Corrigés des TD du chapitre 11

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $t^n \in [0,1]$ et la fonction $f_n : t \mapsto f(t^n)$ est définie sur $[0,1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues (donc I_n est bien définie).
- Pour tout $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} t^n = 0$, et par continuité de *f* en 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(t^n) = f(0)$.

  De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(1) = f(1)$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{quand } t \in [0,1[\\ f(1) & \text{quand } t = 1 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- La fonction *f* est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \le M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = |f(t^n)| \le M$ et $t \mapsto M$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right] dt = \int_0^1 f(0)dt .$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = f(0)}$$

Exercice 2

La série $\sum |a_n|$ converge (donc $\sum a_n$ aussi et $a_n \to 0$) et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

Comme $a_n \to 0$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \dfrac{a_n}{n!} x^n \right| = \dfrac{|a_n|}{n!} |x|^n \le M \dfrac{|x|^n}{n!}$ et $M \dfrac{|x|^n}{n!} \to 0$, donc $\left(\dfrac{a_n}{n!} x^n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ est infini, autrement dit :

$$\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

avec $f_n(x) = \dfrac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (produit).

De plus, on a $x^n e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x/2})$ et la fonction $x\mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors, $x\mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $X\in\mathbb{R}_+$, on a par IPP :

$$\int_0^X x^{n+1}e^{-x}dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^X - \int_0^X\left(-(n+1)x^n e^{-x}\right)dx = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X x^n e^{-x}dx.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

Comme $x\mapsto x^n e^{-x}$ est positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx > 0$ et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx} = n+1.$$

Avec un produit télescopique, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = n! \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = a_n.$$

Ainsi :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers $x\mapsto S(x)e^{-x}$, qui est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$ (car produit d'une somme d'une série entière et d'une fonction exponentielle) ;
- $\sum\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum|a_n|$ converge.

Donc :

$$x\mapsto S(x)e^{-x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Ceci revient à dire que :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx \text{ converge et vaut } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

Exercice 3

1) a. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$. Mais :

- $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1$ donc $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$ se prolonge par continuité en 0 ;
- $\frac{t}{e^t-1} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t/2}\right)$ et et la fonction $t\mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ converge, autrement dit :

$$\boxed{I \text{ est bien définie.}}$$

b. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $e^{-t}\in\,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum(e^{-t})^n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{1}{e^t-1}.$$

D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}}$$

c. En intégrant par parties, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $X\in\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\int_0^X te^{-(n+1)t}dt&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\int_0^X e^{-(n+1)t}dt\\&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^X\\&=-\left(\frac{1}{n+1}X+\frac{1}{(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)X}+\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{(n+1)^2}}$$

Alors, si on note $f_n:t\mapsto te^{-(n+1)t}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- $\sum f_n$ converge simplement vers $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$, qui, prolongée par continuité en 0, est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\frac{\pi^2}{6}}$$

2) a. Posons $f(x,t)=\dfrac{t^x-1}{\ln t}=\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$ pour $(x,t)\in\,]-1,+\infty[\times]0,1[$. On a pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$:

$$\lim_{t\to 0} f(x,t)=\left\{\begin{array}{ll}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^{-x}\ln t} & \text{quand } x<0\\ \lim\limits_{t\to 0} 0 & \text{quand } x=0\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-1}{\ln t} & \text{quand } x>0\end{array}\right\}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} f(x,t)=x\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=x.$$

Donc, $t\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et 1. Alors :

- pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,1[$;
- pour tout $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=e^{x\ln t}=t^x$;
- pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=e^{x\ln t}$ est continue sur $]0,1[$;

Enfin, pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a pour tout $t\in\,]0,1[$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=e^{x\ln t}\le e^{a\ln t}=t^a.$$

Et $t\mapsto t^a$ positive, continue et intégrable sur $]0,1[$ (avec $\int_0^1 t^a dt=\dfrac{1}{a+1}$).

Alors :

$$J: x\mapsto\int_0^1 f(x,t)dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ avec } J'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^1 t^x dt=\frac{1}{x+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$:

$$\boxed{J \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ avec pour tout } x\in\,]-1,+\infty[,\ J'(x)=\frac{1}{x+1}.}$$

b. Avec $J'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$, on a immédiatement pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$:

$$J(x)=\ln(x+1)+k$$

où k est une constante.

