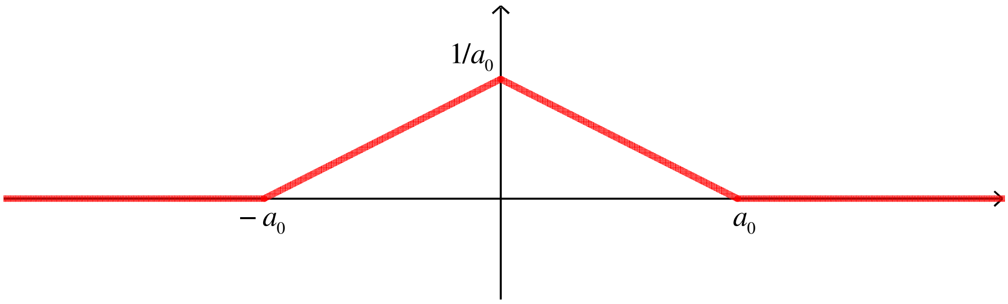
La fonction f_0 est affine (ou nulle) sur $\left]-\infty,-a_0\right[$, $\left]-a_0,0\right[$, $\left]0,a_0\right[$ et $\left]a_0,+\infty\right[$, donc continue. De plus :

- $\lim\limits_{x\to -a_0^-} f_0(x)=\lim\limits_{x\to -a_0^+} f_0(x)=0=f_0(-a_0)$, donc f_0 est continue en $-a_0$;
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f_0(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x)=\dfrac{1}{a_0}=f_0(0)$, donc f_0 est continue en $-a_0$;
- $\lim\limits_{x\to a_0^-} f_0(x)=\lim\limits_{x\to a_0^+} f_0(x)=0=f_0(a_0)$, donc f_0 est continue en a_0.

Finalement :

$$\boxed{f_0 \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

On obtient le graphe :



I.2) On pose $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

a) D'après ce qui précède, f_0 est croissante de 0 à $\dfrac{1}{a_0}$ sur $[-a_0, 0]$, décroissante de $\dfrac{1}{a_0}$ à 0 sur $[0, a_0]$ et nulle ailleurs, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_0(x) \leq \dfrac{1}{a_0}$, soit :

$$\boxed{|f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}}$$

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors :

$$|f_0(y) - f_0(x)| = \frac{1}{a_0^2}\begin{cases} 0 & \text{quand } x < y \leq -a_0 \\ y + a_0 & \text{quand } x \leq -a_0 \leq y \leq 0 \\ a_0 - y & \text{quand } x \leq -a_0 \leq 0 \leq y \leq a_0 \\ 0 & \text{quand } x \leq -a_0 \leq a_0 \leq y \\ 1 & \text{quand } -a_0 \leq x < y \leq 0 \\ |y + x| & \text{quand } -a_0 \leq x \leq 0 \leq y \leq a_0 \\ x + a_0 & \text{quand } -a_0 \leq x \leq 0 \leq a_0 \leq y \\ 1 & \text{quand } 0 \leq x < y \leq a_0 \\ a_0 - x & \text{quand } 0 \leq x \leq a_0 \leq y \\ 0 & \text{quand } a_0 \leq x < y \end{cases}$$

Or, l'expression dans l'accolade est toujours inférieure à $|y - x| = y - x > 0$, donc pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $\dfrac{|f_0(y) - f_0(x)|}{|y - x|} \leq \dfrac{1}{a_0^2} = k$ et ainsi :

$$\boxed{f_0 \text{ est lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II – La première étape

II.1) La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc y admet des primitives. Soit F une telle primitive.

La fonction F est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\left[F(x+a_1) - F(x-a_1)\right].$$

Ainsi, f_1 est la différence de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{f_1 \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = \frac{1}{2a_1}\left[F'(x+a_1) - F'(x-a_1)\right]$, soit :

$$\boxed{f_1'(x) = \frac{1}{2a_1}\left[f_0(x+a_1) - f_0(x-a_1)\right]}$$

II.2) Pour $x \in \left]-\infty, -a_0 - a_1\right[$, on a $x - a_1 < x + a_1 < -a_0$, donc $\left[x-a_1, x+a_1\right] \subset \left]-\infty, -a_0\right]$.

Pour $x \in \left]a_0 + a_1, +\infty\right[$, on a $a_0 < x - a_1 < x + a_1$, donc $\left[x-a_1, x+a_1\right] \subset \left[a_0, +\infty\right[$.

Dans les deux cas, on obtient :

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,dt = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} 0\,dt = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{f_1 \text{ est nulle en dehors de } \left[-a_0 - a_1, a_0 + a_1\right].}$$

II.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_0(x)\right| \leq \frac{1}{a_0}$ (d'après **I.2)** a)), donc :

$$\left|f_1(x)\right| = \frac{1}{2a_1}\left|\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1}\left|f_0(t)\right|dt \leq \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1}\frac{1}{a_0}\,dt = \frac{1}{2a_1}\,\frac{x+a_1-(x-a_1)}{a_0} = \frac{1}{a_0}.$$

Et :

$$\left|f_1'(x)\right| = \frac{1}{2a_1}\left|f_0(x+a_1) - f_0(x-a_1)\right| \leq \frac{1}{2a_1}\left(\left|f_0(x+a_1)\right| + \left|f_0(x-a_1)\right|\right) \leq \frac{1}{2a_1}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\right) = \frac{1}{a_0a_1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\left|f_1(x)\right| \leq \frac{1}{a_0} \text{ et } \left|f_1'(x)\right| \leq \frac{1}{a_0a_1}.}$$

II.4) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t-x$ est une bijection de classe C^1 de $[x-a_1, x+a_1]$ dans $[-a_1, a_1]$, donc en posant le changement de variable $u = t-x$, on a :

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,dt = \frac{1}{2a_1}\int_{-a_1}^{a_1} f_0(u+x)\,du\,.$$

Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|f_1(y)-f_1(x)\right| = \frac{1}{2a_1}\left|\int_{-a_1}^{a_1} f_0(u+y)\,du - \int_{-a_1}^{a_1} f_0(u+x)\,du\right| = \frac{1}{2a_1}\left|\int_{-a_1}^{a_1}\left[f_0(u+y)-f_0(u+x)\right]du\right|.$$

Et :

$$\left|f_1(y)-f_1(x)\right| \leq \frac{1}{2a_1}\left|\int_{-a_1}^{a_1}\left|f_0(u+y)-f_0(u+x)\right|du\right|.$$

Comme f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left|f_1(y)-f_1(x)\right| \leq \frac{1}{2a_1}\left|\int_{-a_1}^{a_1} k\left|(u+y)-(u+x)\right|du\right| = \frac{1}{2a_1}\left|\int_{-a_1}^{a_1} k\left|y-x\right|du\right| = k\left|y-x\right|.$$

Ainsi :

$$\boxed{f_1 \text{ est lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

III – Une suite de fonctions

Remarquons déjà que la relation de l'énoncé est vraie au rang 1 (par définition de f_1 dans la partie précédente) et que l'on peut alors la reformuler en pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2a_{n+1}}\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} f_n(t)\,dt\,.$$

III.1) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

- D'après la partie ***I***, f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, donc f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

  La fonction f_n est alors (entre autres) continue sur $\mathbb{R}$: elle y admet des primitives.

