Corrigé du DM n° 6

III. A - Préliminaires

III.A.1) Soit une matrice de Hankel, $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j}=a_{i+j-2}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_{2n-2})\in\mathbb{R}^{2n-1}$.

On a, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$m_{j,i}=a_{j+i-2}=a_{i+j-2}=m_{i,j}\,.$$

Donc, *M* est une matrice symétrique réelle : elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi :

M admet *n* valeurs propres réelles (que l'on peut donc classer par ordre décroissant).

III.A.1) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Supposons que $(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)\in\mathbb{R}^n$ soit le *n*-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, comme M est diagonalisable, *M* est semblable à $diag(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)=\lambda I_n$. Or, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n, donc $M=\lambda I_n$.

Comme $n\geq 3$, et *M* est une matrice de Hankel, on a $m_{3,1}=m_{2,2}$ car $3+1-2=2+2-2$. Or, avec $M=\lambda I_n$, on a $m_{3,1}=0$ et $m_{2,2}=\lambda\neq 0$. Nous aboutissons donc à une contradiction et ainsi :

Le *n*-uplet $(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)$ n'est pas le *n*-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille *n*.

III. B - Une première condition nécessaire

III.B.1) Si $M=(m_{i,j})$, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $m_{i,i}=a_{2i-2}$, donc :

$$Tr(M)=\sum_{i=1}^{n}m_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}a_{2i-2}=\sum_{i=1}^{n}a_{2(i-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}\,.$$

Or, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres (distinctes ou pas) de *M*, donc :

$$Tr(M)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}}$$

Comme *M* est diagonalisable, elle est semblable à $diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Alors, M^2 est semblable à $diag(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\dots,\lambda_n^2)$ et donc :

$$Tr(M^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,.$$

Or, $M^2=\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j}\right)_{i,j}$, donc :

$$Tr(M^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i+k-2}a_{k+i-2}=\sum_{1\le i,j\le n} a_{i+j-2}^2 .$$

Si on pose $k=i+j-2$, on a $0\le k\le 2n-2$, $j=k-i+2$ et :

$$\begin{cases}1\le i\le n\\ 1\le j\le n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le i\le n\\ 1\le k-i+2\le n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le i\le n\\ k-n+2\le i\le k+1\end{cases} \Leftrightarrow \max(1,k-n+2)\le i\le \min(n,k+1).$$

Et :

$$Tr(M^2)=\sum_{k=0}^{2n-2}\left(\sum_{i=\max(1,k-n+2)}^{\min(n,k+1)} a_k^2\right)=\sum_{k=0}^{2n-2}\left(\min(n,k+1)-\max(1,k-n+2)+1\right)a_k^2 .$$

- Si $0\le k\le n-1$, alors $\max(1,k-n+2)=1$ et $\min(n,k+1)=k+1$, donc :

$$\min(n,k+1)-\max(1,k-n+2)+1=k+1.$$

- Si $n\le k\le 2n-2$, alors $\max(1,k-n+2)=k-n+2$ et $\min(n,k+1)=n$, donc :

$$\min(n,k+1)-\max(1,k-n+2)+1=2n-k-1.$$

Alors :

$$Tr(M^2)=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2 .$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2}$$

III.B.2) On a :

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle&=\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=\sum_{i=1}^{p}v_iw_i+\sum_{i=p+1}^{n}v_iw_i\\&=\sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{2i-1}\,a_{2(i-1)}\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\right)+\sum_{i=p+1}^{n}\left(\sqrt{2n-2i+1}\,a_{2(i-1)}\frac{1}{\sqrt{2n-2i+1}}\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_{2(i-1)}+\sum_{i=p+1}^{n}a_{2(i-1)}=\sum_{i=1}^{n}a_{2(i-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}\end{aligned}$$

Et donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\|v\|^2&=\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{p}v_i^2+\sum_{i=p+1}^{n}v_i^2\\&=\sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{2i-1}\,a_{2(i-1)}\right)^2+\sum_{i=p+1}^{n}\left(\sqrt{2n-2i+1}\,a_{2(i-1)}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{p}(2i-1)\,a_{2(i-1)}^2+\sum_{i=p+1}^{n}(2n-2i+1)\,a_{2(i-1)}^2\end{aligned}$$

En posant $k = 2i - 2$, on obtient :

$$\|v\|^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2p-2} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2 \,.$$

Et $p = E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, donc :s

$$2p - 2 \le n - 1 \text{ et } 2p \ge n \,.$$

Comme tous les termes des sommes en jeu sont positifs, on obtient :

$$\|v\|^2 \le \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n-1} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ pair}}}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2 \le \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2 \,.$$