On a vu dans l'exercice 2)k. du TD 9 que $\int_0^1\dfrac{t-1}{\ln t}dt=\ln 2$, soit $J(1)=\ln 2$.

Or, $J(1)=\ln(1+1)+k=\ln 2+k$ donc $k=0$ et finalement pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$:

$$\boxed{J(x)=\ln(x+1)}$$

Exercice 4

Posons $f(x,t)=\dfrac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$.

- La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Quel que soit $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a $0\le f(x,t)\le\dfrac{1}{1+t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, on a $e^{-bt}\le e^{-at}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, avec égalité en $t=0$ uniquement, donc $f(a,t)\le f(b,t)$ avec égalité en $t=0$ uniquement et ainsi :

$$F(a)<F(b).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\boxed{F(0)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_+$, on a $0<f(x,t)\le\dfrac{1}{e^{-xt}}=e^{xt}$, donc :

$$0\le F(x)\le\int_0^{+\infty}e^{xt}dt=\left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{x}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}F(x)=0}$$

On a vu que $f:(x,t)\mapsto\dfrac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$ est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{quand } t=0\\ \dfrac{1}{1+t^2} & \text{quand } t>0\end{cases}$$

La fonction ℓ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a $\left|f(x,t)\right|\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2+e^{-xt}}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 5

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est définie et continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

- pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0\leq\dfrac{\cos t}{t+x}\leq\dfrac{\cos t}{t+a}$ et $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+a}$ est continue et intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc, $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt$ est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f\text{ est bien définie et continue sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos t}{t+x}-\frac{\cos t}{x}\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{-t\cos t}{x(t+x)}dt.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|g(x)\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x(t+x)}dt\leq\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x^2}dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{\pi/2}t\cos t\,dt=\frac{1}{x^2}\frac{\pi-2}{2}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{g(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

On a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt=f(x)-\frac{1}{x}\int_0^{\pi/2}\cos t dt=f(x)-\frac{1}{x}.$$

Or, $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ implique $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc :

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ce qui implique :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}}$$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$h(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t-1}{t+x}dt.$$

Or, $-\frac{1}{2}t^2\le\cos t-1\le 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, d'où pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)|=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{t+x}dt\le\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t}dt\le\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t\,dt=\frac{\pi^2}{16}.$$

Or, $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\ln x$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)|=\left|f(x)-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\ln x\right|\le\frac{\pi^2}{16}.$$

Alors, pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\left|\frac{f(x)}{-\ln x}-1\right|=\frac{1}{-\ln x}|f(x)+\ln x|\le\frac{1}{-\ln x}\left[\left|f(x)+\ln x-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\le\frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right].$$

Et comme $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\right)=0$, on obtient par comparaison, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{-\ln x}=1$, soit :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$$

Exercice 6

1) Soit $f(x,t)=\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$;
- pour tout $t\in[0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$;

- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ (il suffit d'étudier $x\mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}$) et la fonction $t\mapsto\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto -2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt$.

La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g:x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $G=g^2$, G est aussi de de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G'=2g'g$.

Finalement :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x\in\mathbb{R},\ F'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt \text{ et } G'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.}$$

2) Comme F et G le sont, $F+G$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)+G'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt-\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt\right).$$

En posant $u=xt$, on obtient $\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt=\int_0^x e^{-u^2}du$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(F+G)'(x)=0$, donc ;

$$\boxed{F+G \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

3) Pour tout pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)}=e^{-x^2}e^{-x^2t^2}\leq e^{-x^2}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$|F(x)|=F(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt\leq e^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}e^{-x^2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ est impropre en $+\infty$, mais $e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ converge, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Comme $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$, on a, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0=G(0)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+G(x)\right]=F(0)+G(0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)^2=F(0)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Et comme $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt>0$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est impropre en 0 et $+\infty$, mais :

- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \text{ converge.}$$

En posant $u = \sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du .$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}}$$