  Appelons F_n la primitive de f_n qui s'annule en 0. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$ et :

  $$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2a_{n+1}}\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2a_{n+1}}\left[F_n(x+a_{n+1}) - F_n(x-a_{n+1})\right].$$

  Comme f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et il en va de même de $x \mapsto F_n(x+a_{n+1})$ et $x \mapsto F_n(x-a_{n+1})$, toutes deux composées d'une fonction affine (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) par F_n.

  Alors, f_{n+1} est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de telles fonctions, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{f_n \text{ est paire et de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Avec les notations précédentes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\left[F_{n-1}(x+a_n) - F_{n-1}(x-a_n)\right].$$

Et comme $F_n' = f_{n-1}$, on obtient pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f_n'(x) = \frac{1}{2a_n}\left[f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x-a_n)\right]}$$

III.2) Faisons à nouveau une récurrence sur n pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est nulle en dehors de $[-S_n, S_n]$.

- D'après la partie ***I***, f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0] = [-S_0, S_0]$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- On suppose que la propriété est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, donc f_n est nulle en dehors de $[-S_n, S_n]$, c'est-à-dire sur $]-\infty, -S_n[\cup]S_n, +\infty[$.
  - Si $x \in]-\infty, -S_{n+1}[$, on a $x - a_{n+1} < x + a_{n+1} < -S_{n+1} + a_{n+1} = -S_n$, donc :
  $$[x-a_{n+1}, x+a_{n+1}] \subset]-\infty, -S_n[.$$
  - Si $x \in]S_{n+1}, +\infty[$, on a alors $S_n = S_{n+1} - a_{n+1} < x - a_{n+1} < x + a_{n+1}$, donc :
  $$[x-a_{n+1}, x+a_{n+1}] \subset]S_n, +\infty[.$$

  Dans les deux cas, on a f_n est nulle sur $[x-a_{n+1}, x+a_{n+1}]$ et donc :
  $$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2a_{n+1}}\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} f_n(t)\,dt = 0.$$

  Ainsi, f_{n+1} est nulle en dehors de $[-S_{n+1}, S_{n+1}]$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{f_n \text{ est nulle en dehors de } [-S_n, S_n].}$$

III.3) Une fois de plus, montrons par récurrence sur n que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \ldots a_p}$.

- D'après les parties ***I*** et ***II***, la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n \geq 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ et pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$|f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2a_{n+1}}\left|\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} f_n(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2a_{n+1}}\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} |f_n(t)|\,dt \leq \frac{1}{2a_{n+1}}\int_{x-a_{n+1}}^{x+a_{n+1}} \frac{1}{a_0}\,dt = \frac{1}{a_0}.$$
  On a donc :
$$\left|f_{n+1}^{(0)}(x)\right| = |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{a_0}.$$
  D'après la question **III.1** :
$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{2a_{n+1}}\left[f_n(x+a_{n+1}) - f_n(x-a_{n+1})\right].$$
  Donc, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:
$$f_{n+1}^{(p+1)}(x) = \frac{1}{2a_{n+1}}\left[f_n^{(p)}(x+a_{n+1}) - f_n^{(p)}(x-a_{n+1})\right].$$
  Si $p < n$, la fonction $f_n^{(p)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc sur $[x-a_{n+1}, x+a_{n+1}]$ et l'inégalité des accroissements finis donne :
$$\left|\frac{f_n^{(p)}(x+a_{n+1}) - f_n^{(p)}(x-a_{n+1})}{(x+a_{n+1})-(x-a_{n+1})}\right| = \frac{\left|f_n^{(p)}(x+a_{n+1}) - f_n^{(p)}(x-a_{n+1})\right|}{2a_{n+1}} = \left|f_{n+1}^{(p+1)}(x)\right| \leq \max_{[x-a_{n+1},\, x+a_{n+1}]}\left|f_n^{(p+1)}\right|.$$
  Par hypothèse de récurrence $\displaystyle\max_{[x-a_{n+1},\, x+a_{n+1}]}\left|f_n^{(p+1)}\right| \leq \max_{\mathbb{R}}\left|f_n^{(p+1)}\right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p a_{p+1}}$, donc pour $p < n$:
$$\left|f_{n+1}^{(p+1)}(x)\right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p a_{p+1}}.$$
  Enfin :
$$\left|f_{n+1}^{(n+1)}(x)\right| \leq \frac{1}{2a_{n+1}}\left[\left|f_n^{(n)}(x+a_{n+1})\right| + \left|f_n^{(n)}(x-a_{n+1})\right|\right].$$
  Par hypothèse de récurrence $\left|f_n^{(n)}\right| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \dots a_n}$ donc :
$$\left|f_{n+1}^{(n+1)}(x)\right| \leq \frac{1}{2a_{n+1}}\left[\frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n} + \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n}\right] = \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1}}.$$
  Ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_{n+1}(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ et pour tout $p \in [\![0,n+1]\!]$, $\left|f_{n+1}^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$ donc, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{a_0} \text{ et pour tout } p \in [\![0,n]\!],\ \left|f_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}.}$$

III.4) On procède comme dans partie précédente. Avec le changement de variable $u = t - x$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n} \int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(u+x)\,du \,.$$

Donc, si $n \geq 1$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|f_n(y) - f_n(x)\right| = \frac{1}{2a_n} \left| \int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(u+y)\,du - \int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(u+x)\,du \right| = \frac{1}{2a_n} \left| \int_{-a_n}^{a_n} \left[f_{n-1}(u+y) - f_{n-1}(u+x) \right] du \right| .$$

Et :

$$\left|f_n(y) - f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2a_n} \int_{-a_n}^{a_n} \left| f_{n-1}(u+y) - f_{n-1}(u+x) \right| du \,.$$

On peut alors faire encore une fois une récurrence sur *n* pour prouver que f_n est lipschitzienne de rapport *k* sur $\mathbb{R}$.

