Corrigé du DM n° 5

Exercice 1

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_n=\sigma_n-\sigma_{n-1}$ avec $\sigma_0=a_0=0$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k-\sigma_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}\sigma_kb_k-\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k-1}b_k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sigma_kb_k-\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_kb_{k+1}=\sigma_nb_n+\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k\left(b_k-b_{k+1}\right)$$

Or, $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée , donc il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\sigma_n|\le M$, donc :

$$\left|\sigma_n\left(b_n-b_{n+1}\right)\right|\le M\left|b_n-b_{n+1}\right|.$$

Comme $\sum|b_n-b_{n+1}|$ converge, par comparaison, la série $\sum\sigma_n\left(b_n-b_{n+1}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Comme $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$, la suite $(b_n\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Ainsi, $\sum\sigma_n\left(b_n-b_{n+1}\right)$ et $(b_n\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, donc :

$$\boxed{\sum a_nb_n \text{ converge.}}$$

b) Comme ci-dessus, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge 2$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_kb_k=\sigma_nb_n+\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k\left(b_k-b_{k+1}\right)=\sigma_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k\left(b_k-b_{k+1}\right)=\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}b_n\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sigma_k}{\sqrt{k}}\sqrt{k}\left(b_k-b_{k+1}\right).$$

La suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\sqrt{n}\,b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}b_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et on prouve comme plus haut que la série $\sum\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\left(b_n-b_{n+1}\right)$ converge et ainsi :

$$\boxed{\sum a_nb_n \text{ converge.}}$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $z\in\mathbb{C}$, on a $\left|\dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n\right|=\dfrac{|z|^n}{n}$ et la suite $\left(\dfrac{|z|^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si $|z|\le 1$. Donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n \text{ est } R=1.}$$

Soit maintenant $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq 4$, si $p=\lfloor\sqrt{n}\rfloor\geq 2$, on a :

$$p\leq\sqrt{n}<p+1 \quad\Leftrightarrow\quad p^2\leq n<(p+1)^2 .$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1}(-1)^{\lfloor\sqrt{j}\rfloor}z^j+\sum_{k=p^2}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k=\sum_{k=1}^{p-1}\left((-1)^k\sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1}z^j\right)+(-1)^p\sum_{k=p^2}^{n}z^k .$$

- Pour $z=1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\left((k+1)^2-k^2\right)+(-1)^p\left(n-p^2+1\right)=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\left(2k+1\right)+(-1)^p\left(n-p^2+1\right).$$

La fonction polynomiale $z\mapsto\sum_{k=1}^{p-1}z^{2k+1}$ est dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée $z\mapsto\sum_{k=1}^{p-1}(2k+1)z^{2k}$.

Or, sur $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, on a $\sum_{k=1}^{p-1}z^{2k+1}=z\sum_{k=1}^{p-1}(z^2)^k=z\dfrac{1-(z^2)^{p-1}}{1-z^2}$ et en dérivant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p-1}(2k+1)z^{2k}=2\frac{z^2+(p-2)(z^2)^p-(p-1)(z^2)^{p-1}}{(1-z^2)^2}+\frac{1-(z^2)^{p-1}}{1-z^2}.$$

En évaluant en *i*, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\left(2k+1\right)=\frac{-1-(p-1)(-1)^{p-1}+(p-2)(-1)^p}{2}+\frac{1-(-1)^{p-1}}{2}=(-1)^p(p-1) .$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^p(p-1)+(-1)^p\left(n-p^2+1\right)=(-1)^p\left(n-p^2+p\right).$$

Or, $p^2\leq n<(p+1)^2=p^2+2p+1$, donc $p^2\leq n\leq p^2+2p$ et :

$$p\leq n-p^2+p\leq 3p .$$

Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|=\left|n-p^2+p\right|\leq 3p\leq 3\sqrt{n} .$$

Et donc :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|\leq 3 .$$

- Pour $z\neq 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k=\sum_{k=1}^{p-1}\left((-1)^k z^{k^2}\,\frac{z^{(k+1)^2-k^2}-1}{z-1}\right)+(-1)^p z^{p^2}\,\frac{z^{n-p^2+1}-1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\left(z^{(k+1)^2}-z^{k^2}\right)+(-1)^p\left(z^{n+1}-z^{p^2}\right)\right]$$

Et :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k\right|\leq\frac{1}{|z-1|}\left[\sum_{k=1}^{p-1}\left|(-1)^k\left(z^{(k+1)^2}-z^{k^2}\right)\right|+\left|(-1)^p\left(z^{n+1}-z^{p^2}\right)\right|\right]$$
$$\leq\frac{1}{|z-1|}\left[\sum_{k=1}^{p-1}\left(|z|^{(k+1)^2}+|z|^{k^2}\right)+|z|^{n+1}+|z|^{p^2}\right]$$

Comme $|z|=1$, on obtient :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k\right|\leq\frac{1}{|z-1|}\left[\sum_{k=1}^{p-1}2+2\right]=\frac{2p}{|z-1|}\leq\frac{2\sqrt{n}}{|z-1|}.$$

Et donc :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}z^k\right|\leq\frac{2}{|z-1|}.$$

Ainsi, si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n=(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}z^n$ et $a_0=0$, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans les deux cas ($z=1$ et $z\neq1$).

