Corrigés des compléments aux TD du Chapitre 9 - Calcul différentiel et plus

Exercice 1

a) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme produit de telles fonctions avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}$$

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| = \left|x^2\ln(x^2+y^2)\right| \leq (x^2+y^2)\left|\ln(x^2+y^2)\right|.$$

Et :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\left|\ln(x^2+y^2)\right| = \lim_{h\to 0^+} |h\ln h| = 0.$$

Donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$ et ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) + 2|x| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2|y|.$$

Et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[2\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) + 2|x|\right] = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0$, donc par comparaison :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ceci permet de conclure que f est de classe C^1 en $(0,0)$. Enfin :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2x\ln(x^2) + 2x\right) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$$

Donc, f admet des dérivée partielle secondes par rapport à x et y en $(0,0)$.

Cependant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Et, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,x) = 1$. Donc, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ et } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\text{, mais pas en } (0,0).}$$

On a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^3}{x^2+y^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\left(\ln(x^2+y^2)+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)=0\\ xy=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=0 \text{ ou } \begin{cases}\ln(x^2)+1=0\\ y=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ ou } \begin{cases}x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}\\ y=0\end{cases}$$

Les points critiques sont donc $(0,y)$ pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}},0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},0\right)$.

Remarquons que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,y)=f(x,y)$, donc $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}},0\right)=-\dfrac{1}{e}$ est un extremum de *f* si et seulement si $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},0\right)=-\dfrac{1}{e}$ en est un.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tel que $x\neq 0$, on a $f(x,y)=x^2\ln(x^2+y^2)\geq x^2\ln(x^2)=h(x^2)$ avec $h:t\mapsto t\ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. L'étude de *h* montre qu'elle est minimale en $\dfrac{1}{e}$ et vaut alors $-\dfrac{1}{e}$. Ainsi, $f(x,y)\geq -\dfrac{1}{e}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq 0$, et cette inégalité reste vrai pour $x=0$, car alors $f(0,y)=0$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{-\frac{1}{e} \text{ est le minimum global de } f\text{, atteint en } -\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

Pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $f(0,b)=0$ et $f(x,y)=x^2\ln(x^2+y^2)$ est du signe de $\ln(x^2+y^2)$.

- Si $|b|<1$, on a $\ln(x^2+y^2)\xrightarrow[(x,y)\to(0,b)]{}\ln(b^2)<0$, donc $f(x,y)\leq 0$ au voisinage de $(0,b)$ et $f(0,b)=0$ est un maximum local.
- Si $|b|>1$, on a $\ln(x^2+y^2)\xrightarrow[(x,y)\to(0,b)]{}\ln(b^2)>0$, donc $f(x,y)\geq 0$ au voisinage de $(0,b)$ et $f(0,b)=0$ est un minimum local.
- Si $|b|=1$, on a pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $(\alpha t,b+\beta t)\neq(0,0)$, on a :

  $$f(\alpha t,b+\beta t)=\alpha^2t^2\ln\left(\alpha^2t^2+(b+\beta t)^2\right)=\alpha^2t^2\ln\left(1+2b\beta t+(\alpha^2+\beta^2)t^2\right).$$

  Donc, $f(\alpha t,b+\beta t)\underset{t\to 0}{\sim}2\alpha^2b\beta t^3$ quand $\alpha\beta\neq 0$ et $f(\alpha t,b+\beta t)$ change de signe quand t passe par 0, donc *f* n'admet pas d'extremum en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Remarquons en fin que comme *f* change de signe, 0 n'est pas un extremum global et donc :

$$\boxed{0 \text{ est minimum local de } f \text{ en tout } (0,b) \text{ avec } |b|>1 \text{ et maximum local de } f \text{ en tout } (0,b) \text{ avec } |b|<1.}$$

b) Posons $h(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & si\ t\neq 0\\ 1 & si\ t=0\end{cases}$. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $h(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{(n+1)!}$, donc h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=y\,h(xy)$.

Comme $(x,y)\mapsto xy$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto h(xy)$ l'est aussi comme composée de fonctions de classe C^2 et comme $(x,y)\mapsto y$ est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=y\,h(xy)$ avec h de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y^2\,h'(xy)=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=h(xy)+xy\,h'(xy)=0\end{cases}$$

Or, $h(0)=1$, donc si $y=0$, on a $h(xy)+xy\,h'(xy)=1\neq 0$. Ainsi :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y^2\,h'(xy)=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=h(xy)+xy\,h'(xy)=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}h'(xy)=0\\ h(xy)=0\end{cases}$$

Et ceci est impossible car h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ($e^t-1\neq 0$ quand $t\neq 0$ et $h(0)=1\neq 0$).

Ainsi, h n'admet aucun point critique sur $\mathbb{R}^2$ (qui est ouvert), donc :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'admet pas d'extremum (local ou global) sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 2

a) La fonction f est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y+3x^2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2x^3y$$

Alors :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y+3x^2y^2=y(1+3x^2y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2x^3y=x(1+2x^2y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=0\\1+2x^2y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}1+3x^2y=0\\x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}1+3x^2y=0\\1+2x^2y=0\end{cases}$$

Les trois derniers cas étant impossibles, le seul point critique est $(0,0)$.

