Corrigé du DS n° 4

Problème I

Parties 1 : Quelques exemples d'utilisation de cette formule

1°) On a pour tout $\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

On remarque que l'expression ci-dessus vaut 1 en 0, et comme $f(0)=1$, la formule ci-dessus reste valable en $x=0$. Ainsi, $f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc *f* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Or, toute fonction développable en série entière est de classe C^∞ sur son intervalle de convergence, ici $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2°) Si on suppose que la fonction *f* recherchée est développable en série entière au voisinage de 0, alors on a (au voisinage de 0) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n.n!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\,g'(x).$$

avec $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Or, pour tout $x \in\,]-1,1[$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, donc $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et :

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Réciproquement, la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} - \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(0) = (n+1)! - n! = \big[(n+1)-1\big]n! = n.n!.$$

Ainsi :

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2} \text{ de classe } C^\infty \text{ au voisinage de 0 et vérifie pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = n.n!}$$

3°) (a) Comme *f* est développable en série entière sur $]-R,R[$, on a $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pour tout $x\in\,]-R,R[$ et la série converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R,R[$.

Comme $R>1$ ou $R=+\infty$, on a $[0,1]\subset\,]-R,R[\;]-R,R[$ et donc, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$.

De plus, *f* est continue (et même de classe C^∞) sur $]-R,R[$, donc sur le segment $[0,1]$ et donc y $|f|$ admet un maximum $M\geq 0$ sur ce segment.

Alors, pour tout $x\in[0,1]$:

$$\left|f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right|\leq M\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right|.$$

Et comme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$:

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0}f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

(b) Comme la série $\sum_{n\geq 0}f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$, on peut écrire :

$$\int_0^1\left[\sum_{n\geq 0}f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]dx=\sum_{n\geq 0}\int_0^1 f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n dx.$$

Or, d'une part :

$$\int_0^1\left[\sum_{n\geq 0}f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]dx=\int_0^1 f(x)\left[\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]dx=\int_0^1 f(x)\left[f(x)\right]dx=\int_0^1\left(f(x)\right)^2 dx.$$

Et d'autre part :

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^1 f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n dx=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_0^1 x^n f(x)dx=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\times 0=0.$$

Ainsi :

$$\int_0^1\left(f(x)\right)^2 dx=0.$$

Or, f^2 est continue (car *f* l'est) et positive sur $[0,1]$, donc :

$$\int_0^1 f^2=0 \quad\Rightarrow\quad f^2=0 \text{ sur } [0,1] \quad\Rightarrow\quad f=0 \text{ sur } [0,1].$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle sur } [0,1].}$$

(c) On a vu que f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, donc en 0. Or, f est nulle sur $[0,1]$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est nulle sur $[0,1]$ et entre autres, $f^{(n)}(0)=0$. Alors, pour tout $x\in\,]-R,R[$:

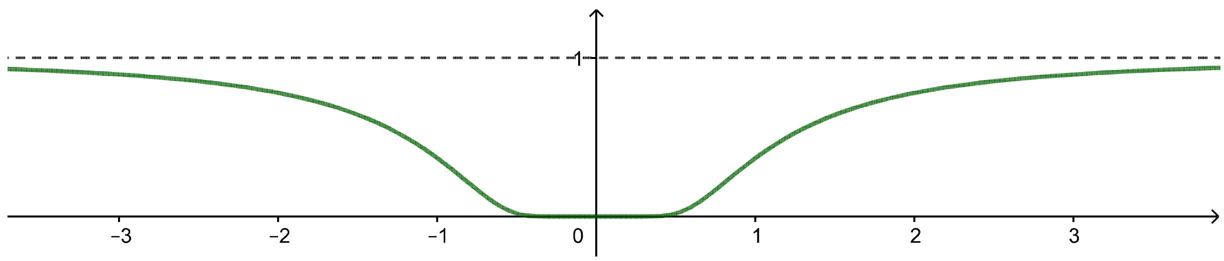
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle sur }]-R,R[.}$$

Parties 2 : Un contre-exemple

4°) On a l'allure :



5°) La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ (C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et à images dans $\mathbb{R}$) par la fonction exponentielle (C^∞ sur $\mathbb{R}$).

Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Pour $n=0$, on a $f^{(0)}:x\mapsto\dfrac{P_0(x)}{x^0}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec $P_0=1$. La propriété est donc vraie.

Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$. Alors, il existe $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)&=\frac{x^{3n}P_n'(x)-3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{x^3P_n'(x)+(2-3nx^2)P_n(x)}{x^{3(n+1)}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

En posant $P_{n+1}=(2-3nX^2)P_n+X^3P_n'$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ avec } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ et } P_{n+1} = (2-3nX^2)P_n + X^3 P_n'.}$$

6°) On a $P_0 = 1$ et la relation $P_{n+1} = (2-3nX^2)P_n + X^3 P_n'$. On obtient :

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \\ P_2 &= -6X^2 + 4 \\ P_3 &= 24X^4 - 36X^2 + 8 \\ P_4 &= -120X^6 + 300X^4 - 144X^2 + 16 \end{aligned}$$

On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est de degré $2(n-1)$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}(n+1)!$

Prouvons cela par récurrence.

