DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 7 pages.

Problème 1

Extrait de Centrale – PC – 2011 (Maths 1)

On cherche à construire suite de fonctions convergeant vers une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un segment.

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

I – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel :

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(|x+a_0| + |x-a_0| - 2|x|\right).$$

I.1) Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur (en fonction de x) sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$; justifier sa continuité et tracer son graphe.

I.2) On pose $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

a) Montrer que pour tout réel x, on a $|f_0(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$.

b) Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

II – La première étape

On pose pour tout x réel :

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,dt\,.$$

II.1) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

II.2) Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0-a_1, a_0+a_1]$.

II.3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_1(x)|\leq \dfrac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)|\leq \dfrac{1}{a_0a_1}$.

II.4) Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n\geq 2$ et tout x réel :

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt\,.$$

Soit un entier naturel n.

III.1) Montrer que f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et, quand $n\geq 1$, calculer f_n' à l'aide de f_{n-1}.

III.2) Montrer que f_n est nulle en dehors de $[-S_n, S_n]$.

III.3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|\leq \dfrac{1}{a_0}$ et pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, $|f_n^{(p)}(x)|\leq \dfrac{1}{a_0a_1\ldots a_p}$.

☺ *On pourra penser à l'inégalité des accroissements finis.*

III.4) Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.5) On rappelle que $S=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Montrer que :

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = 1\,.$$

IV – La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} k_n$ avec $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout entier $n\geq 1$.

IV.1)

a) Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel x, montrer que $|k_n(x)|\leq \dfrac{k}{2}a_n$.

b) En déduire la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum k_n$.

Pour tout réel x, on note $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n(x)$.

IV.2)

a) Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|w(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$.

c) Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

IV.3)

a) Montrer que $\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = 1$.

b) En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

IV.4)

a) Montrer que $\sum_{n\geq 2}(f_n' - f_{n-1}')$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_1 et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

IV.5) Soit un entier $p \geq 2$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq p+1}(f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_p et $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w^{(p)}(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \ldots a_p}$.

Ceci étant vrai pour tout $p \geq 2$, w est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction w de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

Problème 2

Dans tout le problème, et sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués, respectivement, des matrices symétriques et antisymétriques.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure stricte* lorsqu'elle est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous nuls. On note $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes.

Définitions :

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$ s'appelle l'***indice de nilpotence*** de M.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***quasi-nilpotente*** lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***quasi-nilpotente*** lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.

On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente (***Extrait adapté de : Centrale – PSI – 2019 – Maths 2***)

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I-1) Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.

I-2) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

Jusqu'à la fin de cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I-3) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n.

I-4) Montrer la réciproque de la question **I-1** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I-5) Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

I-6) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice p.

a) Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

On suppose que $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A.

b) Démontrer que 0 est racine de P.

c) On note m la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible, puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

II – Exemples de sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2016 – Maths 2)

II-1) Montrer que la matrice $D=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

II-2) Montrer que la matrice $B=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$, vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, est quasi-nilpotente.

II-3) Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II-4) Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

II-5) Montrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que :

$$\dim \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})=\frac{n(n-1)}{2}.$$

II-6) Soit $A\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX=0$.

II-7) En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II-8) Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\left\{PMP^{-1}\setminus M\in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})\right\}.$$

Indication : On pourra commencer par étudier le cas où $n=2$, en utilisant, par exemple, la matrice D introduite à la question 1.

III – D'autres résultats sur les endomorphismes nilpotents d'un espace réel (Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2020 – Maths 1)

Dans cette partie, on fixe un espace vectoriel réel *E* de dimension $n>0$.

Soit *u* un endomorphisme nilpotent de *E*. On choisit une matrice carrée $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant l'endomorphisme *u*.

III-1) Démontrer que *M* est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure. Etablir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, puis en déduire que $tr(u^k)=0$ pour tout entier $k>0$.

On fixe une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de *E*.

On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de *E* dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

III-2) Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ un élément nilpotent d'indice de nilpotence *n*.

Indication : On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_1)=0$ et $u(e_k)=e_{k-1}$ pour tout $k\in[\![2,n]\!]$.

III-3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers p et q tels que $p \geq q \geq 1$, $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$.

Montrer que la famille $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre, et que si $\left(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y)\right)$ est libre alors $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y)\right)$ est libre.

III-4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent, d'indice de nilpotence p. Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq \max(2, n-1)$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \ker u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

IV – Dimension maximale d'un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (Extrait adapté de : Mines-Ponts – PSI – 2016 – Maths 2)

Dans cette partie, on se propose d'établir le résultat suivant.

Théorème : Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2} \qquad \textbf{(QN)}$$

A. Cas réel

IV-A-1) Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Indication : On admettra ici que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

IV-A-2) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Indication : Que dire de la somme de V et $S_n(\mathbb{R})$?

B. Cas général

La clé pour démontrer l'inégalité (**QN**) dans le cas général réside dans le lemme suivant, admis ici (*NB : La preuve de ce lemme constituait une grosse partie du sujet originel*).

Définition 1 : *Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1,n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la $j^{\text{ième}}$.*

Lemme (Lemme des colonnes) : Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.

On va ici prouver l'inégalité (**QN**) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose l'inégalité (**QN**) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, on notera $K(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des applications $K : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires. On introduit en outre le sous-espace vectoriel :

$$W = \{M \in V \setminus L(M) = 0\} = V \cap \ker L .$$

IV-B-1) Dans cette question, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

a) Montrer que :

$$\dim V \leq \dim K(W) + n - 1$$

b) En déduire que :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2} .$$

IV-B-2) On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$. Démontrer que :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2} .$$

Fin de l'énoncé