Exercice 7

1) Pour $f \in E$, posons $h(x,t) = e^{-xt} f(t)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est continue $\mathbb{R}_+$. De plus, $|f(t)| = \underset{t \to +\infty}{O}(1)$, donc $e^{-xt}|f(t)| = \underset{t \to +\infty}{O}(e^{-xt})$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge (car $x > 0$), ce qui permet de conclure que :

$$\mathscr{L}(f) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^* .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t) \;;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

  de plus, $\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| = \underset{t \to +\infty}{O}(t^k e^{-xt})$ et $t^k e^{-xt} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} t^k e^{-xt} dt$ converge et ainsi, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

- pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on a $\left|t\mapsto\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|\le t^k e^{-at}f(t)$ et on vient de voir que $t\mapsto t^k e^{-at}f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, $x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$ est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, soit pour tout $f\in E$:

$$\boxed{\mathscr{L}(f)\text{ est de classe }C^\infty\text{ sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{L}(f)^{(k)}:x\mapsto\int_0^{+\infty}(-t)^k e^{-xt}f(t)\,dt$.

2) Soit $f\in E$. On veut $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$.

Comme *f* est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $|f(t)|\le M$ et :

$$|\mathscr{L}(f)(x)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt\right|\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-xt}f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,|f(t)|\,dt\le M\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{M}{x}.$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathscr{L}(f)(x)=0}$$

3) Soit $g:t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$.

La fonction *g* est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions et, comme $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=1$.

La fonction ainsi prolongée, renommée *g*, est continue sur le segment $[0,1]$, donc y est bornée et pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a $|g(t)|=\dfrac{|\sin t|}{t}\le\dfrac{1}{t}\le1$, donc *g* est aussi bornée sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, *g* est bornée sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto\frac{\sin t}{t}\text{ se prolonge par continuité en une fonction } g \text{ de } E.}$$

D'après la question 1, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)'(x)=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}g(t)\,dt$, soit :

$$\mathscr{L}(g)'(x)=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,dt=\mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty}e^{(-x+i)t}dt\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{-1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right]_0^{+\infty}\right)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{x+i}{x^2+1}e^{-xt}e^{it}\right]_0^{+\infty}\right)=-\,\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$$

Soit pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\mathscr{L}(g)'(x)=-\frac{1}{x^2+1}}$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)(x) = -\arctan x + C$ où C est une constante d'intégration.

Or, d'après la question 2, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{L}(g)(x) = 0$, soit $-\dfrac{\pi}{2} + C = 0$ et donc $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\mathscr{L}(g)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 8

1) Posons $f(s,x) = e^{-x}x^{s-1}$ pour tout $(s,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $s \mapsto f(s,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x) = (\ln x)^k e^{-x} x^{s-1}.$$

- Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \le 1 \le b$ et tout $(s,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)\right| = |\ln x|^k e^{-x} x^{s-1} \le \varphi(x) = \begin{cases} |\ln x|^k e^{-x} x^{a-1} & \text{pour } x \le 1 \\ |\ln x|^k e^{-x} x^{b-1} & \text{pour } x \ge 1 \end{cases}$$

  La fonction φ est continue (même en 1 où elle vaut 0), donc continue par morceaux, et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

  - pour $x \le 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{a-1} = |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} x^{\frac{a}{2}-1} \underset{x \to 0}{=} o(x^{\frac{a}{2}-1})$ (car $\lim\limits_{x \to 0} |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int_0 x^{\frac{a}{2}-1} dx$ converge (car $\dfrac{a}{2} - 1 > -1$), donc $\int_0 \varphi(x)\,dx$ converge ;
  - pour $x \ge 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{b-1} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} |\ln x|^k e^{-x} x^{b+1} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ converge, donc $\int^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge

  Ainsi, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout ceci permet de conclure que Γ est de classe C^∞ sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $a \le 1 \le b$), donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x} x^{s-1} dx$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties (on vérifie que toutes les intégrales convergent) :

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = \left[-e^{-x} x^s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Soit pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$$

3) On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$, donc :

$$\boxed{\Gamma(1) = 1}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(m) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq 2$:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m \quad \Rightarrow \quad \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^{m-1} k \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1)} = (m-1)! \quad \Rightarrow \quad \Gamma(m) = (m-1)!$$

La relation reste valable pour $m = 1$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(m) = (m-1)!}$$

On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et d'après l'exercice 6 :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

Avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \neq 0$, une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} = m + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Et :

$$\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^m}\prod_{k=0}^{m-1}(2k+1) = \frac{1}{2^m} 1\times 3\times \ldots \times (2m-3)\times(2m-1) = \frac{1}{2^m}\frac{(2m)!}{2\times 4\times\ldots\times(2m-2)\times(2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}.$$

La relation reste valable pour $m = 0$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}}$$

4) En prenant $s=1$ dans la relation de la question 2, on obtient $\Gamma(2)=\Gamma(1)$.

Or, on a vu que Γ est dérivable sur $[1,2]$, donc on peut utiliser le théorème de Rolle pour conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha\in\,]1,2[\text{ tel que } \Gamma'(\alpha)=0.}$$

On a pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)^2e^{-x}x^{s-1}dx\geq 0$, donc :

$$\boxed{\Gamma' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Comme Γ' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en $\alpha\in\,]1,2[$, on a $\Gamma'(s)\leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $\Gamma'(s)\geq 0$ sur $[\alpha,+\infty[$. Alors :

$$\boxed{\Gamma \text{ est décroissante sur }]0,\alpha] \text{ et croissante sur } [\alpha,+\infty[.}$$

Pour construire le tableau de variation complet de Γ, il faut déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.

On a vu que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(m)=(m-1)!$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\Gamma(m)=+\infty$ et la fonction Γ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$. Comme elle croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty}$$

On a vu que pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. Or, Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, d'où :

$$\lim_{s\to0}\Gamma(s+1)=\lim_{x\to1}\Gamma(x)=\Gamma(1)=1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{s\to0}s\Gamma(s)=1$, donc :

$$\boxed{\Gamma(s)\underset{s\to0}{\sim}\frac{1}{s} \quad\text{et}\quad \lim_{s\to0}\Gamma(s)=+\infty}$$

On obtient le tableau :

s	0		α		$+\infty$
Γ	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Par convexité de la fonction exponentielle, on a $1+u\leq e^u$ pour tout $u\in\mathbb{R}$.

Avec $u=-\dfrac{x}{m}$, on obtient pour tout $x\in[0;m]$, $0\leq 1-\dfrac{x}{m}\leq e^{-\frac{x}{m}}$. En élevant à la puissance *m,* ceci donne pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$:

$$\boxed{\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\leq e^{-x}}$$

On a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$:

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m=\exp\left[m\ln\left(1-\frac{x}{m}\right)\right]=\exp\left[m\left(-\frac{x}{m}+\underset{m\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{m}\right)\right)\right]=e^{-x+\underset{m\to+\infty}{o}(1)}=e^{-x}+\underset{m\to+\infty}{o}(1).$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m=e^{-x}}$$

6) Pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\mapsto\left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$ est continue sur $[0,m]$ et, en posant le changement de variable $t=\dfrac{x}{m}$ ($x\mapsto\dfrac{x}{m}$ est de classe C^1, bijective de $[0,m]$ dans $[0,1]$), on obtient :

$$\int_0^m\left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx=\int_0^1(1-t)^m(mt)^{s-1}m\,dt=m^s\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt.$$

En intégrant par parties entre $a\in\,]0,1]$ et 1 ($t\mapsto(1-t)^m$ et $t\mapsto\dfrac{1}{s}t^s$ sont de classe C^1 sur $[a,1]$), on aboutit à :

$$\int_a^1(1-t)^m t^{s-1}dt=\left[(1-t)^m\frac{t^s}{s}\right]_a^1-\int_a^1\left[-m(1-t)^{m-1}\right]\frac{t^s}{s}dt=-(1-a)^m\frac{a^s}{s}+\frac{m}{s}\int_a^1(1-t)^{m-1}t^s dt.$$