- On a $P_1 = 2$, donc $\deg P_1 = 0 = 2(1-1)$ et le coefficient dominant de P_n est $2 = (-1)^{1+1}(1+1)!$

  La propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

  On a alors $P_n = (-1)^{n+1}(n+1)!X^{2(n-1)} + Q_n$ avec $\deg Q_n < 2(n-1)$ et, si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (2-3nX^2)P_n + X^3 P_n' \\ &= (2-3nX^2)\left[(-1)^{n+1}(n+1)!X^{2(n-1)} + Q_n\right] + X^3\left[(-1)^{n+1}(n+1)!2(n-1)X^{2(n-1)-1} + Q_n'\right] \\ &= -(n+2)(-1)^{n+1}(n+1)!X^{2n} + 2(-1)^{n+1}(n+1)!X^{2(n-1)} + (2-3nX^2)Q_n + X^3 Q_n' \\ &= (-1)^{n+2}(n+2)!X^{2(n+1-1)} + Q_{n+1} \end{aligned}$$

  avec $Q_{n+1} = 2(-1)^{n+1}(n+1)!X^{2(n-1)} + (2-3nX^2)Q_n + X^3 Q_n'$ et $\deg Q_{n+1} < 2n$.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{P_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ est de degré } 2(n-1) \text{ et de coefficient dominant } (-1)^{n+1}(n+1)!}$$

7°) Remarquons que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = 0 = f(0).$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^n P_n(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{2n} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x^n P_n(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{2n} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to +\infty} X^{2n}e^{-X} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Ainsi, *f* est continue en 0 et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, donc *f* est de classe C^∞ en 0 avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Comme *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, on a finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0.}$$

8°) La fonction *f* est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R>1$ ou $R=+\infty$, alors pour tout $x\in\ ]-R,R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Avec le résultat de la question précédente, ceci implique que pour tout $x\in\ ]-R,R[$, $f(x)=0$. Ceci est faux, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas développable en série entière sur }]-R,R[\text{ avec } R>1 \text{ ou } R=+\infty.}$$

<u>Parties 3 : Une condition suffisante</u>

9°) Comme *f* est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre entre 0 et tout *x* de $]-R,R[$. Ceci donne pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Alors :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \frac{1}{n!}\left|\int_0^x |x-t|^n \left|f^{(n+1)}(t)\right| dt\right| \le \frac{M}{n!}\left|\int_0^x |x-t|^n\,dt\right|.$$

Et, pour tout $x\in\ ]-R,R[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|\int_0^x |x-t|^n\,dt\right| = \dfrac{1}{n+1}|x|^{n+1}$, donc :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0$ (car quel que soit le réel *x*, $|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\big((n+1)!\big)$).

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)$.

Et ainsi, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière sur }]-R,R[.}$$

10°) Il suffit de prendre une fonction constante sur $\mathbb{R}$, ou bien la fonction exponentielle sur $]-R,R[$ avec $R \in \mathbb{R}_+^*$ (on a alors $M = e^R$).

Problème II

Matrices stochastiques et bistochastiques

Partie I

Dans tout ce qui suit, on notera $X_1, \dots, X_n$ les coordonnées d'un vecteur X et $A_{i,j}$ les coefficients d'une matrice A.

Remarquons aussi que si A est une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$0 \le A_{i,j} \le \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = 1 .$$

1) Notons U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1.

Si $A = (A_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, on a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(AU)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$, donc $AU = U$ et comme U est non nul, cela permet de conclure que :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A .}$$

2) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j$, donc :

$$|(Ax)_i| \le \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} |x_j| \le \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \|x\|_\infty = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \right) \|x\|_\infty = \|x\|_\infty .$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|(Ax)_i| \le \|x\|_\infty$, d'où :

$$\boxed{\|Ax\|_\infty \le \|x\|_\infty}$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a

$$\|Ax\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty \le \|x\|_\infty .$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x\|_\infty > 0$ et donc :

$$\boxed{|\lambda| \le 1}$$

4) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Tout vecteur colinéaire à z est encore un vecteur propre associé à λ, y compris $x = \dfrac{1}{\|z\|_\infty} z$.

Comme $\|x\|_\infty = 1$:

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur propre } x \in \mathbb{C}^n \text{ associé à } \lambda \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1.}$$

Comme $\|x\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = 1$, il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_p| = 1$. On a alors :

$$(Ax)_p = \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j = \lambda x_p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{p,j} x_j = \lambda x_p - a_{p,p} x_p = (\lambda - a_{p,p}) x_p .$$

Et :

$$|\lambda - a_{p,p}| = |\lambda - a_{p,p}||x_p| = |(\lambda - a_{p,p}) x_p| = \left| \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{p,j} x_j \right| .$$

Avec l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\lambda - a_{p,p}| \le \sum_{j=1, j\neq p}^{n} |a_{p,j} x_j| = \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{p,j} |x_j| \le \left(\sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{p,j} \right) \|x\|_\infty = \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{p,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} - a_{p,p} = 1 - a_{p,p} .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{|\lambda - a_{p,p}| \le 1 - a_{p,p}}$$

5) On vérifie que $A = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est effectivement stochastique.

D'après ce qui précède, pour tout $\lambda \in Sp(A)$ (où $Sp(A)$ désigne le spectre complexe de A), il existe $p \in \{1, 2, 3\}$ tel que $|\lambda - a_{p,p}| \le 1 - a_{p,p}$, donc :

$$|\lambda - a_{1,1}| \le 1 - a_{1,1} \quad \text{ou} \quad |\lambda - a_{2,2}| \le 1 - a_{2,2} \quad \text{ou} \quad |\lambda - a_{3,3}| \le 1 - a_{3,3} .$$

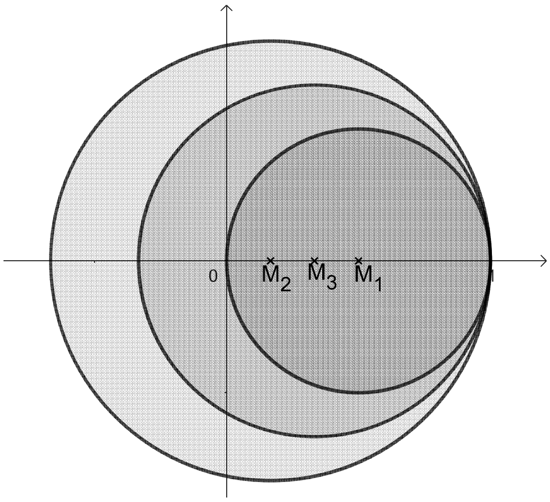
Soit :

$$\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \left|\lambda - \frac{1}{6}\right| \le \frac{5}{6} \quad \text{ou} \quad \left|\lambda - \frac{1}{3}\right| \le \frac{2}{3} .$$

Ainsi, si M_1, M_2 et M_3 sont les points du plan complexe d'affixes respectives $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$:

Les points d'affixe $\lambda \in Sp(A)$ sont contenus dans $\bar{D}_1\left(M_1, \frac{1}{2}\right) \cup \bar{D}_2\left(M_2, \frac{5}{6}\right) \cup \bar{D}_3\left(M_3, \frac{2}{3}\right)$.

On a le schéma :



6) $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de B' et il existe un entier $q \in [\![1, n-1]\!]$ tel que :

$$\left|\lambda - (a_{q,q} - 1)\right| \leq 1 - a_{q,q} - a_{q,n} .$$

Si $\lambda = 0$, on obtient :

$$1 - a_{q,q} = \left|(a_{q,q} - 1)\right| \leq 1 - a_{q,q} - a_{q,n} .$$

On obtient $a_{q,n} \leq 0$, ce qui est absurde car A est strictement positive.

Ainsi, $\lambda \neq 0$, soit $0 \notin Sp(B')$ et donc :

B' est inversible.

Notons $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}$ les colonnes de B' et $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ celles de $B = A - I_n$.

On a pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} C'_i \\ B_{n,j} \end{pmatrix}$.

Comme $1 \in Sp(A)$, on a $\dim\ker\left(A - I_n\right) \geq 1$.

Supposons que $\dim\ker\left(A - I_n\right) = \dim\ker B \geq 2$.

Alors , d'après le théorème du rang, $rg(B) \leq n-2$, ce qui implique que la famille $\left(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right)$ est liée.

Il existe alors $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et :

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1} = 0_{n,1}.$$

Alors :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} C'_1 \\ B_{n,1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} C'_2 \\ B_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} C'_{n-1} \\ B_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 C'_1 + \alpha_2 C'_2 + \dots + \alpha_{n-1} C'_{n-1} \\ \alpha_1 B_{n,1} + \alpha_2 B_{n,2} + \dots + \alpha_{n-1} B_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\alpha_1 C'_1 + \alpha_2 C'_2 + \dots + \alpha_{n-1} C'_{n-1} = 0_{n-1,1}$ et les colonnes de B' sont liées, ce qui contredit le fait que B' est inversible. Ainsi, $\dim\ker(A - I_n) \geq 2$ est absurde, donc $\dim\ker(A - I_n) < 2$ et finalement :

$$\boxed{\dim\ker(A - I_n) = 1}$$

7) On a $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc χ_N, le polynôme caractéristique de N, est scindé et N admet au moins une valeur propre.

Or, comme N est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$. Ainsi, X^p est un polynôme annulateur de N, donc $Sp(N)$, le spectre complexe de N, est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, soit $\{0\}$. Comme $Sp(N)$ est non vide, on a $Sp(N) = \{0\}$, autrement dit, 0 est l'unique valeur propre de N.

Or, χ_N est scindé, unitaire et de degré *n*. Comme il n'admet que 0 pour racine, on a $\chi_N = X^n$ et le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure que :

$$\boxed{N^n = 0_n}$$

8) On a :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{0!}{k^0} \binom{k}{0} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1!}{k^1} \binom{k}{1} = \lim_{k \to +\infty} 1 = 1.$$

Et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et tout entier $k \geq p$:

$$\frac{p!}{k^p} \binom{k}{p} = \frac{p!}{k^p} \frac{k!}{(k-p)!\,p!} = \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{k^p} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\dots\left(1 - \frac{p-1}{k}\right).$$

Comme pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{i}{k}\right) = 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{p!}{k^p} \binom{k}{p} = 1$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{k}{p} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}}$$

Alors, $\binom{k}{p}\lambda^{k-p} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p!}k^p\lambda^{k-p}$ et par croissances comparées (avec $|\lambda|<1$), on obtient :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}=0}$$

9) Soit un entier $k\geq n$.

Comme λI_n et N commutent, on peut écrire avec la formule de=u binôme de Newton :

$$(\lambda I_n+N)^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}N^p.$$

Or, $N^n=0_n$, donc pour tout entier $p\geq n$, $N^p=0_n$ et ainsi :

$$(\lambda I_n+N)^k=\sum_{p=0}^{n-1}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}N^p.$$

Et d'après la question précédente, $\lim\limits_{k\to+\infty}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}N^p=0_n$ pour tout $p\in[\![0,n-1]\!]$.

Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}N^p=0_n$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La suite } \left((\lambda I_n+N)^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$$

10) D'après le résultat admis, il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$, $p_1,\dots,p_r$ des entiers naturels non nuls et $N_1,\dots,N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes tels que :

$$A=PJP^{-1}$$

avec $J=diag\left(1,\lambda_1 I_{p_1}+N_1,\dots,\lambda_r I_{p_r}+N_r\right)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$A^k=(PJP^{-1})^k=PJ^kP^{-1}$$

avec $J^k=diag\left(1,(\lambda_1 I_{p_1}+N_1)^k,\dots,(\lambda_r I_{p_r}+N_r)^k\right)$.

D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda_j I_{p_j}+N_j)^k=0_{p_j}$ pour tout $j\in[\![1,r]\!]$, donc :

$$\lim_{k\to+\infty}J^k=J^k=diag\left(1,0,\dots,0\right)=E_{1,1}.$$

Comme l'application $M\mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=P\left(\lim\limits_{k\to+\infty}J^k\right)P^{-1}=PE_{1,1}P^{-1}$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Partie II

On a :

$$\mathcal{B}_n = \left\{ A=(A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+),\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1,\ \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1 \right\}$$

$$\mathcal{P}_n = \left\{ M_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \sigma \in S_n \right\}$$

où S_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même.

11) Soient $A, B \in \mathcal{B}_n$ avec $A=(A_{i,j})$ et $B=(B_{i,j})$, et $\lambda \in [0,1]$. On a :

- $\lambda \geq 0$, $1-\lambda \geq 0$ et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} \geq 0$ et $B_{i,j} \geq 0$, donc $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j} \geq 0$;
- pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \left[\lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j} \right] = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$;
- pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \left[\lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j} \right] = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$.

Ainsi, $\lambda A + (1-\lambda) B \in \mathcal{B}_n$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est convexe.}}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (A_{k,i,j})$ telle que $A_k \to A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i,j} \to A_{i,j}$ et :

- $A_{k,i,j} \geq 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = A_{i,j} \geq 0$;
- $\sum_{i=1}^{n} A_{k,i,j} = 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{k,i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lim\limits_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1$;
- $\sum_{j=1}^{n} A_{k,i,j} = 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{k,i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \lim\limits_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$.

Ainsi, $A \in \mathcal{B}_n$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est fermée.}}$$

Enfin, pour toute $A_k = (A_{k,i,j}) \in \mathcal{B}_n$, on a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} = 1$, donc $A_{i,j} \leq 1$.

Ainsi, $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} \left| A_{i,j} \right| = \max\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} A_{i,j} \leq 1$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est bornée.}}$$

Remarquons enfin que $0_n \notin \mathcal{B}_n$ (la somme des coefficients d'une ligne ne vaut pas 1), donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

12) On a $M_{id} = I_n \in \mathcal{P}_n$.

Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(M_\sigma M_{\sigma'})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M_\sigma)_{i,k} (M_{\sigma'})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} \delta_{\sigma'(j),\sigma'(j)} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma\circ\sigma'(j)} = (M_{\sigma\circ\sigma'})_{i,j}.$$

Donc :

$$M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'} \in \mathcal{P}_n.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est stable par produit.

Enfin, pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma^{-1} \in S_n$ et :

$$M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = M_{id} = I_n.$$

Donc M_σ est inversible avec $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{P}_n$.

Tout ceci prouve que :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}).}$$

On vient de prouver que pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$, $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}$.

Soit $\sigma \in S_n$. Prouvons par récurrence sur *k* que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_\sigma^k = M_{\sigma^k}$.

- On a $M_\sigma^0 = I_n = M_{id} = M_{\sigma^0}$, donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.
- Si la propriété est vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$, on a $M_{\sigma^{k+1}} = M_{\sigma\circ\sigma^k} = M_\sigma M_{\sigma^k}$ et par hypothèse de récurrence, on a $M_\sigma^k = M_{\sigma^k}$, donc $M_{\sigma^{k+1}} = M_\sigma M_\sigma^k = M_\sigma^{k+1}$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } \sigma \in S_n \text{ et tout } k \in \mathbb{N},\ M_\sigma^k = M_{\sigma^k}.}$$

13) Soit $\sigma \in S_n$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in S_n$ et S_n est fini, l'ensemble $\{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\}$, qui est une partie de S_n est fini. Ainsi, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 < k_2$ et $\sigma^{k_1} = \sigma^{k_2}$. On a alors :

$$\sigma^{k_2} (\sigma^{k_1})^{-1} = \sigma^{k_2} \sigma^{-k_1} = \sigma^{k_2 - k_1} = id.$$

Et ainsi, en posant $p = k_2 - k_1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\boxed{\text{Il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma^p = id.}$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$M_\sigma^p = M_{\sigma^p} = M_{id} = I_n .$$

Ainsi, pour tout $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^p - 1$ est annulateur de M_σ. Comme ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, M_σ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{P}_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

14) Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} N & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

On a $M \in \mathcal{P}_n$ car $M = M_\tau$ où $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ et $\tau(i) = i$ pour $i \geq 3$, et en posant $R = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \begin{pmatrix} R & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \notin \mathcal{P}_n .$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ n'est pas convexe.}}$$

15) Soit $\sigma \in S_n$ et $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. On a pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

- $(M_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (M_\sigma)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\sigma(j),\sigma(j)} = 1$;
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (M_\sigma)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i)} = 1$.