Par ailleurs, si on pose $b_0=0$ et $b_n=\frac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n}\,|b_n-b_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$, donc la série $\sum\sqrt{n}\,|b_n-b_{n+1}|$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Alors, d'après la question 1) b), on peut alors conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z|=1\text{, la série } \sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n \text{ converge.}}$$

Par contre, avec toujours $|z|=1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n\right|=\frac{1}{n}|z|^n=\frac{1}{n}$ et comme la série harmonique diverge :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n \text{ ne converge absolument convergente en aucun point de module 1.}}$$

Exercice 2

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n!)^2}\neq 0$ et :

$$\left|\frac{\dfrac{1}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{1}{(n!)^2}}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'après le règle de d'Alembert appliquée aux séries entières :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum\frac{x^n}{(n!)^2} \text{ est infini.}}$$

2) Soit un réel $x>0$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\exp\left(2\sqrt{x}\sin t\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\sin t\right)^n.$$

Posons $f_n(t)=\dfrac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\sin t\right)^n$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$|f_n(t)|=\frac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\right)^n|\sin^n t|\leq\frac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\right)^n.$$

La série $\sum\dfrac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\right)^n$ converge (de somme $\exp\left(2\sqrt{x}\right)$), donc par hypothèse de domination, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$I(x)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp\left(2\sqrt{x}\sin t\right)dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f_n(t)\,dt$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\sin t\right)^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(2\sqrt{x}\right)^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^n t\,dt$$

Remarquons que si *n* est impair, la fonction $t\mapsto\sin^n t$ est impaire sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^n t\,dt=0$ et :

$$I(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(2\sqrt{x}\right)^{2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt$$

En posant $I_n=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$I(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{(2n)!}I_n x^n$$

Les fonctions $t \mapsto \sin^{2n+1} t$ et $t \mapsto \cos t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2n+2} t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \sin^{2n+1} t\, dt \\
&= \left[-\cos t \sin^{2n+1} t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\cos t)\left((2n+1)\cos t \sin^{2n} t\right) dt \\
&= (2n+1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{2n} t\, dt \\
&= (2n+1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^{2n} t\, dt
\end{aligned}$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$ et donc :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n .$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^{2n} t$ est continue, positive et non nulle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $I_n > 0$ et on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+2} .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{I_n}{I_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} .$$

Soit $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_0$ qui reste vrai pour $n = 0$. Avec $I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \pi .$$

Ainsi :

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \pi x^n = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} .$$

Soit pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} I(x)}$$

Exercice 3

1) La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,-2[$ et $]2,+\infty[$.

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions (φ et $x\mapsto x^n$) et est nulle sur $]-\infty,-2[$ et $]2,+\infty[$. Alors, les fonctions $\varphi_n, \varphi'_n, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, et sont toutes nulles sur $]-\infty,-2[$ et $]2,+\infty[$.

Enfin, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi_n^{(k)}$ est continue sur le segment $[-2,2]$, donc y est bornées. Ainsi, $\varphi_n^{(k)}$ est nulle sur $]-\infty,-2[$ et $]2,+\infty[$, et bornées sur $[-2,2]$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\varphi_n, \varphi'_n, \dots, \varphi_n^{(n-1)} \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}.}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, on considère $M_n\geq 0$ tel que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\varphi_n^{(k)}(x)\right|\leq M_n$ et on introduit une suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n\geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$ et la série $\sum\frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}$ converge.

2) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto a_n x^n\varphi(\lambda_n x)=\frac{a_n}{\lambda_n^n}\varphi_n(\lambda_n x)$ ($\lambda_n\neq 0$ car $\lambda_n\geq 1$).

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car φ_n l'est et pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{a_n}{\lambda_n^n}\lambda_n^k\varphi_n^{(k)}(\lambda_n x).$$

- Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>k$, on a $n-k\geq 1$, donc $\lambda_n^{n-k}\geq\lambda_n$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right|=\frac{|a_n|}{\lambda_n^{n-k}}\left|\varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)\right|\leq\frac{|a_n|}{\lambda_n}M_n.$$

  Donc, $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty\leq\frac{|a_n|}{\lambda_n}M_n$ (la norme infinie est prise sur $\mathbb{R}$). Comme la série $\sum\frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}$ converge, la série $\sum\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ converge aussi. Ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{f : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\varphi(\lambda_n x) \text{ est définie, de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^{n-k}}\varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)$, donc :

$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^{n-k}}\varphi_n^{(k)}(0).$$

Remarquons que pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(x) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$:

$$\varphi_n(x) = x^n \varphi(x) = x^n .$$

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{quand } k \leq n \\ 0 & \text{quand } k > n \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{quand } k \neq n \\ n! & \text{quand } k \leq n \end{cases}$$

On a donc :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{n-k}} \varphi_n^{(k)}(0) = \frac{a_k}{\lambda_k^{k-k}} \varphi_k^{(k)}(0) = a_k k!$$

Et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k}$$