- La propriété est vraie au rang $n = 0$ d'après la partie ***I***.
- On suppose que pour un entier $n \geq 1$, la propriété est vraie au rang $n - 1 \geq 0$.

  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\left|f_n(y) - f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2a_n} \int_{-a_n}^{a_n} \left| f_{n-1}(u+y) - f_{n-1}(u+x) \right| du \,.$$

  Par hypothèse de récurrence, f_{n-1} est *k*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel *u* :

  $$\left| f_{n-1}(u+y) - f_{n-1}(u+x) \right| \leq k \left| (u+y) - (u+x) \right| = k \left| y - x \right| .$$

  Et :

  $$\left|f_n(y) - f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2a_n} \int_{-a_n}^{a_n} k \left| y - x \right| du = k \left| y - x \right| .$$

  Ainsi, f_n est *k*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et la propriété est vraie au rang *n*.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi :

$$\boxed{f_n \text{ est lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

III.5) Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k < \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \,.$$

Donc $\left[-S_n, S_n\right] \subset \left[-S, S\right]$. Or, f_n est nulle en dehors de $\left[-S_n, S_n\right]$, donc sur $\left[-S, -S_n\right]$ et $\left[S_n, S\right]$.

Alors :

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = \int_{-S}^{-S_n} f_n(t)\,dt + \int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt + \int_{S_n}^{S} f_n(t)\,dt = \int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt \,.$$

Si $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et comme la fonction identité, $t \mapsto t$, l'est aussi, on peut effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt &= \left[t\,f_n(t)\right]_{-S_n}^{S_n} - \int_{-S_n}^{S_n} t\,f_n'(t)\,dt \\ &= \left[t\,f_n(t)\right]_{-S_n}^{S_n} - \int_{-S_n}^{S_n} t\left(\frac{1}{2a_n}\left[f_{n-1}(t+a_n) - f_{n-1}(t-a_n)\right]\right)dt \\ &= \left[t\,f_n(t)\right]_{-S_n}^{S_n} - \frac{1}{2a_n}\left[\int_{-S_n}^{S_n} t\,f_{n-1}(t+a_n)\,dt - \int_{-S_n}^{S_n} t\,f_{n-1}(t-a_n)\,dt\right]\end{aligned}$$

Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $\left[-S_n, S_n\right]$, on a $f_n(-S_n) = f_n(S_n) = 0$, donc :

$$\int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2a_n}\left[\int_{-S_n}^{S_n} t\,f_{n-1}(t-a_n)\,dt - \int_{-S_n}^{S_n} t\,f_{n-1}(t+a_n)\,dt\right].$$

Les fonctions $t \mapsto t - a_n$ et $t \mapsto t + a_n$ sont toutes deux de classe C^1 et bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc on peut effectuer les changements de variables $u = t - a_n$ dans la première intégrale et $u = t + a_n$ dans la seconde, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt &= \frac{1}{2a_n}\left[\int_{-S_n-a_n}^{S_n-a_n} (u+a_n)f_{n-1}(u)\,du - \int_{-S_n+a_n}^{S_n+a_n} (u-a_n)f_{n-1}(u)\,du\right] \\ &= \frac{1}{2a_n}\left[\int_{-S_n-a_n}^{S_n-a_n} u\,f_{n-1}(u)\,du + a_n\int_{-S_n-a_n}^{S_n-a_n} f_{n-1}(u)\,du - \int_{-S_n+a_n}^{S_n+a_n} u\,f_{n-1}(u)\,du + a_n\int_{-S_n+a_n}^{S_n+a_n} f_{n-1}(u)\,du\right]\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{cases}\left[-S_n - a_n, S_n - a_n\right] = \left[-S_{n-1} - 2a_n, S_{n-1}\right] = \left[-S_{n-1} - 2a_n, -S_{n-1}\right] \cup \left[-S_{n-1}, S_{n-1}\right] \\ \left[-S_n + a_n, S_n + a_n\right] = \left[-S_{n-1}, S_{n-1} + 2a_n\right] = \left[-S_{n-1}, S_{n-1}\right] \cup \left[S_{n-1}, S_{n-1} + 2a_n\right]\end{cases}$$

Or, f_{n-1} est nulle en dehors de $\left[-S_{n-1}, S_{n-1}\right]$, donc nulle sur $\left[-S_{n-1} - 2a_n, -S_{n-1}\right]$ et $\left[S_{n-1}, S_{n-1} + 2a_n\right]$, et ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)\,dt &= \frac{1}{2a_n}\left[\int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} u\,f_{n-1}(u)\,du + a_n\int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} f_{n-1}(u)\,du - \int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} u\,f_{n-1}(u)\,du + a_n\int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} f_{n-1}(u)\,du\right] \\ &= \int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} f_{n-1}(u)\,du\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = \int_{-S}^{S} f_{n-1}(t)\,dt$, soit :

$$\begin{aligned}\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt &= \int_{-S}^{S} f_0(t)\,dt = \int_{-a_0}^{a_0} f_0(t)\,dt = \int_{-a_0}^{0} f_0(t)\,dt + \int_{0}^{a_0} f_0(t)\,dt \\ &= \int_{-a_0}^{0} \frac{a_0 + t}{a_0^2}\,dt + \int_{0}^{a_0} \frac{a_0 - t}{a_0^2}\,dt = \frac{1}{a_0^2}\left(\left[a_0 t + \frac{1}{2}t^2\right]_{-a_0}^{0} + \left[a_0 t - \frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{a_0}\right)\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = 1}$$

IV – La limite

IV.1) a) Soient un entier $n \geq 1$ et un réel *x*. Remarquons que $f_{n-1}(x) = \dfrac{1}{2a_n}\displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(x)\,dt$, donc :

$$
\begin{aligned}
|k_n(x)| = |f_n(x) - f_{n-1}(x)| &= \left|\frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt - f_{n-1}(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt - \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(x)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2a_n}\left|\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t) - f_{n-1}(x)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} |f_{n-1}(t) - f_{n-1}(x)|\,dt
\end{aligned}
$$

Comme f_{n-1} est lipschitzienne de rapport *k* sur $\mathbb{R}$:

$$|k_n(x)| \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} k\,|t-x|\,dt = \frac{k}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} |t-x|\,dt\,.$$

Et, comme $a_n > 0$, on a $x - a_n < x < x + a_n$, donc :

$$\int_{x-a_n}^{x+a_n} |t-x|\,dt = \int_{x-a_n}^{x} (x-t)\,dt + \int_{x}^{x+a_n} (t-x)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{x-a_n}^{x} + \left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_{x}^{x+a_n} = a_n^2\,.$$

Donc, $|k_n(x)| \leq \dfrac{k}{2a_n}a_n^2$, soit :

$$\boxed{|k_n(x)| \leq \frac{k}{2}a_n}$$

IV.1) a) La série $\sum a_n$ converge, donc $\sum \dfrac{k}{2}a_n$ converge et ainsi, d'après la question précédente, la série de fonctions $\sum k_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum k_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

IV.2) a) La série de fonction $\sum_{n\geq 1} k_n = \sum_{n\geq 1} (f_n - f_{n-1})$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une fonction } w.}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a par télescopage :

$$\sum_{p=1}^{n} k_p(x) = \sum_{p=1}^{n}\big(f_p(x) - f_{p-1}(x)\big) = f_n(x) - f_0(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) = f_0(x) + \sum_{p=1}^{n} k_p(x)\,.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} k_p(x)$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{w(x) = f_0(x) + s(x)}$$

IV.2) b) D'après la partie ***III***, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{a_0}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = w(x)$, on obtient immédiatement en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\left|w(x)\right| \leq \frac{1}{a_0}}$$

IV.2) c) D'après la partie ***III***, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|f_n(y) - f_n(x)\right| \leq k\left|y - x\right|.$$

Comme ci-dessus, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|w(y) - w(x)\right| \leq k\left|y - x\right|.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } w \text{ est lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

IV.2) d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a vu que $\left[-S_n, S_n\right] \subset \left[-S, S\right]$, soit $\mathbb{R} \setminus \left[-S, S\right] \subset \mathbb{R} \setminus \left[-S_n, S_n\right]$ (question **III.5**) et que f_n est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \left[-S_n, S_n\right]$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \left[-S, S\right]$ (question **III. 2**).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-S, S\right]$, $f_n(x) = 0$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-S, S\right]$, $w(x) = 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La fonction } w \text{ est nulle en dehors du segment } \left[-S, S\right].}$$

IV.3) a) La série de fonctions $\sum k_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\left[-S, S\right]$).

Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (question **III. 1**), la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que w l'est aussi et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt\right) = \int_{-S}^{S}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = \int_{-S}^{S} w(t)\,dt\,.$$

Or, $\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt\right) = 1$, soit :

$$\boxed{\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = 1}$$

IV.3) b) Si w était constante nulle sur $\mathbb{R}$, alors on aurait $\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = \int_{-S}^{S} 0\,dt = 0$, ce qui est faux. Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } w \text{ n'est pas constante nulle sur } \mathbb{R}.}$$

IV.4) a) Soit un entier $n \geq 1$. On a vu (question **III. 1**) que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{2a_n}\left[f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x-a_n)\right].$$

Si $n \geq 2$, alors f_{n-1} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (question **III. 1**), donc :

$$f_n'(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}'(t)\,dt.$$

Et comme fait dans la question **IV.1**.a, on peut écrire :

$$f_n'(x) - f_{n-1}'(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\left[f_{n-1}'(t) - f_{n-1}'(x)\right]dt.$$

Or, pour $n \geq 3$ et d'après la question **III.3**, f_{n-1}' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|f_{n-1}''(x)\right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 a_2}$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous $t, x \in \mathbb{R}$:

$$\left|f_{n-1}'(t) - f_{n-1}'(x)\right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 a_2}|t-x|.$$

Alors, avec $\int_{x-a_n}^{x+a_n}|t-x|\,dt = a_n^2$ (calculé plus haut), on obtient pour tout entier $n \geq 3$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|f_n'(x) - f_{n-1}'(x)\right| \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\left|f_{n-1}'(t) - f_{n-1}'(x)\right|dt \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\frac{1}{a_0 a_1 a_2}|t-x|\,dt = \frac{1}{2a_0 a_1 a_2}a_n.$$

Comme la série $\sum a_n$ converge :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geq 2}(f_n' - f_{n-1}') \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

IV.4) b) Pour tout entier $n \geq 2$, on a par télescopage :

$$\sum_{p=2}^{n}(f_p - f_{p-1}) = f_n - f_1 \quad\Leftrightarrow\quad f_n = f_1 + \sum_{p=2}^{n}(f_p - f_{p-1}).$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{w = f_1 + \sum_{p=2}^{+\infty}(f_p - f_{p-1})}$$

IV.4) c) Pour tout entier $n \geq 2$, $f_n - f_{n-1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' - f_{n-1}'$.

De plus, $\sum_{n\geq 2}(f_n - f_{n-1})$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on vient de voir (question **IV.4**.a) que $\sum_{n\geq 2}(f_n' - f_{n-1}')$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure que $\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n' - f_{n-1}')$.

Comme f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (question **II.1**), $w = f_1 + \sum_{p=2}^{+\infty}(f_p - f_{p-1})$ est la somme de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{w \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

IV.4) d) D'après la question précédente, on a $w' = f_1' + \sum_{n=2}^{+\infty}(f_n' - f_{n-1}')$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$w'(x) = f_1'(x) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=2}^{n}\left(f_p'(x) - f_{p-1}'(x)\right).$$

Et par télescopage, $\sum_{p=2}^{n}\left(f_p'(x) - f_{p-1}'(x)\right) = f_n'(x) - f_1'(x)$, donc :

$$w'(x) = f_1'(x) + \lim_{n \to +\infty}\left(f_n'(x) - f_1'(x)\right) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

Or, d'après la question **III.3**, on a $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient, avec la relation ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}}$$

IV.5) a) On procède comme dans la question **IV.5**.a.

Soit un entier $n \geq p+2$.

On a vu (question **III. 1**) que f_n et f_{n-1} sont respectivement de classe C^n et C^{n-1}, donc toutes deux de classe au moins C^{p+1} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{2a_n}\left[f_{n-1}(x + a_n) - f_{n-1}(x - a_n)\right].$$

Alors :

$$\begin{aligned} f_n^{(p)}(x)-f_{n-1}^{(p)}(x) &= \frac{1}{2a_n}\left[f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_n)-f_{n-1}^{(p-1)}(x-a_n)\right]-f_{n-1}^{(p)}(x) \\ &= \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}^{(p)}(t)\,dt-\frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}^{(p)}(x)\,dt \\ &= \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\left[f_{n-1}^{(p)}(t)-f_{n-1}^{(p)}(x)\right]dt \end{aligned}$$

Donc :

$$\left|f_n^{(p)}(x)-f_{n-1}^{(p)}(x)\right|\leq\frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\left|f_{n-1}^{(p)}(t)-f_{n-1}^{(p)}(x)\right|dt\,.$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|f_{n-1}^{(p+1)}(x)\right|\leq\dfrac{1}{a_0a_1\ldots a_{p+1}}$, donc à nouveau avec l'inégalité des accroissements finis, on a $\left|f_{n-1}^{(p)}(t)-f_{n-1}^{(p)}(x)\right|\leq\dfrac{1}{a_0a_1\ldots a_{p+1}}|t-x|$ pour tous $t,x\in\mathbb{R}$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left|f_n^{(p)}(x)-f_{n-1}^{(p)}(x)\right|\leq\frac{1}{2a_n}\frac{1}{a_0a_1\ldots a_{p+1}}\int_{x-a_n}^{x+a_n}|t-x|\,dt=\frac{1}{2a_0a_1\ldots a_{p+1}}a_n\,.$$

Comme la série $\sum a_n$ converge :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum_{n\geq p+1}(f_n^{(p)}-f_{n-1}^{(p)}) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}\,.}$$

IV.5) b) Pour tout entier $n\geq p+1$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=p+1}^{n}(f_k-f_{k-1})=f_n-f_p \quad\Leftrightarrow\quad f_n=f_p+\sum_{k=p+1}^{n}(f_k-f_{k-1})\,.$$

En passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$\boxed{w=f_p+\sum_{k=p+1}^{+\infty}(f_k-f_{k-1})}$$

IV.5) c) D'après ce qui précède :

- pour tout entier $n\geq p+1$, f_n-f_{n-1} est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives $f_n^{(k)}-f_{n-1}^{(k)}$ pour tout $k\in[\![0,p]\!]$;
- la série $\sum_{n\geq p+1}(f_n^{(k)}-f_{n-1}^{(k)})$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$ (car la série $\sum_{n\geq k+1}(f_n^{(k)}-f_{n-1}^{(k)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ d'après les questions **IV.1**.b pour $k=0$, **IV.4**.a pour $k=1$ et la question précédente pour $k\geq 2$, en remplaçant *p* par *k*)
- la série $\sum_{n\geq p+1}(f_n^{(p)}-f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure que $\sum_{k=p+1}^{+\infty}(f_k - f_{k-1})$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives $\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n^{(k)} - f_{n-1}^{(k)})$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

Comme f_p est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ (question **II.1**), $w = f_p + \sum_{k=p+1}^{+\infty}(f_k - f_{k-1})$ est la somme de deux fonctions de classe C^p sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{w \text{ est de classe } C^p \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

IV.5) d) D'après la question précédente, on a $w^{(p)} = f_p^{(p)} + \sum_{k=p+1}^{+\infty}(f_k^{(p)} - f_{k-1}^{(p)})$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$w^{(p)}(x) = f_p^{(p)}(x) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{n} \left(f_k^{(p)}(x) - f_{k-1}^{(p)}(x) \right).$$

Et par télescopage, $\sum_{k=p+1}^{n} \left(f_k^{(p)}(x) - f_{k-1}^{(p)}(x) \right) = f_n^{(p)}(x) - f_p^{(p)}(x)$, donc :

$$w^{(p)}(x) = f_p^{(p)}(x) + \lim_{n \to +\infty} \left(f_n^{(p)}(x) - f_p^{(p)}(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(p)}(x).$$

Or, d'après la question **III.3**, on a $\left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$ pour tout $n \geq p$ et tout $x \in \mathbb{R}$, donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient, avec la relation ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\left| w^{(p)}(x) \right| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}}$$

Problème II

I – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente (Extrait adapté de : Centrale – PSI – 2019 – Maths 2)

I-1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, alors $A^p = 0_n$, donc X^p est un polynôme annulateur de A et le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, soit $Sp(A) \subset \{0\}$.

Or, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^p \in GL_n(\mathbb{K})$ et donc A^p ne peut être inversible. Ainsi, $\ker A \neq \{0\}$ et donc $\{0\} \subset Sp(A)$.

Finalement $Sp(A) = \{0\}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{0 est l'unique valeur propre de } A.}$$

I-2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente et diagonalisable. On vient de voir que la seule valeur propre de *A* est 0, donc comme elle est diagonalisable, A est semblable à $Diag(0, \dots, 0) = 0_n$.

Or, la seule matrice semblable à 0_n est 0_n, donc :

$$\boxed{0_n \text{ est la seule matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable.}}$$

I-3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A son polynôme caractéristique. On veut :

$$A \text{ nilpotente} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_A = X^n.$$

($\Rightarrow$) On suppose que *A* est nilpotente.

Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé, donc χ_A est scindé (et unitaire). Or, d'après la question **I-1**, la seule valeur propre de *A*, donc la seule racine de χ_A, est 0. Ainsi :

$$\chi_A = X^n.$$

($\Leftarrow$) On suppose que $\chi_A = X^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = A^n = 0_n$ et donc :

A est nilpotente.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est } X^n.}$$

I-4) On montrer que si 0 est l'unique valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est nilpotente.

Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont 0 est l'unique valeur propre.

Alors, 0 est la seule racine de χ_A. Comme χ_A est scindé et unitaire (question précédente), on a $\chi_A = X^n$ et d'après la question précédente, A est nilpotente.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si 0 est l'unique valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{, alors } A \text{ est nilpotente.}}$$

I-5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire à diagonale nulle. On a alors immédiatement $\chi_A = X^n$ et A est nilpotente (d'après la question **I-3**). Ainsi :

$$\boxed{\text{Une matrice triangulaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ à diagonale nulle est nilpotente.}}$$

Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme A est à coefficients complexes, elle trigonalisable, autrement dit semblable à une matrice triangulaire T.

Les coefficients diagonaux de T sont ses valeurs propres, qui sont les mêmes que celles de A. Or, d'après **I-1**, 0 est l'unique valeur propre de A, donc les coefficients diagonaux de T sont tous nuls et ainsi :

$$\boxed{\text{Une matrice nilpotente de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$$

I-6) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice p.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, multiple de X^p. Il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)X^p$.

Alors, $P(A) = Q(A)A^p = Q(A).0_n = 0_n$ et donc, P annule A. Ainsi :

$$\boxed{\text{Tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ multiple de } X^p \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

b) $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A.

Si $\mathscr{R}(P)$ est l'ensemble des racines complexes de P, alors $Sp(A) \subset \mathscr{R}(P)$.

Mais, comme A est nilpotente, $Sp(A) = \{0\}$ (question **I-1**), donc $\{0\} \subset \mathscr{R}(P)$, autrement dit :

$$\boxed{\text{0 est racine de } P.}$$

c) Posons $Q = \alpha_q X^q + ... + \alpha_1 X + \alpha_0$. On a alors $Q(0) = \alpha_0 \neq 0$.

Comme A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle T, donc il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = R^{-1}TP$.

On a alors $Q(A)=R^{-1}Q(T)P$, donc $\det Q(A)=\det Q(T)$.

Or, $Q(T)=\alpha_q T^q+...+\alpha_1 T+\alpha_0 I_n$ et toutes les puissances de T sont triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc $\alpha_q T^q+...+\alpha_1 T$ aussi. Ainsi, $Q(T)$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux valent α_0. Alors :

$$\det Q(A)=\det Q(T)=\alpha_0^n\neq 0.$$

Et ainsi :

$$\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$$

On a $P(A)=A^m Q(A)=0_n$ et en multipliant à droite par $Q(A)^{-1}$, on obtient :

$$A^m=A^m Q(A)Q(A)^{-1}=0_n Q(A)^{-1}=0_n.$$

Or, l'indice de nilpotence est $p=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*\setminus A^k=0_n\right\}$ donc $p\leq m$ et ainsi, X^p divise X^m, donc divise $P=X^m Q$, c'est-dire :

$$\boxed{P \text{ est un multiple de } X^p \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$$

II – Exemples de sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2016 – Maths 2*)

II-1) On a $\chi_D=\begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix}=X^2+1$, donc *D* n'admet aucune valeur propre réelle, mais deux valeurs propres complexes non nulles (*i* et – *i*), donc :

$$\boxed{D \text{ est quasi-nilpotente vue comme matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\text{, mais pas vue comme matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

II-2) On a $\chi_B=\begin{vmatrix} X-1 & -i \\ -i & X+1 \end{vmatrix}=X^2-1+(-i)^2=X^2$, donc *D* n'admet que 0 pour valeur propre (complexe ou réelle). Ainsi :

$$\boxed{B \text{ est quasi-nilpotente vue comme matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ (et donc de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\text{).}}$$

II-3) et **II-4)** C'est du cours de première année. L'exhumer de vos archives…

II-5) Soit $M=(m_{i,j})\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$, on a :

$$\chi_M=\begin{vmatrix} X & -m_{1,2} & \cdots & -m_{1,n} \\ 0 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}=X^n.$$

Donc, la seule valeur propre de *M* est 0 et ainsi, *M* est quasi-nilpotente. Ceci étant vrai pour toute matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est quasi-nilpotent dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Pour tout $M=(m_{i,j})\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$, on a $M=\sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}E_{i,j}$. Mais, comme *M* est triangulaire supérieure stricte, on a $m_{i,j}=0$ quand $i\ge j$. Donc, $M=\sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j}E_{i,j}$ et ainsi, la famille $(E_{i,j})_{1\le i<j\le n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. Comme elle est libre (car extraite de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,), c'est donc une base de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$.

Or, on peut écrire :

$$(E_{i,j})_{1\le i<j\le n}=(E_{1,2},E_{1,2},\ldots,E_{1,n},E_{2,3},\ldots,E_{2,n},\ldots,E_{n-2,n-1},E_{n-2,n},E_{n-1,n}).$$

La base $(E_{i,j})_{1\le i<j\le n}$ contient donc $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ matrices, et ainsi :

$$\boxed{\dim\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})=\frac{n(n-1)}{2}}$$

II-6) Pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX$ est un scalaire (en fait, une matrice 1×1), donc :

$${}^t({}^tXAX)={}^tXAX.$$

Or, $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tA=-A$ et :

$${}^t({}^tXAX)={}^tX\,{}^tA\,{}^t({}^tX)={}^tX(-A)X=-{}^tXAX.$$

Ainsi, $-{}^tXAX={}^tXAX$, ce qui donne immédiatement, pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{{}^tXAX=0}$$

II-7) Soit alors λ une éventuelle valeur propre de *A* et *X* un vecteur propre associé à *A*. On a :

$${}^tXAX={}^tX(AX)={}^tX(\lambda X)=\lambda\,{}^tXX=\lambda\|X\|^2$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Comme X est un vecteur propre, $\|X\| \neq 0$, alors :

$$ {}^t XAX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \|X\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 . $$

Ainsi, la seule valeur propre réelle possible de A est 0, donc A est quasi-nilpotente.

Ceci étant vari pour tout matrice A de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on en conclut que :

$$\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est quasi-nilpotent dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

II-8) Posons $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\Delta \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Supposons que Δ soit semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. Les deux matrices ont alors le même polynôme caractéristique.

Ceci est absurde, car $\chi_\Delta = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2+1)$ et $\chi_T = X^n$, donc $\chi_\Delta \neq \chi_T$.

Ainsi, on a trouvé une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ qui n'est semblable à aucune matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{ PMP^{-1} \setminus M \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \right\}.}$$

III – D'autres résultats sur les endomorphismes nilpotents d'un espace réel (Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2020 – Maths 1)

III-1) En remarquant que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit d'utiliser le résultat de la question **I-5)** : une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Ainsi :

M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls.

Notons $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure stricte semblable à *M*.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme *M* et *T* sont semblables, M^k et T^k le sont aussi avec la même matrice de passage, donc :

$$ tr(u^k) = tr(M^k) = tr(T^k) . $$

Or, $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{C})$ est stable par produit, donc $T^k \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{C})$. Ainsi, tous les coefficients diagonaux de T^k sont nuls et $tr(T^k) = 0$, ce qui donne, pour tout entier $k > 0$:

$$\boxed{tr(u^k) = 0}$$

III-2) L'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $v \mapsto M_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme et :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \left\{ v \in \mathcal{L}(E), M_{\mathcal{B}}(v) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \right\} = \varphi^{-1}\left(\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \right).$$

Ceci permet de conclure que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe à $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc de même dimension que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, soit :

$$\boxed{\mathcal{N}_{\mathcal{B}} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E) \text{ de dimension } \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Soit $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ tel que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $N^n = 0_n$.