Donc, $M_\sigma \in \mathcal{B}_n$ et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n}$$

16) Soient des matrices $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$, $A, B \in \mathcal{B}_n$ avec $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$, et $\lambda \in \,]0,1[$ tels que $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$. Alors, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} .$$

Alors, si $i \neq \sigma(j)$, $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} = 0$ ce qui donne $\lambda A_{i,j} = (1-\lambda)B_{i,j} = 0$ car $\lambda A_{i,j} \geq 0$ et $(1-\lambda)B_{i,j} \geq 0$, soit $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ car $\lambda \neq 0$ et $1-\lambda \neq 0$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(j)\}$, donc $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = A_{\sigma(j),j} = 1$.

Alors, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} = (M_\sigma)_{i,j}$, soit $A = M_\sigma$.

On obtient de même $B = M_\sigma$ et donc si $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$ avec $\lambda \in]0,1[$, alors $A = B = M_\sigma$, donc :

$$\boxed{\text{Toute matrice } M_\sigma \text{ de } \mathcal{P}_n \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n.}$$

17) On a $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{B}_n$ avec $A \notin \mathcal{P}_n$.

Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A et $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (E_k est donc le vecteur colonne $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0, sauf le $k^{\text{ième}}$ qui vaut 1).

Comme $A \notin \mathcal{P}_n$, il existe une colonne de *A* qui n'est pas un vecteur E_k. Notons j_1 le plus petit indice *j* tel que la colonne C_j ne soit pas un vecteur E_k, soit :

$$j_1 = \min\left\{ j \in [\![1,n]\!] \setminus C_j \notin \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \right\}.$$

La colonne C_j ne contient alors aucun 1 (elle la somme de ses coefficients vaut 1), elle il existe $i_1 \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{i_1,j_1} \in]0,1[$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} A_{i_1,j} = 1$, il existe $j_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_1\}$ tel que $A_{i_1,j_2} \in]0,1[$.

Et comme $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j_2} = 1$, il existe $i_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_1\}$ tel que $A_{i_2,j_2} \in]0,1[$.

De nouveau, comme $\sum_{j=1}^{n} A_{i_2,j} = 1$, il existe $j_3 \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_2\}$ tel que $A_{i_2,j_3} \in]0,1[$.

Si $j_3 = j_1$ (schéma ci-dessous), alors on arrête le raisonnement en prenant $r = 2$.

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A_{i_2,j_1} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Si $j_3 \neq j_1$ (et $j_3 \neq j_2$), alors on recommence : comme $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j_3} = 1$, il existe $i_3 \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_2\}$ tel que $A_{i_3,j_3} \in]0,1[$.

Si $i_3 = i_1$ (schéma ci-dessous), alors on « oublie » A_{i_1,j_1}, on renumérote j_3 en j_1, on arrête le raisonnement en prenant $r = 2$.

$$\begin{pmatrix} & & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & A_{i_2,j_3} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & \cancel{A_{i_1,j_1}} & \rightarrow & A_{i_1,j_3} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & A_{i_2,j_1} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & \times & \rightarrow & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Si $i_3 \neq i_1$ et $i_3 \neq i_2$ (schéma ci-dessous), on recommence.

$$\begin{pmatrix} & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & A_{i_2,j_3} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & A_{i_1,j_3} & & & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

On construit donc deux familles $\{i_1, i_2, ...\}$ et $\{j_1, j_2, ...\}$ d'entiers compris entre 1 et n et distincts deux à deux (dans chaque famille). Comme le nombre de lignes et de colonnes possibles est fini, on arrive systématiquement au cas où $j_{r+1} = j_1$ (et on s'arrête), ou au cas où $i_{s+1} = i_1$ (et on laisse A_{i_1,j_1} et on renumérote les indices comme plus haut).

18) Remarquons que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 0$.

Soit $\mu = \min\left\{A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}}, k \in [\![1,r]\!]\right\}$. Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}} \in \,]0,1[$, on a $\mu \in \,]0,1[$.

Posons alors $M = A - \mu B$ et $N = A + \mu B$. On a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k} - \mu B_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} - \mu \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = 1 - \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{k,j} - \mu B_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} - \mu \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 1 - \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k} + \mu B_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = 1 + \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{k,j} + \mu B_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} + \mu \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 1 + \mu \times 0 = 1$$

$$M_{i,j} = A_{i,j} - \mu B_{i,j} = \begin{cases} A_{i_k,j_k} - \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i_k,j_{k+1}} + \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i,j} \geq 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$N_{i,j} = A_{i,j} + \mu B_{i,j} = \begin{cases} A_{i_k,j_k} + \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i_k,j_{k+1}} - \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i,j} \geq 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Ainsi, $M, N \in \mathcal{B}_n$.