Avec la question précédente, on obtient bien :

$$\boxed{\|v\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

III.B.3) Comme les indices i et j sont muets, on peut écrire :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{1 \le j < i \le n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 = \sum_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \,.$$

Alors avec $\displaystyle\sum_{1 \le i \le n} (\lambda_i - \lambda_i)^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 + \sum_{1 \le i \le n} (\lambda_i - \lambda_i)^2 + \sum_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{1 \le i, j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{1 \le i, j \le n} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2) \\
&= \sum_{1 \le i, j \le n} \lambda_i^2 + \sum_{1 \le i, j \le n} \lambda_j^2 - 2 \sum_{1 \le i, j \le n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} n \lambda_i^2 + n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) \\
&= 2 \left[n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Comme $\langle v, w \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

On a $\langle v, w \rangle^2 \le \|v\|^2 \|w\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz) et $\|v\|^2 \le \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ (question précédente).

Alors, $\langle v, w \rangle^2 \le \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) \|w\|^2$ et :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - \langle v, w \rangle^2 \ge n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) \|w\|^2 = \left(n - \|w\|^2 \right) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \,.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \ge K_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}$$

III.B.3) Si $n=3$, on a d'une part :

$$\sum_{1\le i<j\le 3}(\lambda_i-\lambda_j)^2=(\lambda_1-\lambda_2)^2+(\lambda_1-\lambda_3)^2+(\lambda_2-\lambda_3)^2=2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\right).$$

Et d'autre part $p=E\left(\dfrac{3+1}{2}\right)=2$ et :

$$K_3=3-\|w\|^2=3-\left[w_1^2+w_2^2+w_3^2\right]=3-\left[1+\frac{1}{3}+1\right]=\frac{2}{3}.$$

Donc la condition (III.1) se récrit :

$$2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\right)\ge\frac{2}{3}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right).$$

Soit :

$$\boxed{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\ge 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)}$$

III.C - D'autres conditions nécessaires

III.C.1) On a $p=E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$. Considérons deux cas.

- Si n est impair, $n=2p-1$. On a :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & 0\\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & 0 & -2 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \chi_B=\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & 0\\ \vdots & \ddots & X & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & 0 & X+2 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & X & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X\end{vmatrix}_{2p-1}$$

  En développant par rapport à toutes les colonnes sauf la première et la dernière, on obtient :

$$\chi_B=X^{2p-4}(X+2)\begin{vmatrix} X & -1\\ -1 & X\end{vmatrix}=X^{2p-4}(X+2)(X^2-1)=X^{n-3}(X+2)(X^2-1).$$

- Si n est pair, $n=2p$. On a :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & 0 & -2 & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\chi_B=\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & 0\\ 0 & \ddots & X & 0 & 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & 0 & X+2 & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & 0 & 0 & X & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X\end{vmatrix}_{2p}.$$

  En développant par rapport à la dernière colonne, on retrouve le déterminant précédent et donc :

$$\chi_B=X\left[X^{2p-4}(X+2)(X^2-1)\right]=X^{2p-3}(X+2)(X^2-1)=X^{n-3}(X+2)(X^2-1).$$

Les valeurs propres de B sont donc – 2, – 1, 0 et 1, et on a :

$$\boxed{Spo(B)=(1,0,\dots,0,-1,-2)}$$

III.C.2) Posons $BM = (c_{i,j})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} m_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k+i-2} = b_{i,1} a_{i-1} + b_{i,p} a_{p+i-2} + b_{i,2p-1} a_{2p+i-3}.$$

Avec la définition de *B*, on obtient :

$$c_{i,i} = \begin{cases} a_{2p-2} & \text{quand } i = 1 \\ -2a_{2p-2} & \text{quand } i = p \\ a_{2p-2} & \text{quand } i = 2p-1 \\ 0 & \text{quand } i \notin \{1, p, 2p-1\} \end{cases}$$

Et donc :

$$Tr(BM) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = a_{2p-2} - 2a_{2p-2} + a_{2p-2} = 0.$$

Par ailleurs, les spectres ordonnés des matrices *B* et *M* sont respectivement $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (1, 0, \dots, 0, -1, -2)$ (d'après la question précédente) et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_{n+1-i} = \beta_1 \lambda_{n+1-1} + \beta_{n-1} \lambda_{n+1-(n-1)} + \beta_n \lambda_{n+1-n} = \lambda_n - \lambda_2 - 2\lambda_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i = \beta_1 \lambda_1 + \beta_{n-1} \lambda_{n-1} + \beta_n \lambda_n = \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n$$

Comme *B* et *M* sont symétriques, on a alors, d'après la propriété admise :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_{n+1-i} \leq Tr(BM) \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n - \lambda_2 - 2\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geq 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geq 0 \end{array}}$$