Or :

$$f(x,x)=x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \quad \text{et} \quad f(x,-x)=-x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$$

Donc, au voisinage de $(0,0)$, on a $f(x,x)\geq 0$ et $f(x,-x)\leq 0$, donc $f(0,0)=0$ n'est pas un extremum et ainsi :

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum.}}$$

b) La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions. Les éventuels points critiques (x,y) sont alors solutions de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x}=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x=0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations on obtient, en posant pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $h(t)=\ln t-t+\dfrac{1}{t}$:

$$\ln y-\ln x-\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=h\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

L'étude de la fonction h montre qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule qu'en 1, donc $\dfrac{y}{x}=1$ et en remplaçant dans les équations initiales, on obtient :

$$\ln x=\ln y=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=y=e\,.$$

Réciproquement, on vérifie que $(x,y)=(e,e)$ est bien un point critique de g.

On a $g(e,e)=0$ et pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} g(e+at,e+bt) &= (e+at)\ln(e+bt)-(e+bt)\ln(e+at) \\ &= e+at+(e+at)\ln\left(1+\frac{b}{e}t\right)-e-bt-(e+bt)\ln\left(1+\frac{a}{e}t\right)=\frac{a^2-b^2}{2e}t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2) \end{aligned}$$

Comme a^2-b^2 n'est pas de signe constant pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\boxed{g \text{ n'admet pas d'extremum.}}$$

Exercice 3

a) Pour tout $x\in[0,+\infty[$, la suite $\left(\dfrac{e^{-nx}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle. La série alternée $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ vérifie alors le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

Pour tout $x\in]-\infty,0[$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donc la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ diverge grossièrement.

Finalement :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum f_n \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[\text{ et pas ailleurs.}}$$

b) Comme pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, on a pour tout $x \in [0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-kx}\right| \leq \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc, $\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ (la norme infinie étant prise sur $[0,+\infty[$) et comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_\infty = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [0,+\infty[.}$$

c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, avec $f_n' : x \mapsto (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

De plus, pour tout réel $a > 0$, on a pour tout $x \in [a,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n'(x)| \leq e^{-na}$ et la série géométrique $\sum e^{-na}$ de raison $e^{-a} \in]0,1[$ converge. Donc, par hypothèse de domination, la série $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Ainsi, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout réel $a > 0$, donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*} [a,+\infty[=]0,+\infty[.}$$

Et on a de plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = -\frac{-e^{-x}}{1-(-e^{-x})}.$$

Soit pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$$

On a alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) = -\ln(1+e^{-x}) + K.$$

On a vu que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \left[-\ln(1+e^{-x}) + K\right] = K.$$

Ainsi, pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f(x)=-\ln(1+e^{-x})$ et comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[0,+\infty\right[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\left[0,+\infty\right[$, f est continue sur $\left[0,+\infty\right[$ et donc, pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$:

$$\boxed{f(x)=-\ln(1+e^{-x})}$$

Exercice 4

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, on a $u_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x^2}{2n^2}$ et la série $\sum\frac{x^2}{2n^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $u_n':x\mapsto\frac{-x}{n(x+n)}$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $|u_n'(x)|\leq\frac{1}{n^2}$ et la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. Donc, par hypothèse de domination, la série $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

Ainsi :

$$\boxed{S=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,1] \text{ et } S'=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'.}$$

b) D'après ce qui précède, on a :

$$S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n(1+n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$

Et par télescopage :

$$\boxed{S'(1)=-1}$$

Exercice 5

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}$, $\frac{2^n}{(2n)!}z^{2n+1}=z\frac{(\sqrt{2}z)^n}{(2n)!}$.

Or, la série entière $\sum\frac{Z^n}{(2n)!}$ converge pour tout $Z\in\mathbb{C}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Z^n}{(2n)!}=\operatorname{ch}Z$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence } \sum\frac{2^n}{(2n)!}z^{2n+1} \text{ est infini et pour tout } z\in\mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(2n)!}z^{2n+1}=z\operatorname{ch}(\sqrt{2}z).}$$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\leq n^{(-1)^n}\leq n$ et les séries entières $\sum\frac{1}{n}x^n$ et $\sum n\,x^n$ admettent 1 pour rayon de convergence, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence } \sum n^{(-1)^n}x^n \text{ est 1.}}$$

Pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\sum\frac{1}{n}x^n$ et $\sum n\,x^n$ convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n=\sum_{\substack{n=0\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}nx^n+\sum_{\substack{n=0\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{\substack{n=0\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}2nx^{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n=2\frac{x^2}{(1-x^2)^2}-\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}$$

c) Notons R le rayon de convergence de $\sum(\cos n)\,z^n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\cos(n+1)=\cos n\cos 1-\sin n\sin 1\quad\Leftrightarrow\quad \sin n=\frac{\cos n\cos 1-\cos(n+1)}{\sin 1}.$$

Donc, si $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors :

$$\sin n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\cos 1-1}{\sin 1}\times 0=0$$

Ceci est absurde car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos^2 n+\sin^2 n=1$. Ainsi, $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum\cos n$ diverge grossièrement. Ceci permet d'affirmer que $R\leq 1$.

Par ailleurs, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\left|(\cos n)\,z^n\right|\leq|z|^n$ et $\sum|z|^n$ converge. Donc $\sum(\cos n)\,z^n$ converge absolument. Ainsi, on a $R\geq 1$ et finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence } \sum(\cos n)\,z^n \text{ est 1.}}$$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos n)\,z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}+e^{-in}}{2}z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((e^iz)^n+(e^{-i}z)^n\right).$$

Et comme $|e^iz|=|e^{-i}z|=|z|<1$, les deux séries géométriques $\sum(e^iz)^n$ et $\sum(e^{-i}z)^n$ convergent. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos n)\,z^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^iz)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i}z)^n\right).$$

Soit, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos n)\,z^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^iz}+\frac{1}{1-e^{-i}z}\right)}$$