DM de Mathématiques n° 5

Exercice 1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes avec $a_0 = b_0 = 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) Montrer que $\sum a_n b_n$ converge dans les deux cas suivants :

   a) $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $\sum |b_n - b_{n+1}|$ converge et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

   b) $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} b_n\sqrt{n} = 0$.

2) Après avoir déterminé le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} z^n$, montrer qu'elle est convergente en tout point de du cercle de convergence $|z| = R$, mais absolument convergente en aucun point de ce cercle. On pourra traiter séparément les cas $z = R$ et $z \neq R$.

Exercice 2

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(n!)^2}$. On note *f* sa somme.

2) Pour tout réel $x > 0$, comparer $f(x)$ et $I(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2\sqrt{x}\sin t\right) dt$.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n, \varphi'_n, \ldots, \varphi_n^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note M_n un majorant commun à $|\varphi_n|$, $|\varphi'_n|$, … et $|\varphi_n^{(n-1)}|$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ et la série $\sum \dfrac{|a_n| M_n}{\lambda_n}$ converge.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$ est définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$.