Donc, N est nilpotente d'indice de nilpotence n et $N \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors, si on considère $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M_{\mathcal{B}}(v) = N$, on a :

$$\boxed{v \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}} \text{ et est nilpotent d'indice de nilpotence } n.}$$

III-3) On a $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

Notons alors $m = \min\left\{ k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k \neq 0 \right\}$ (qui existe car l'ensemble considéré est une partie non vide de $\mathbb{N}$). On a alors $\lambda_m \neq 0$ et $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$ (s'il y en a) et :

$$\lambda_m u^m(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

Alors, comme $p-1-m \geq 0$ (car $m \in [\![0, p-1]\!]$), on peut écrire :

$$u^{p-1-m}\left(\lambda_m u^m(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) \right) = \lambda_m u^{p-1}(x) + \lambda_{m+1} u^p(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2(p-1)-m}(x) = u^{p-1-m}(0) = 0.$$

Or, $u^p(x) = 0$ donc pour tout entier $k \geq p$, $u^k(x) = u^{k-p}\left(u^p(x) \right) = u^{k-p}(0) = 0$, d'où :

$$\lambda_m u^{p-1}(x) = 0.$$

Et comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, on obtient $\lambda_m = 0$, ce qui est absurde, donc il n'existe pas de $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$, soit $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La famille } \left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x) \right) \text{ est libre.}}$$

Remarquons que l'on montre de même que la famille $\left(y, u(y), \dots, u^{q-1}(y) \right)$ *est libre.*

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{q-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) + \mu_0 y + \mu_1 u(y) + \dots + \mu_{q-1} u^{q-1}(y) = 0.$$

Si $p < q$, appliquons u^p, on obtient :

$$\lambda_0 u^p(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2p-1}(x) + \mu_0 u^p(y) + \dots + \mu_{q-1} u^{p+q-1}(y) = \mu_0 u^p(y) + \dots + \mu_{q-1-p} u^{q-1}(y) = 0.$$

Et comme la famille $\left(y, u(y), \dots, u^{q-1}(y)\right)$ est libre, ceci donne $\mu_0 = \dots = \mu_{q-1-p} = 0$ et donc :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) + \sum_{k=q-p}^{q-1} \mu_k u^k(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \mu_{k+q-p} u^{k+q-p}(y) = 0.$$

Avec $z = u^{q-p}(y)$ et $\gamma_k = \mu_{k+q-p}$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, ceci se récrit :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) + \gamma_0 z + \gamma_1 u(z) + \dots + \gamma_{p-1} u^{p-1}(z) = 0 \qquad \textbf{(1)}.$$

De plus :

- $u^{q-1}(y) = u^{p-1+q-p}(y) = u^{p-1}(z)$ donc la famille $\left(u^{p-1}(x), u^{p-1}(z)\right)$ est libre ;
- pour tout entier $k \geq p$, on a $k + q - p \geq q$ donc $u^k(z) = u^{k+q-p}(y) = 0$.

Supposons alors qu'il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$ ou $\gamma_k \neq 0$.

Notons alors *m* le plus entier entre 0 et $p-1$ qui vérifie cela.

On alors $\lambda_k = \gamma_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$ et $\lambda_m \neq 0$ ou $\gamma_m \neq 0$ et la relation devient alors :

$$\lambda_m u^m(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) + \gamma_m u^m(z) + \dots + \gamma_{p-1} u^{p-1}(z) = 0.$$

Et, en appliquant u^{p-1}, on obtient (avec $u^k(x) = u^k(z) = 0$ pour tout $k \geq p$) :

$$\lambda_m u^{p-1}(x) + \gamma_m u^{p-1}(z) = 0.$$

Et comme $\left(u^{p-1}(x), u^{p-1}(z)\right)$ est libre, on a $\lambda_m = \gamma_m = 0$, ce qui est absurde.

Donc, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\lambda_k = \gamma_k = 0$ et finalement, on a :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = \mu_0 = \dots = \mu_{q-p-1} = \mu_{q-p} = \dots = \mu_{q-1} = 0$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y)\right) \text{ est libre.}}$$

III-4) On prend $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent, d'indice de nilpotence *p*.

Il existe alors $x \in E$ tel que $u^p(x) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors, d'après la question précédente, la famille $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre donc contient au plus $n = \dim E$ vecteurs. Or, cette famille contient *p* vecteurs, donc :

$$\boxed{p \leq n}$$

On suppose que $p \geq \max(2, n-1)$.

Alors, $p \geq 2$, donc $p-1 \geq 1$ et : $\underline{\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \operatorname{Im} u}$. De plus, $u^p = u^{p-1}u = 0$ donc : $\underline{\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \ker u}$.

Ainsi :

$$\underline{\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \operatorname{Im} u \cap \ker u}.$$

Soit maintenant $x \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$.

Comme $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$ et comme $x \in \ker u$, on a $u^2(z) = u(x) = 0$.

Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ (il en existe car $u^{p-1} \neq 0$).

Supposons que la famille $\left(u^{p-1}(x_0), u(z)\right)$ soit libre. Alors, d'après la question précédente, la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0), z, u(z)\right)$ est libre aussi, donc contient au plus n vecteurs. Or, cette famille contient $p+2$ vecteurs, donc $p+2 \leq n$, soit $p \leq n-2 < n-1$.

Ceci est absurde car $p \geq \max(2, n-1) \geq n-1$ et donc $\left(u^{p-1}(x_0), u(z)\right) = \left(u^{p-1}(x_0), x\right)$ est liée.

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, il existe un réel k tel que $x = ku^{p-1}(x_0) = u^{p-1}(kx_0)$, donc $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$ et :

$$\underline{\operatorname{Im} u \cap \ker u \subset \operatorname{Im} u^{p-1}}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \ker u}$$

On a vu que $\operatorname{Im} u^{p-1} \neq \{0\}$, donc $\dim \operatorname{Im} u^{p-1} \geq 1$.