De plus, $\mu \neq 0$ et $B \neq 0_n$, donc $M \neq A$ et $N \neq A$, et :

$$\frac{1}{2}M + \left(1 - \frac{1}{2}\right)N = \frac{1}{2}(M+N) = \frac{1}{2}(A - \mu B + A + \mu B) = A.$$

Ainsi, nous avons construit deux matrices M et N de $\mathcal{B}_n$, distinctes de A et telles que $\frac{1}{2}M + \left(1 - \frac{1}{2}\right)N = A$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{A \text{ n'est pas un élément extrémal de } \mathcal{B}_n.}$$

On a vu dans la question 8 que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$ et on vient de voir que toute matrice de $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{P}_n$ n'est pas extrémale dans $\mathcal{B}_n$, donc :

$$\boxed{\text{Les éléments extrémaux de } \mathcal{B}_n \text{ sont les matrices de } \mathcal{P}_n.}$$

<u>Partie III</u>

19) On a :

$$\begin{aligned}
b_1 \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n}\left((b_i - b_{i-1})\sum_{j=i}^{n} c_j\right) &= b_1 \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n}\left(b_i \sum_{j=i}^{n} c_j\right) - \sum_{i=2}^{n}\left(b_{i-1}\sum_{j=i}^{n} c_j\right) \\
&= b_1 \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n}\left(b_i \sum_{j=i}^{n} c_j\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\left(b_i \sum_{j=i+1}^{n} c_j\right) \quad \text{(en réindiçant)} \\
&= b_1 \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n}\left[b_i\left(\sum_{j=i}^{n} c_j - \sum_{j=i+1}^{n} c_j\right)\right] - b_1 \sum_{j=2}^{n} c_j \\
&= b_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i c_i
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{b_1 \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n}\left((b_i - b_{i-1})\sum_{j=i}^{n} c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i}$$

20) On a :

$$\begin{aligned}
C(M_r) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(y_j - x_i)^2 M_{i,j} \\
&= (y_1 - x_1)^2 M_{1,1} + (y_2 - x_1)^2 M_{1,2} + (y_1 - x_2)^2 M_{2,1} + (y_2 - x_2)^2 M_{2,2} \\
&= 1 - r + 4^2 r + 3^2(1-r)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{C(M_r)=10+6r}$$

Soit $M=(M_{i,j})_{1\le i,j\le 2}\in\mathcal{B}_2$. Posons $r=M_{1,2}\in[0,1]$. On a :

$$\begin{cases} M_{1,1}+M_{1,2}=1\\ M_{2,1}+M_{2,2}=1\\ M_{1,1}+M_{2,1}=1\\ M_{1,2}+M_{2,2}=1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} M_{1,1}=M_{2,2}=1-r\\ M_{1,2}=M_{2,1}=r\end{cases}$$

Ainsi, toutes les matrices de $\mathcal{B}_2$ sont de la forme $M_r=\begin{pmatrix}1-r & r\\ r & 1-r\end{pmatrix}$.

Or, $M_0=I_2$, et pour tout $r\in[0,1]$:

$$C(M_r)=10+6r\ge 10=C(M_0).$$

De plus :

$$C(M_r)=10 \quad\Leftrightarrow\quad 10+6r=10 \quad\Leftrightarrow\quad r=0 \quad\Leftrightarrow\quad M_r=M_0=I_2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice identité est l'unique matrice rendant minimale la quantité } C(M).}$$

21) Soit $\sigma\in S_n$. On a $\sigma(\llbracket 1,n\rrbracket)=\llbracket 1,n\rrbracket$, soit $\{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)\}=\{1,2,\dots,n\}$, donc :

$$\{y_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},\dots,y_{\sigma(n)}\}=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}.$$

Pour tout $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$, notons $I=\{j\in\llbracket i,n\rrbracket,\sigma(j)\in\llbracket i,n\rrbracket\}$.

On a $\sigma(I)\subset\llbracket i,n\rrbracket$ et, en notant $r=\mathrm{Card}\left(\llbracket i,n\rrbracket\setminus\sigma(I)\right)$, on peut alors poser (s'il y a lieu) :

$$\llbracket i,n\rrbracket\setminus\sigma(I)=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\}.$$

Comme $\sigma\left(\llbracket i,n\rrbracket\setminus I\right)\subset\llbracket 1,i-1\rrbracket$ et $y_1\le\dots\le y_{i-1}\le y_i\le\dots\le y_n$, on a pour tout $j\in\llbracket i,n\rrbracket\setminus I$, $y_{\sigma(j)}\le y_{\alpha_j}$ et :

$$\sum_{j=i}^{n}y_{\sigma(j)}=\sum_{j\in I}y_{\sigma(j)}+\sum_{j\in\llbracket i,n\rrbracket\setminus I}y_{\sigma(j)}\le\sum_{j\in I}y_{\sigma(j)}+\sum_{j\in\llbracket 1,r\rrbracket}y_{\alpha_j}=\sum_{k\in\sigma(I)}y_k+\sum_{k\in\llbracket i,n\rrbracket\setminus\sigma(I)}y_k=\sum_{k\in\llbracket i,n\rrbracket}y_k=\sum_{j=i}^{n}y_j .$$

Enfin, $\sigma\left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)=\llbracket 1,n\rrbracket$ donc :

$$\sum_{j=1}^{n}y_{\sigma(j)}=\sum_{k\in\sigma(\llbracket 1,n\rrbracket)}y_k=\sum_{k\in\llbracket 1,n\rrbracket}y_k=\sum_{j=1}^{n}y_j .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{j=i}^{n} y_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=i}^{n} y_j \text{ avec égalité pour } i=1.}$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\sigma(i)}-x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\sigma(i)}^2-2x_i y_{\sigma(i)}+x_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}+\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Comme plus haut, on a $\sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ et avec la question 19, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}=x_1\sum_{j=1}^{n} y_{\sigma(j)}+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n} y_{\sigma(j)}\right).$$

Comme $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$, on a $x_i-x_{i-1}\geq 0$ pour tout $i\in[\![2,n]\!]$ et d'après le résultat précédent, $\sum_{j=i}^{n} y_{\sigma(j)}\leq\sum_{j=i}^{n} y_j$ pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, donc avec $\sum_{j=1}^{n} y_{\sigma(j)}=\sum_{j=1}^{n} y_j$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}\leq x_1\sum_{j=1}^{n} y_j+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n} y_j\right).$$

