TD du Chapitre 9 - Calcul différentiel et plus - Compléments

Exercice 1

Etudier le caractère C^0, C^1, C^2 et déterminer les éventuels extremums des fonctions suivantes :

a) $f:(x,y)\mapsto\begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2) & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $g:(x,y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x} & si\ x\neq 0\\ y & si\ x=0\end{cases}$

Exercice 2

Trouver les éventuels extremums de :

a) $f:(x,y)\mapsto xy+x^3y^2$.

b) $g:(x,y)\mapsto x\ln y-y\ln x$.

Exercice 3

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$.

a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

c) Montrer que $f=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, donner $f'(x)$, puis $f(x)$.

Exercice 4

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

b) Calculer $S'(1)$.

Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum\dfrac{2^n}{(2n)!}z^{2n+1}$ b) $\sum n^{(-1)^n}x^n$ c) $\sum(\cos n)z^n$