Supposons que $\dim \operatorname{Im} u^{p-1} \geq 2$. Alors, il existe deux vecteurs x et y de E tel que la famille $\left(u^{p-1}(x), u^{p-1}(y)\right)$ est libre. A nouveau à l'aide de la question précédente, on peut affirmer que la famille de $2p$ vecteurs $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\right)$ est libre aussi, donc contient au plus n vecteurs et ainsi, $2p \leq n$. Or, $p \geq \max(2, n-1)$ donc :

$$2\max(2, n-1) = \max(4, 2n-2) \leq 2p \leq n.$$

Alors, $4 \leq n$ et $2n-2 \leq n$, soit $n \leq 2$, ce qui est absurde. Ainsi, $\dim \operatorname{Im} u^{p-1} < 2$ et donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} u^{p-1} \text{ est de dimension } 1.}$$

IV – Dimension maximale d'un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2016 – Maths 2)

IV-A-1) Toute matrice M de $S_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, si M est quasi-nilpotente sa seule valeur propre possible est 0, donc M est semblable à $diag\,(0,\dots,0)=0_n$, c'est-à-dire $M=0_n$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } S_n(\mathbb{R}) \text{ quasi-nilpotentes dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est } \{0_n\}.}$$

On a vu que la matrice $B=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$ de la question 2 est quasi-nilpotente. Or, elle est symétrique et non nulle. Donc, $B\in S_n(\mathbb{C})\setminus\{0_n\}$ et B est quasi-nilpotente :

$$\boxed{\text{Le résultat obtenu ci-dessus ne tient pas si l'on remplace } \mathbb{R} \text{ par } \mathbb{C}.}$$

IV-A-2) D'après la question précédente $S_n(\mathbb{R})\cap V=\{0_n\}$, donc :

$$S_n(\mathbb{R})+V=S_n(\mathbb{R})\oplus V\ .$$

Comme $S_n(\mathbb{R})\oplus V\subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim\left(S_n(\mathbb{R})\oplus V\right)=\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right)+\dim V\leq \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)\quad\Rightarrow\quad \dim V\leq \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)-\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right).$$

Comme $\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)=n^2$, on obtient :

$$\dim V\leq n^2-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{\dim V\leq \frac{n(n-1)}{2}}$$

B. Cas général

IV-B-1) a) Considérons l'application linéaire $L:V\to\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\ker L=\left\{M\in V\setminus L(M)=0\right\}=W\ .$$

Et le théorème du rang donne :

$$\dim V=\dim\left(\ker L\right)+\dim\left(\operatorname{Im} L\right)=\dim W+\dim\left(\operatorname{Im} L\right).$$

Comme $\operatorname{Im} L\subset \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, on a $\dim\left(\operatorname{Im} L\right)\leq\dim\left(\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})\right)=n-1$, et ainsi :

$$\dim V\leq \dim W+n-1\qquad \textbf{(1)}$$

Considérons maintenant l'application linéaire $K : V \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\ker K \cap W = \{M \in W \setminus K(M) = 0\} = \{M \in V \setminus K(M) = 0 \text{ et } L(M) = 0\} = C_n(V).$$

Avec $C_n(V) = \{0\}$, on a donc $\ker K \cap W = \{0\}$.

Si on considère maintenant $\tilde{K} : W \to K(W)\,; M \mapsto K(M)$, on a :

$$\operatorname{Im} \tilde{K} = \tilde{K}(W) = K(W)$$
$$\ker \tilde{K} = \ker K \cap W = \{0\}$$

Donc, $\tilde{K}$ est un isomorphisme et :

$$\dim W = \dim K(W).$$

L'inégalité **(1)** donne alors :

$$\boxed{\dim V \leq \dim K(W) + n - 1}$$

IV-B-1) b) Soit $M \in W$. On a :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & K(M) & & R(M) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a(M) \end{array}\right).$$

Ainsi, $\chi_M = \big(X - a(M)\big)\chi_{K(M)}$. Or, $W \subset V$, donc M est quasi-nilpotente et ainsi, la seule racine possible de χ_M est 0. Ceci implique immédiatement que $a(M) = 0$ et que la seule racine possible de $\chi_{K(M)}$ est 0. Ainsi, $K(M)$ est quasi-nilpotente.

Ceci étant vraie pour toute matrice M de W, $K(W)$ est une partie quasi-nilpotente de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Or, on a vu que $W = \ker L$, donc W est un sous-espace vectoriel de V et, comme K est linéaire, $K(W)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Ainsi, $K(W)$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $K(W)$ vérifie l'inégalité (QN), soit :

$$\dim K(W) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$\dim V \leq \dim K(W) + n - 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}}$$

IV-B-2) Comme V est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut lui appliquer le lemme des colonnes : il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V)=\{0\}$.

Si $j=n$, on vient de prouver le résultat. Si $j<n$, considérons alors la matrice $X_{j,n}$ de l'opération élémentaire échange des lignes ou des colonnes j et n. On a $X_{j,n} \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $X_{j,n}^{-1} = X_{j,n}$.

L'application $\Phi : M \mapsto X_{j,n}^{-1} M X_{j,n} = X_{j,n} M X_{j,n}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors, comme V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi(V) = \left\{ X_{j,n}^{-1} M X_{j,n} \setminus M \in V \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de même dimension.

De plus, pour toute $M \in V$, $\Phi(M) = X_{j,n}^{-1} M X_{j,n}$ est semblable à M donc a les mêmes avaleurs propre. Alors, comme M est quasi-nilpotente, $\Phi(M)$ l'est aussi.

Ainsi, $\Phi(V)$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\dim\left(\Phi(V)\right) = \dim V$.

Enfin, si $M = (a_{i,j}) \in V$, alors :

$$\Phi(M) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,n} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,j-1} & a_{j-1,n} & a_{j-1,j+1} & \cdots & a_{j-1,n-1} & a_{j-1,j} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,n} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,j} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,n} & a_{j+1,j+1} & \cdots & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,j} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,j-1} & a_{j,n} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{j,n-1} & a_{j,j} \end{pmatrix}.$$

Alors, si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M et $C'_1, \dots, C'_n$ celles de $\Phi(M)$, on a :

$$C_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C'_n = 0.$$

Rappelons que $C_j(V)=\{0\}$, donc si $C_1 = \dots = C_{j-1} = C_{j+1} = \dots = C_n = 0$, alors $C_j = 0$, ce qui se récrit :

$$C_1' = \dots = C_2' = \dots = C_{n-1}' = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n' = 0.$$

Ceci veut dire que $C_n\left(\Phi(V)\right) = \{0\}$, donc d'après la question précédente $\dim\left(\Phi(V)\right) \le \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Finalement, comme $\dim\left(\Phi(V)\right) = \dim V$, on a bien :

$$\boxed{\dim V \le \frac{n(n-1)}{2}}$$