Et encore avec la formule de la question 19, on a $x_1\sum_{j=1}^{n} y_j+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n} y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}\leq\sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\sigma(i)}-x_i\right)^2\geq\sum_{i=1}^{n} y_i^2-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i+\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2-2x_i y_i+x_i^2\right).$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\sigma(i)}-x_i\right)^2\geq\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-x_i\right)^2}$$

22) Pour tout $\sigma\in S_n$, on a $M_\sigma=\left((M_\sigma)_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}=\left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}=\left(\delta_{\sigma^{-1}(i),j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et :

$$C(M_\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2(M_\sigma)_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2\delta_{\sigma^{-1}(i),j}=\sum_{i=1}^{n}(y_{\sigma^{-1}(i)}-x_i)^2 .$$

Comme $\sigma^{-1}\in S_n$, on a, avec le résultat de la question précédente :

$$C(M_\sigma)\geq\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2 .$$

Or, $M_{id}=I_n$ et $C(M_{id})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2$, donc pour tout $M_\sigma\in\mathcal{P}_n$, $C(M_\sigma)\geq C(M_{id})=C(I_n)$ et ainsi :

$$\boxed{\min_{M\in\mathcal{P}_n} C(M) = C(I_n)}$$

23) Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\left(x_i y_i + x_j y_j\right) - \left(x_i y_j + x_j y_i\right) = x_j(y_j - y_i) - x_i(y_j - y_i) = (x_j - x_i)(y_j - y_i).$$

Or :

- si $i \le j$, on a $x_j - x_i \ge 0$ et $y_j - y_i \ge 0$, donc $(x_j - x_i)(y_j - y_i) \ge 0$;
- si $j \le i$, on a $x_j - x_i \le 0$ et $y_j - y_i \le 0$, donc $(x_j - x_i)(y_j - y_i) \ge 0$.

Ainsi, on a toujours $\left(x_i y_i + x_j y_j\right) - \left(x_i y_j + x_j y_i\right) = (x_j - x_i)(y_j - y_i) \ge 0$, soit :

$$\boxed{x_i y_i + x_j y_j \ge x_i y_j + x_j y_i}$$

24) Soit $M = (M_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice bistochastique symétrique. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(y_j - x_i\right)^2 M_{i,j} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(y_j^2 - 2x_i y_j + x_i^2\right) M_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 M_{i,j} - 2\sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + x_i^2 \sum_{j=1}^n M_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 M_{i,j} - 2\sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + x_i^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j^2 M_{i,j} - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \left(y_j^2 \sum_{i=1}^n M_{i,j} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j M_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j M_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Les indices étant muets, et M étant symétrique, on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j M_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i M_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i M_{i,j}.$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(y_j - x_i\right)^2 M_{i,j} &= \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j M_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i M_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j + x_j y_i) M_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Or, comme les $M_{i,j}$ sont positifs, on a avec la question précédente :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j + x_j y_i)M_{i,j} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_i + x_j y_j)M_{i,j} .$$

Et :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_i + x_j y_j)M_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i M_{i,j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j M_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i M_{i,j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j y_j M_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} \right) + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j y_j \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j + x_j y_i)M_{i,j} \le 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - x_i \right)^2 M_{i,j} \ge \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 - 2x_i y_i + x_i^2 \right)$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - x_i \right)^2 M_{i,j} \ge \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - x_i \right)^2}$$

On vient donc de prouver que pour toute matrice bistochastique symétrique M , on a :

$$C(M) \ge \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - x_i \right)^2 .$$

Or, I_n est une matrice bistochastique symétrique, avec :

$$C(I_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - x_i \right)^2 \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - x_i \right)^2 .$$

Donc, $I_n \in \mathcal{B}_n \cap S_n(\mathbb{R})$ et pour toute $M \in \mathcal{B}_n \cap S_n(\mathbb{R})$, on a $C(M) \ge C(I_n)$. Ainsi :

$$\boxed{\min_{M \in \mathcal{B}_n \cap S_n(\mathbb{R})} C(M) = C(I_n)}$$

25) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

Si $i = 1$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{j,k}y_k=\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\sum_{j=1}^{n}M_{j,k}\right)=\sum_{k=1}^{n}y_k\ .$$

Si $i\geq 2$, on a :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}-\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}\right)=\sum_{j=i}^{n}\left(1-\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}\right)=\sum_{j=i}^{n}1-\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}=\sum_{j=i}^{n}1-\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=i}^{n}M_{j,k}\ .$$

Dans la dernière somme double, les indices étant muets, on peut échanger les noms :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}=\sum_{j=i}^{n}1-\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{k,j}=\sum_{j=i}^{n}\left(1-\sum_{k=i}^{n}M_{k,j}\right)=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}M_{k,j}-\sum_{k=i}^{n}M_{k,j}\right)=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}\ .$$

Et pour tous i,j,k tels que $1\leq k<i\leq j\leq n$, on a $y_k\leq y_i\leq y_j$, donc :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}y_k\leq\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}y_i=\left(\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}\right)y_i=\left(\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}\right)y_i=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_i\leq\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j\ .$$

Ainsi, si $i\geq 2$, on a bien :

$$\underline{\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}y_k\leq\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j\ .}$$

Or, on a :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}y_k+\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}y_k\right)=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{j,k}y_k+\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}y_k\ .$$

Et avec ce qui précède :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k\leq\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j+\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}y_k\ .$$

Les indices étant muets, on peut écrire $\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}y_k=\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=i}^{n}M_{k,j}y_j$, d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j+\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{j,k}y_k&=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j+\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=i}^{n}M_{k,j}y_j\\&=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j+\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}M_{k,j}y_j\\&=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}M_{k,j}y_j+\sum_{k=i}^{n}M_{k,j}y_j\right)\\&=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{k,j}y_j=\sum_{j=i}^{n}\left(y_j\sum_{k=1}^{n}M_{k,j}\right)=\sum_{j=i}^{n}y_j\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k\leq\sum_{j=i}^{n}y_j}$$

Comme dans les questions précédentes, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_i\right)^2 M_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}y_j^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j M_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

Utilisons à nouveau et deux fois la relation de la question 19, avec $b_i = x_i$, et $c_i=\sum_{k=1}^{n}M_{i,k}y_k$, puis $c_i = y_i$. Ceci donne :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{k=1}^{n}M_{i,k}y_k = x_1\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i = x_1\sum_{j=1}^{n}y_j+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}y_j\right)$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $i\geq 2$, on a $x_i-x_{i-1}\geq 0$, et avec le résultat précédent, on obtient :

$$(x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k \leq (x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}y_j .$$

Donc :

$$\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k\right)\leq\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}y_j\right).$$

On a vu que $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k=\sum_{j=1}^{n}y_j$, donc :

$$x_1\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}y_k\right)\leq x_1\sum_{j=1}^{n}y_j+\sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}y_j\right).$$

Soit $\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{k=1}^{n}M_{i,k}y_k\leq\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$, ou en renommant *j* l'indice *k*, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j M_{i,j}\leq\sum_{i=1}^{n}x_i y_i .$$

Ainsi, avec $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_i\right)^2 M_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j M_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_i\right)^2 M_{i,j}\geq\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i+\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_i\right)^2 M_{i,j}\geq\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-x_i\right)^2}$$

26) On vient de prouver que pour toute matrice bistochastique M, on a :

$$C(M) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i \right)^2 .$$

Or, I_n est une matrice bistochastique, avec $C(I_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i \right)^2$ (vu plus haut).

Donc, $I_n \in \mathcal{B}_n$ et pour toute $M \in \mathcal{B}_n$, on a $C(M) \geq C(I_n)$. Ainsi :

$$\boxed{\min_{M \in \mathcal{B}_n} C(M) = C(I_n)}$$

Supposons de plus que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

Soit $M \in \mathcal{B}_n$ telle que $C(M) = C(I_n)$, soit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - x_i \right)^2 M_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i \right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j M_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j M_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k + \sum_{i=2}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) = x_1 \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=2}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^{n} y_j \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=2}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) = \sum_{i=2}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^{n} y_j \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=2}^{n} \left[(x_i - x_{i-1}) \left(\sum_{j=i}^{n} y_j - \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=i}^{n} y_j - \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \geq 0$ et $x_i - x_{i-1} > 0$ par hypothèse ici. Comme une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, on obtient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(x_i - x_{i-1}) \left(\sum_{j=i}^{n} y_j - \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) = 0$, soit :

$$\sum_{j=i}^{n} \left(y_j - \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) = \sum_{j=i}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_j - \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} y_k \right) = \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} (y_j - y_k) = 0 .$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} M_{1,k}(y_1 - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{2,k}(y_2 - y_k) + \ldots + \sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} M_{2,k}(y_2 - y_k) + \ldots + \sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0 \\ \quad \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} M_{n-2,k}(y_{n-2} - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) + \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{p,k}(y_p - y_k) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Pour $p = n$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} M_{n,k}(y_n - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0$. Or, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $M_{n,k}(y_n - y_k) \geq 0$ et $y_n - y_k > 0$, donc $\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,k}(y_n - y_k) = 0$ donne $M_{n,k}(y_n - y_k) = 0$ et donc $M_{n,k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Avec $\sum_{k=1}^{n} M_{n,k} = 1$, on obtient aussi $M_{n,n} = 1$/

Or $\sum_{k=1}^{n} M_{k,n} = 1$, donc $M_{n,n} = 1$ donne $M_{k,n} = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi :

$$M_{n,k} = M_{k,n} = \delta_{n,k} \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

En reprenant la relation **(1)** pour $p = n-1$, on obtient, avec $M_{n-1,n} = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k)}_{\geq 0} = 0.$$

Comme plus haut ceci donne :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], M_{n-1,k}(y_{n-1} - y_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, n-2]\!], M_{n-1,k} = 0.$$

Et comme $\sum_{k=1}^{n} M_{n-1,k} = 1$ et $M_{n-1,n} = 0$, on obtient $M_{n-1,n-1} = 1$.

Avec $\sum_{k=1}^{n} M_{k,n-1} = \sum_{k=1 k \neq n-1}^{n} M_{k,n-1} + M_{n-1,n-1} = 1$, on obtient aussi $M_{k,n-1} = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$ et ainsi :

$$M_{n-1,k} = M_{k,n-1} = \delta_{n-1,k} \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

En continuant ainsi, on obtient par récurrence descendante, $M_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, donc $M = I_n$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{S } x_1 < x_2 < \ldots < x_n \text{ et } y_1 < y_2 < \ldots < y_n,\ I_n \text{ est l'unique matrice qui rend } C(M) \text{ minimal.}}$$