Et en faisant tendre a vers 0 (les intégrales, impropres en 0 seulement, convergent car $(1-t)^{m-1}t^s\underset{t\to0}{\sim}t^s$ et $(1-t)^m t^{s-1}\underset{t\to0}{\sim}t^{s-1}$, et, comme $s>0$, les intégrales de Riemann $\int_0 t^{s-1}dt$ et $\int_0 t^s dt$ convergent), on obtient pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt=\frac{m}{s}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^s dt.$$

Alors :

$$\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt=\frac{m}{s}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^s dt=\frac{m}{s}\int_0^1(1-t)^{m-1}(t-1+1)t^{s-1}dt=-\frac{m}{s}\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt+\frac{m}{s}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^{s-1}dt.$$

D'où, pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt=\frac{m}{s+m}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^{s-1}dt.$$

Pour $s>0$ fixé, posons alors, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$I_m=\frac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1(1-t)^m t^{s-1}dt.$$

On a alors pour tout $m\geq 2$:

$$I_m=\frac{m}{s+m}\frac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^{s-1}dt=\frac{(s+1)(s+2)...(s+m-1)}{(m-1)!}\int_0^1(1-t)^{m-1}t^{s-1}dt=I_{m-1}.$$

La suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante. Ainsi, pour tout pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$I_m=I_1=\frac{s+1}{1!}\int_0^1(1-t)t^{s-1}dt=(s+1)\int_0^1(1-t)t^{s-1}dt=(s+1)\frac{1}{s+1}\int_0^1 t^{s-1}dt=\left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1=\frac{1}{s}.$$

On a donc $\dfrac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \dfrac{1}{s}$ et ainsi, pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)...(s+m-1)(s+m)}}$$

7) Soit un réel $s>0$ fixé. Posons pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\gamma(x) = e^{-x}x^{s-1}\quad f_m(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1} & \text{pour } x\in[0;m] \\ 0 & \text{pour } x\in[m;+\infty[\end{cases}$$

- Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, f_m est continue sur $\mathbb{R}_+$ (même en *m*, où elle vaut 0).
- D'après la question 5, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = \gamma(x)$ avec γ continue sur $\mathbb{R}_+$.
- A nouveau d'après la question 5, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$, $|f_m(x)| = f_m(x)\le\gamma(x)$.

  Ceci reste vrai pour $x\in[m;+\infty[$, donc pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$:

  $$|f_m(x)|\le\gamma(x).$$

  Et γ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'intégrale $\Gamma(s)$).

Alors, on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\gamma(x)\,dx = \Gamma(s).$$

Or, d'après la question précédente, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = \int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \frac{m!\,m^s}{s(s+1)...(s+m)}.$$

Ainsi, pour tout réel $s>0$:

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\frac{m!\,m^s}{s(s+1)...(s+m)} = \Gamma(s)}$$

8) On pose pour $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt = \int_1^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt - \int_1^x \ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt\ .$$

La fonction φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi'(x) = \ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right).$$

Or, d'après la question 2, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi'(x) = \ln x.$$

Alors, $\varphi'(x)\ge 0$ sur $[1;+\infty[$ avec $\varphi'(x)=0$ en 1 uniquement, donc φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

De plus, avec $\varphi'(x) = \ln x$, il existe une constante *C* telle que pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\varphi(x) = x\ln x - x + C$.

On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

D'après la question 4, on a le tableau :

s	1		α		2		$+\infty$
Γ	1	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'où le tableau de signes :

s	1		2		$+\infty$
$\ln\left(\Gamma(s)\right)$	0	$-$	0	$+$	

On a alors $\varphi(1) = \int_1^2 \ln\left(\Gamma(t)\right) dt < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, $\varphi(n) = \int_n^{n+1} \ln\left(\Gamma(t)\right) dt > 0$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \varphi(n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, strictement positive à partir du rang 2 et de limite infinie.

Ceci permet de conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang 2 et donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{u_n} \text{ converge.}}$$

Exercice 9

En posant $u = \sqrt{t}$ (avec $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(\sqrt{t})} = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{\operatorname{sh} u} du .$$

L'intégrale est impropre en 0 et $+\infty$.

- Comme $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\operatorname{sh} u}{u} = 1$, la fonction $u \mapsto \frac{2u}{\operatorname{sh} u}$ se prolonge par continuité en 0, donc $\int_0 \frac{2u}{\operatorname{sh} u} du$ converge.
- On a $\frac{2u}{\operatorname{sh} u} \underset{u \to +\infty}{\sim} 4u\,e^{-u}$, $4u\,e^{-u} = \underset{u \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ (par croissances comparées) et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge, donc $\int^{+\infty} \frac{2u}{\operatorname{sh} u} du$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{2u}{\operatorname{sh} u} du$ converge, donc :

$$\boxed{\text{L'intégrale } I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(\sqrt{t})} \text{ existe bien.}}$$

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{\operatorname{sh} u} du = 4\int_0^{+\infty} \frac{u\,e^{-u}}{1 - e^{-2u}} du .$$

Or, pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, $0<e^{-2u}<1$, donc $\dfrac{1}{1-e^{-2u}}=\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-2nu}$ et ainsi :

$$I=4\int_0^{+\infty}\left(u\,e^{-u}\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-2nu}\right)du=4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}u\,e^{-(2n+1)u}\right)du=4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n(u)\right)du$$

avec $f_n(u)=u\,e^{-(2n+1)u}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $u\in\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car définie et continue en 0 et $f_n(u)=\underset{u\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$).
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f:u\mapsto\dfrac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}$, continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n|=f_n$ et :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(u)|\,du=\int_0^{+\infty}f_n(u)\,du=\int_0^{+\infty}u\,e^{-(2n+1)u}du\,.$$

Les fonctions $u\mapsto u$ et $u\mapsto-\dfrac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)u}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et une intégration par parties donne, pour tout $A\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^A u\,e^{-(2n+1)u}du=\left[-\frac{u}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right]_0^A-\int_0^A\left(-\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right)du=-\frac{A}{2n+1}e^{-(2n+1)A}+\frac{1}{2n+1}\int_0^A e^{-(2n+1)u}du$$

$$=-\frac{A}{2n+1}e^{-(2n+1)A}+\frac{1}{2n+1}\left[-\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right]_0^A=-\frac{A}{2n+1}e^{-(2n+1)A}-\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)A}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Quand $A\to+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(u)|\,du=\int_0^{+\infty}f_n(u)\,du=\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Et donc, la série $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge (car $\dfrac{1}{(2n+1)^2}\sim\dfrac{1}{4n^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge).

On peut alors écrire :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n(u)\right)du=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}f_n(u)\,du=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Or :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Avec $I=4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n(u)\right)du$, on obtient finalement :

$$\boxed{I=\frac{\pi^2}{2}}$$

Exercice 10

1) On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t^{\alpha}$, donc $\dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t^{x+\alpha}$ et $\int_0 t^{x+\alpha} dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1>0$, donc $\int_0 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1>0$, soit $x>-\alpha-1$.

Comme *f* est continue en 1, on a $\dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{f(1)}{\sqrt{1-t}}$ quand $f(1)\neq 0$ et $\dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} = \underset{t\to 1}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ quand $f(1)=0$.

Comme $\int^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, dans les deux cas, l'intégrale $\int^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge quel que soit *x*.

Finalement, $\int_0^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x>-\alpha-1$ et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie sur }]-\alpha-1,+\infty[\,.}$$

2) Remarquons déjà que $|f|$ est continue $]0,1]$ et vérifie $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\lambda| t^{\alpha}$, donc on prouve comme plus haut que $\int_0^1 \dfrac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x>-\alpha-1$ et dans ce cas, $t\mapsto \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $h:(x,t)\mapsto \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} = \dfrac{e^{x\ln t} f(t)}{\sqrt{1-t}}$, définie sur $]-\alpha-1,+\infty[\times]0,1[$.

- Pour tout $x\in\,]-\alpha-1,+\infty[$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$ (car *f* l'est).
- Pour tout $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $]-\alpha-1,+\infty[$ (car $x\mapsto e^{x\ln t}$ l'est).
- Soit $a\in\,]-\alpha-1,+\infty[$. Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$, on a :

$$|h(x,t)| = \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{t^a |f(t)|}{\sqrt{1-t}}.$$

  On a vu plus haut que $t\mapsto \dfrac{t^a |f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.

Tout ceci permet de conclure que *g* est continue sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout $a\in\,]-\alpha-1,+\infty[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est continue sur }]-\alpha-1,+\infty[\,.}$$

3) On reprend les notations de la question précédente.

- Pour tout $x\in\,]-\alpha-1,+\infty[$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- Pour tout $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-\alpha-1,+\infty[$ (car $x\mapsto e^{x\ln t}$ l'est), avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^x \ln t\, f(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

- Pour tout $x\in\,]-\alpha-1,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$.

- Soit $a\in\left]-\alpha-1,+\infty\right[$. Pour tout $(x,t)\in\left[a,+\infty\right[\times\left]0,1\right[$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=-\frac{t^{x}\ln t\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\leq-\frac{t^{a}\ln t\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}=\varphi(t).$$

  La fonction φ est positive et continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$.

  De plus, comme ln est continue en 1, on montre comme plus haut que $\int^{1}\varphi(t)\,dt$ converge.

  Enfin, on a :

$$\varphi(t)\underset{t\to 0}{\sim}-|\lambda|t^{a+\alpha}\ln t=-|\lambda|t^{\frac{a+\alpha-1}{2}}t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}}\ln t.$$

  Comme $-1<\dfrac{a+\alpha-1}{2}<a+\alpha$, on a $a+\alpha-\dfrac{a+\alpha-1}{2}>0$, donc $\lim\limits_{t\to 0}t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}}\ln t=0$ et $\varphi(t)=\underset{t\to 0}{o}\left(t^{(a+\alpha-1)/2}\right)$.

  Or, l'intégrale $\int_{0}t^{(a+\alpha-1)/2}dt$ converge (car $\dfrac{a+\alpha-1}{2}>-1$), donc $\int_{0}\varphi(t)\,dt$ converge et ainsi, φ est intégrable sur $\left]0,1\right[$.

Tout ceci permet de conclure que g est de classe C^{1} sur $\left[a,+\infty\right[$, et ceci pour tout $a\in\left]-\alpha-1,+\infty\right[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^{1} \text{ sur } \left]-\alpha-1,+\infty\right[.}$$

4) Sur le segment $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, f est continue donc bornée, et il existe $M\geq 0$ tel que $|f(t)|\leq M$ pour tout $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Soit $\varepsilon\in\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, on a :

$$g(x)=\int_{0}^{1}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt=\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt+\int_{1-\varepsilon^{2}}^{1}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

Avec $t^{x}\leq 1$ pour tout $t\in\left[1-\varepsilon^{2},1\right]$ (car $x>0$) et $\left[1-\varepsilon^{2},1\right]\subset\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, on a alors :

$$\left|\int_{1-\varepsilon^{2}}^{1}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt\right|\leq\int_{1-\varepsilon^{2}}^{1}\frac{t^{x}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt\leq\int_{1-\varepsilon^{2}}^{1}\frac{M}{\sqrt{1-t}}dt=2M\varepsilon.$$

Si de plus, $x>-\alpha+1$, on peut poser $x=-\alpha+1+h$ et :

$$\left|\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt\right|\leq\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{x}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt=\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{-\alpha+1+h}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt=\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}t^{h}\frac{t^{-\alpha+1}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt\leq(1-\varepsilon^{2})^{h}\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{-\alpha+1}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt.$$

Or, quand $x\to+\infty$, $h\to+\infty$ et $(1-\varepsilon^{2})^{h}\to 0$ (car $0<1-\varepsilon^{2}<1$), donc il existe $A>0$ tel que pour tout $x\geq A$, on a :

$$(1-\varepsilon^{2})^{h}\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{-\alpha+1}\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}dt\leq\varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon\in\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ (donc pour $\varepsilon\in\mathbb{R}_{+}^{*}$), il existe un réel $A>0$ te que pour tout réel $x\geq A$:

$$|g(x)|\leq\left|\int_{0}^{1-\varepsilon^{2}}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt\right|+\left|\int_{1-\varepsilon^{2}}^{1}\frac{t^{x}f(t)}{\sqrt{1-t}}dt\right|\leq\varepsilon+2M\varepsilon=(1+2M)\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$$