III.D – Cas n = 3

III.D.1) On a :

$$\chi_M = \det\left(X I_3 - M\right) = \begin{vmatrix} X-a & -b & -c \\ -b & X-c & -b \\ -c & -b & X-a \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-a & -b & -c \\ -b & X-c & -b \\ -c-X+a & 0 & X-a+c \end{vmatrix}$$

$$= (X-a+c) \begin{vmatrix} X-a & -b & -c \\ -b & X-c & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} (X-a+c) \begin{vmatrix} X-a & -b & X-a-c \\ -b & X-c & -2b \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (X-a+c)(-1)^{3+1}(-1) \begin{vmatrix} -b & X-a-c \\ X-c & -2b \end{vmatrix} = -(X-a+c)\left[2b^2 - (X-a-c)(X-c)\right]$$

Soit :

$$\chi_M = (X-a+c)\left[(X-c)^2 - a(X-c) - 2b^2\right].$$

On a :

$$(X-c)^2-a(X-c)-2b^2=\left(X-c-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2+8b^2}{4}=\left(X-c-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2+8b^2}}{2}\right)\left(X-c-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+8b^2}}{2}\right).$$

Donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont } a-c,\ c+\frac{a-\sqrt{a^2+8b^2}}{2} \text{ et } c+\frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}.}$$

III.D.2) Posons $\alpha_1=a-c$, $\alpha_2=c+\dfrac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$ et $\alpha_3=c+\dfrac{a-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$

On a toujours $\alpha_2\geq\alpha_3$, donc il y a trois possibilités :

$$\begin{array}{ll}
(1) & \alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3 \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\\
(2) & \alpha_2\geq\alpha_1\geq\alpha_3 \Rightarrow (\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\\
(3) & \alpha_2\geq\alpha_3\geq\alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)
\end{array}$$

On a alors :

$$(1)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=\dfrac{\sqrt{a^2+8b^2}-8c-a}{2}\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\sqrt{a^2+8b^2}+2(a-c)\end{cases}$$

$$(2)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=\alpha_2-\alpha_1-2\alpha_3=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{a^2+8b^2}-a\right)\geq 0\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=2\alpha_2+\alpha_1-\alpha_3=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{a^2+8b^2}+a\right)\geq 0\end{cases}$$

$$(3)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_1=\sqrt{a^2+8b^2}-2(a-c)\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=2\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1=\dfrac{\sqrt{a^2+8b^2}+8c+a}{2}\end{cases}$$

La situation (2) répond toujours aux conditions souhaitées et, dans ce cas, on a :

$$\begin{cases}\alpha_1=\lambda_2\\ \alpha_2=\lambda_1\\ \alpha_3=\lambda_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=\lambda_2\\ c+\dfrac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}=\lambda_1\\ c+\dfrac{a-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}=\lambda_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=\lambda_2\\ 2c+a=\lambda_1+\lambda_3\\ \sqrt{a^2+8b^2}=\lambda_1-\lambda_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\dfrac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\\ 8b^2=(\lambda_1-\lambda_3)^2-\dfrac{1}{9}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2\end{cases}$$

La dernière équation donne $8b^2=\dfrac{4}{9}(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)$ et comme on prend $b\geq 0$, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\dfrac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\\ b=\dfrac{1}{6}\sqrt{2(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)}\end{cases}}$$

III.D.3) Rappelons que le problème est de trouver des conditions pour qu'un n-uplet ordonné de réels puisse être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

On a vu que la condition III.3 est une condition nécessaire en dimension n. Or, pour $n=3$, on vient de trouver une matrice de Hankel dont le spectre ordonné est fixé et remplit la condition III.3. Cette condition est donc suffisante.

Ainsi :

> Pour $n=3$, la condition III.3 est ***nécessaire et suffisante*** pour qu'un triplet ordonné de réels soit le triplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \geq 1$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, 1, 1)$ la condition III.1 est vérifiée, soit :

$$2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geq 0 \underset{\lambda \geq 1}{\Leftrightarrow} \lambda \geq \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

Supposons qu'il existe une matrice de Hankel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Spo(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, 1, 1)$.

La condition nécessaire III.3 doit alors être vérifiée, soit :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0 \end{cases} \underset{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, 1, 1)}{\Leftrightarrow} \lambda \geq 3.$$

Or, $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \approx 2{,}82$, donc si on prend $\lambda = 2{,}9$, le triplet $(\lambda, 1, 1)$ vérifie III.1, mais pas III.3, donc il n'existe pas de matrice de Hankel dont $(\lambda, 1, 1)$ est le triplet ordonné des valeurs propres.

Ainsi :

> Pour $n=3$, la condition III.1 est ***nécessaire mais non suffisante*** pour qu'un triplet ordonné de réels soit le triplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel.