Annales PSI 2021

Table des matières

I — Réduction : Diagonalisabilité / Eléments propres à étudier

Mines-Ponts PSI 2021 (injectivité de $P(u)-\lambda Id$)

Enoncé 1 - 132677 Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $P \in \mathbb{C}[X]$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrez que, si $u-\lambda Id$ n'est pas injective, alors $P(u)-P(\lambda)Id$ n'est pas injective.

2) On suppose $\deg P \geq 1$. Montrez que, si $P(u)-\mu Id$ n'est pas injectif, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et $u-\lambda Id$ non injective.

RMS 132-677

Q1 si λ vp de u, $P(\lambda)$ vp de $P(u)$. **Q2** en trigonalisant, les vp de $P(u)$ sont les $P(\lambda)$ av λ vp de u.

CCINP PSI 2021 (diagonalisabilité matrice 3×3)

Enoncé 2 - 22020201 On définit, pour $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$

1) Donnez les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m.

2) Donnez, si existence, les valeurs de m tq A_m diagonalisable. Idem pour inversible.

3) Si A_m est diagonalisable, déterminez une matrice de passage P.

BEOS 6083

Q1 $\chi_A = x^3+(2m-3)x^2+(m^2-4m+3)x-m^2+2m-1 = (x-1)(x+m-1)^2$ $1:(1,1,1)$ si $m \neq 0,2$ $1-m:(1,0,1)$ sinon $-2x+my+2z=0$ **Q2** diag ssi $m=0,2$. inv. ssi $m \neq 1$

CCP PSI 2021-2019-2018 - Mines-Ponts PSI 2017 (diagonalisabilité d'une matrice par blocs)

Enoncé 3 - 128804 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Montrez que si U est semblable à V, pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$. (**2021 :** Question absente)

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

3) Montrez que M est diagonalisable ssi A est diagonalisable et que $B=0$.

RMS 132-1145 130-1219 128-804 Odlt 25-214 26-200

Q1 $M^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$ $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$. **Q2** si A daig et $B=0$, ok. sinon P sc. à rac simples tq $P(M)=0$, $P(A)=0$ dc A diag. $P'(A)B=0$. comme P à rac simples, P' n'a pas les memes rac. dc pas les vp, dc $P' = \prod_i (X-\mu_i)$ avec $A-\mu_i I_n$ inversible d'où $B=0$. **detaille**

Mines-Ponts PSI 2021-IMT PSI 2017 (endomorphisme de matrices)

Enoncé 4 - 1281310 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$.

1) L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

2) 2017 : Donnez le polynôme caractéristique et la trace de ψ.

RMS 132-683 128-1310

Q1 $\psi - \mathrm{tr}(A)Id = f$ vérif $f^2 = \mathrm{tr}(A)f$ dc $(X-\mathrm{tr}(A))(X-2\,\mathrm{tr}(A))$ annul. Si $\mathrm{tr}\,A \neq 0$, sc. rac sples, ok. sinon $\psi^2=0$: diag ssi $A=0$ **Q2** Si $A \neq 0$, $\psi(M) = \mathrm{tr}(A)M \iff \mathrm{tr}(M)=0$ dc $\mathrm{tr}(A) : H$ $2\,\mathrm{tr}(A) : \mathrm{Vect}(A)$ dc $\chi_\psi(X) = (X-\mathrm{tr}(A))^{n^2-1}(X-2\,\mathrm{tr}(A))$ $\mathrm{tr}(\psi) = (n^2+1)\,\mathrm{tr}(A)$

CCINP PSI 2021 (produit tensoriel avec matrice 3×3)

Enoncé 5 - 1321137 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable, de rang 1. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha+\beta=\gamma$, $\beta+\gamma \neq 0$, $\beta\gamma \neq 0$

1) Exprimez le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?

2) Montrez que, si X est dans le noyau de A $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.

3) Montrez $\dim\ \mathrm{Ker}\,B \geq 2\dim\ \mathrm{Ker}\,A$.

4) Montrez B diagonalisable.

RMS 132-1137

Q1 via $(\lambda I_6 - B)\times[[\lambda I_3, 0],[\gamma A, I_3]]$, $\chi_B(\lambda) = \det(\lambda^2 I - \alpha\lambda A - \beta\gamma A^2) = -\beta\gamma\,\chi_A(\frac{\lambda}{\gamma})\chi_A(-\frac{\lambda}{\beta})$ dc $\mathrm{Sp}\,B = \gamma\,\mathrm{Sp}\,A \cup -\beta\,\mathrm{Sp}\,A$ **Q3** si $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Vect}(U,V)$, $\mathrm{Ker}\,B \supset \mathrm{Vect}([U,0],[V,0],[0,U],[0,V])$ libre. **Q4** avec $\lambda = \mathrm{tr}(A) \neq 0$ et $AW = \lambda W$, $\mathrm{Sp}\,B = \{0, \gamma\lambda, -\beta\lambda\}$ av $\gamma\lambda, \beta\lambda \neq 0$ et $\gamma\lambda \neq -\beta\lambda$. Ok.

Note: Si A,B,C,D commutent 2 à 2, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$

Note: $B = C \otimes A$ avec $C = [\alpha,\beta],[\gamma,0]$ A diagonalisable et C diagonalisable donc B aussi.

Note: $(M\otimes N)(X_M \otimes X_N) = \lambda_M\lambda_N(X_M\otimes X_N)$. Ici $(1,1)\otimes W = [W,W]$ et $B[W,W] = \gamma\lambda[W,W]$ et $(-\beta,\gamma)\otimes W$ donne $B[-\beta W, \gamma W] = -\beta\lambda[-\beta W, \gamma W]$.

IMT PSI 2021 (endomorphisme de C^3 à paramètre)

Enoncé 6 - 1321131 Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, (e_1,e_2,e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathcal{L}(E)$ tq $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f(e_2) = 0$.

1) Donnez une base de l'image et du noyau de f_a.

2) Donnez la matrice de f_a dans la base (e_1,e_2,e_3).

3) Calculez A^2. Qu'en déduire ?

4) Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

RMS 132-1131

Q1 $\operatorname{Im} f_a = \operatorname{Vect}(u_a)$ av. $u_a = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $\operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Vect}(e_2, e_1 - e_3) : x + z = 0$ **Q3** $u_a \in \operatorname{Ker} f_a$ dc $A^2 = 0$. A nilpotente. **Q4** 0 sle vp. non non

---

ENS PSI 2021 (matrice tridiagonale) ✌

ENONCÉ 7 - 132156 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $\theta \in \left]0, \pi\right[$, soit $B_\theta = 2\cos\theta I_n + A$.

1) Montrez $\det B_\theta = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

2) En déduire que A admet n vp distinctes.

RMS 132-156

Q1 $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$ puis recurr sur n. **Q2** $\det(\lambda I - A) = 0$ pr $\lambda_k = -2\cos\theta_k$ av. $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $1 \le k \le n$. $\lambda_k \neq$ car cos inj. sur $]0, \pi[$

CCINP PSI 2021 (endomorphisme $M \to AMA$ de matrices 3×3)

ENONCÉ 8 - 1321136 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$

1) Déterminez les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Soit $\varphi : M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow AMA$. Déterminez l'image de φ ainsi que ses valeurs propres.

RMS 132-1136

Q1 $\chi_A = x^3$. Non. **Q2** $A^2 = 0$ $\operatorname{Ker} A : x + j^2 y + jz = \operatorname{Vect}(U, V)$ $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(V)$ av $U = (1,1,1)$ $V = (j^2, j, 1)$ $A = [jV, V, j^2 V]$. si ${}^tM = [aU + bV + c\overline{V}, a'U + b'V + c'\overline{V}, a"U + b"V + c"\overline{V}]$, $MA = 3[jW, W, j^2 W]$ av $W = (c, c', c")$ ps $AMA = 3j^2 (V|W) A$ dc $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(A)$ $\varphi^2 = 0$ dc $\operatorname{Sp}\varphi = \{0\}$.
Note: $M \longrightarrow AMA$ a pour mat. ds base canonique, $A \otimes A$ et $\operatorname{rg}(A \otimes A) = \operatorname{rg}(A)\operatorname{rg}(A) = 1$.

IMT PSI 2021 (matrice 2×2) ✌

ENONCÉ 9 - 1321133 Soient $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $A_{11} + A_{21} = A_{12} + A_{22} = 1$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1) Montrez que si $A\binom{x_1}{x_2} = \binom{y_1}{y_2}$, alors $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2) Montrez que $(1, -1)$ est vecteur propre de f et préciser la vp associée.

3) Montrez que, si V est un vecteur propre non colinéaire à $(1, -1)$, alors V est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

RMS 132-1133

Q2 $y_1 = -y_2$ et $\lambda = A_{11} - A_{12} = A_{22} - A_{21} = \operatorname{tr} A - 1$ **Q3** les 2 vp de ${}^tA$ st 1 ($U = (1,1)$ et $\operatorname{tr} A - 1$. si $\operatorname{tr} A = 2$, pas de vect prop non col. (sf $A = 1.I$).
Note: A et ${}^tA$ ont memes vp λ_i et $E_A(\lambda_i) \perp E_{{}^tA}(\lambda_j)$ car $(\lambda_j - \lambda_i)\, {}^tY_i X_j = 0$ pour $AX_i = \lambda_i X_i$ et ${}^tAY_j = \lambda_j Y_j$.

CCP PSI 2021-2019 (matrice $n \times n$)

ENONCÉ 10 - 19070702

Soit $n \geq 3$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \le j \le n$, $a_{i1} = i$ pour $1 \le i \le n$ et des 0 ailleurs.

1) Quel est le rang de A ? dim Ker A ?

2) A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?

3) Montrez que $\operatorname{Sp} A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

4) Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

RMS 132-1139 BEOS 6183 Quentin 2019 ODLT 26-199

Q1-2 $\operatorname{rg} A = 2$ $\mu(0) \geq n - 2$ A daig car sym réelle. **Q3** $\operatorname{tr} A = 0 + \lambda + \mu$ dc $\operatorname{Sp} A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$. **m1 :** on calcule $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - X - b)$ par $C_1 \longleftarrow XC_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + nC_n$ et $b = \sum_{k=2}^n k^2$. **m2 :** $U = (0, 2, 3, \dots, n)$ et $V = (1, 0, \dots, 0)$ et $A' = \operatorname{Mat} = [[1,1],[b,0]]$ avec $\chi_{A'} = X^2 - X - b$. $\lambda > 1$ immédiat. **Q4** $X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$

X PSI 2021 (valeurs propres de $M \to AM - MA$) ✷ ✷

ENONCÉ 11 - 132337 Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $f_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow AM - MA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrez que, si 2 matrices A et B sont semblables, alors les endomorphismes f_A et f_B sont semblables.

2) Montrez que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Sp} f_A = \{\lambda - \mu,\ \lambda, \mu \in \operatorname{Sp} A\}$.

RMS 132-337

Q1 si $A = P^{-1}BP$, $f_A = \varphi^{-1} \circ f_B \circ \varphi$ avec $\varphi(M) = PMP^{-1}$. **Q2** via Q1, on prend A triang sup de diag (λ_i), alors f_A a pr mat. ds base can. $\downarrow$ $I \otimes A - {}^tA \otimes I$ qui est triang inf par blocs de blocs diagonaux $A - \lambda_i I$ dc $\chi_{f_A}(\lambda) = \prod_i \chi_A(\lambda + \lambda_i)$. Ok.

Note: $M \to AMB$ a pour matrice dans base canonique $\downarrow$ (rp. $\to$) ${}^tB \otimes A$ (rp. $A \otimes {}^tB$) (produit tensoriel de matrices).
Note: $f_A : M \longrightarrow AM - MA$ est diagonalisable ssi A l'est ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$). base de vecteurs propres $X_i\, {}^tY_j = {}^tY_j \otimes X_i$ avec $AX_i = \lambda_i X_i$ et ${}^tAY_j = \lambda_j Y_j$.

Mines-Ponts PSI 2021 (diagonalisabilité matrice 3×3)

ENONCÉ 12 - 132679 Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sin 2\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

RMS 132-679

$A = \sin 2\varphi J + \sin\varphi J^2$ av J mat permut diag ds $\mathbb{C}$ de vp $1, j, j^2$ dc diag ds $\mathbb{C}$. comme sbble ds$\mathbb{C} \Longrightarrow$ sblbl ds $\mathbb{R}$, diag. ds $\mathbb{R}$ ssi vp ds $\mathbb{R}$ ssi $\sin 2\varphi j + \sin\varphi j^2 \in \mathbb{R}$ ssi $\sin 2\varphi = \sin\varphi$ ssi $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$
Matrices de permutation: si $P = \delta_{i\sigma(j)}$ av $\sigma = c_1 \dots c_p$, décomposition cycles disjoints c_i longueur l_i, $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, bistochastique, diagonalisable ds $\mathbb{C}$., $\chi_P = (x-1)^{n - \sum l_i} \prod_i (x^{l_i} - 1)$, $\operatorname{tr}(P) =$ nombre points fixes, $\det P = \varepsilon(\sigma)$.

Navale PSI 2021 (éléments propres de $f \circ g$ et $g \circ f$)

ENONCÉ 13 - 1321135
1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que, si A inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Montrez que le résultat reste valable pour A quelconque.
2) Soient f et g 2 endomorphismes d'un ev E de dim. finie n. On note E_λ et F_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ. Soit λ une vp non nulle de $f \circ g$. Montrez λ vp de $g \circ f$ puis $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire E_λ et F_λ de même dimension.

RMS 132-1135

Q1 $\chi_{AB} = \det(A)\det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda A^{-1} - B)\det(A) = \chi_{BA}$ ps $M \to \det(\lambda I - MB)$ cont. et densité de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. **Q2** si $(f \circ g)(x) = \lambda x$, $(g \circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \neq 0$ car $\lambda \neq 0$. ceci s'écrit $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. l'aut. par sym. les 2 donnent dim $\leq$ d'où $=$
Note: on a aussi 0 vp de $f \circ g$ ssi 0 vp de $g \circ f$ (par le det) ms les esp propres n'ont pas meme dim puisqu'on peu avoir $f \circ g = 0$ et $g \circ f \neq 0$.

CCINP PSI 2021 (racine carrée matrice 3×3)

ENONCÉ 14 - 1321134 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
1) La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminez ses éléments propres.
2) Trouvez une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
3) Les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables?

RMS 132-1134

Q1 $\chi_A = x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = (x-4)(x-2)^2$ $4 : (-1,1,1)$ $2 : (1,1,1)$ Non. **Q2** $\mathrm{Ker}(A - 2I)^2 : 2x - y - z = 0$ sbble à $\mathrm{Diag}(C, 2)$ avec $C = [2,1][0,2]$ via ${}^tP = [5,5,5][1,2,0][-1,1,1]$. $D = [\sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}][0, \sqrt{2}]$ verif $D^2 = C$ ps $B = P\,\mathrm{Diag}(D, 2)P^{-1}$ **Q3** Non sinon A diag.

IMT PSI 2021 (diagonalisabilité matrice 3×3) ✷

ENONCÉ 15 - 1321130 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$
1) Calculez le déterminant de A.
2) A quelle condition A est-elle diagonalisable?

RMS 132-1130

Q1 $2abc$ **Q2** $\chi_A = x^3 - Bx - 2acb$ av $B = ab + ac + bc$ $\chi'_A = 3x^2 - B$. rac au - dble ssi $\chi_A(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\sqrt{B}) = 0$ ssi $B^3 = 27a^2b^2c^2$. sinon autr rac. $\frac{\mp 2}{\sqrt{3}}\sqrt{B}$. Alors si $abc \neq 0$, $\mathrm{rg}(A - \lambda Id) \leq 1$ ssi $-\lambda = a = b = c$ et alors diag. si $abc = 0$ non diag ssi 2 nuls car nilpotente.

Formules de Cardan: $X^3 + pX + q$ av $p, q \in \mathbb{R}$ a une rac. au - dble ssi $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$. les rac. $\in \mathbb{C}$ sont $j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right)} + j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right)}$

CCP PSI 2021-2019 (diagonalisation matrice par blocs) ✷ ☜

ENONCÉ 16 - 1301214 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$
1) Exprimez le rang de B en fonction de celui de A.
2) Trouvez une relation entre χ_B et χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.
3) Si A inversible et possède n vp distinctes, B est-il diagonalisable?
4) 2019 : Déterminez les dimensions des espaces propres de B en fonction de celles des espaces propres de A.
5) Discutez de la diagonalisabilité de B si A non inversible.
6) 2019 : Montrez B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

Nicolas 2021 RMS 132-1142 130-1214

Q1 $\mathrm{rg}\,B = n + \mathrm{rg}\,A$ dc $\dim \mathrm{Ker}\,B = \dim \mathrm{Ker}\,A$ **Q2** $\chi_B(\lambda) = [[\lambda I, -A], [-I, \lambda I]] = \chi_A(\lambda^2)$: on fait $(\lambda I - B) \times [[\lambda I, 0], [I, I]]$. dc $\mathrm{Sp}\,B$ et l'ens des rac carrées de $\mathrm{Sp}\,A$. **Q3** si $\dim E_B(\pm\sqrt{\lambda}) = \dim E_A(\lambda)$ par $Y \to [\lambda Y\ Y]$. **Q4** ok par dim.

Mines-Ponts PSI 2021-2018 (matrices telles que $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$) ✷

ENONCÉ 17 - 129729 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$.
1) Montrez que $A = B$.
2) Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus A et B diagonalisables?

BEOS 6365 RMS 129-729

Q1 m1 : si A inv, B aussi et $A^3A^{-2} = B^3B^{-2}$ sinon $\chi_A(A) = 0$ amène $A = P_A(A)$ av $\mathrm{val}\,P \geq 2$. Or $2\mathbb{N} + 3\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ car $2n, 3n, 3n+2$ Ok et $3n+1 = 3(n-1)+4$ (sauf $n = 1$!) dc $P_A(A)$ commute av $P_B(B) = B$ dc A, B codiag. ps $D_A^2 = D_B^2$ et $D_A^3 = D_B^3$ soit $\lambda^2 = \lambda'^2$ et $\lambda^3 = \lambda'^3$ ps $\lambda = \lambda'$. Ok. **Q2** Faux : on prend A, B nilpotentes d'indice 2 dc $A^2 = B^2 = 0 = A^3 = B^3$ avec A coeff 1 en $(n, 1)$ et B coeff 1 en $(1, n)$.

CCINP PSI 2021 (endomorphisme de matrices) ✌

ENONCÉ 18 - 22020202 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E,\ u(M) = aM + b\,{}^tM$.
1) Montrez que u est un endomorphisme.
2) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.
3) Calculez $\mathrm{tr}\,u$ et $\det u$.

BEOS 6066

Q2 $u = aId + b\varphi$ av $\varphi^2 = Id$ $1 : S_n$ $-1 : A_n$ dc $a + b : S_n$ $a - b : A_n$ **Q3** $\det u = (a+b)^{n(n+1)/2}(a-b)^{n(n-1)/2}$ $\mathrm{tr}\,u = n^2a + nb$

CCINP PSI 2021 (dilatation-transvection)

Enoncé 19 - 21070701

Soit $n \geq 2$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

1) Montrez f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Etablir $y \in \operatorname{Im} f \iff f(y) = y$
3) Montrez $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^n$. Que peut-on en déduire?
4) Déterminez les espaces propres de f.

Mathieu 2021

Q2 $f(v) = 0$. si $y \in \operatorname{Im} f$, $y = f(x) = x - \sum_i x_i v$ ps $f(y) = f(x) + \sum_i x_i f(v) = f(x) = y$ **Q3** si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $f(x) = 0$ et $f(x) = x$ dc $x = 0$. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} - Id - f$ dc projection **Q4** proj. sr $\sum x_i = 0$ // à $\operatorname{Vect}(v)$.

Mines-Ponts 2021-CCP PSI 2013 (endomorphisme de polynômes)

Enoncé 20 - 14117 On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $u(P) = X^n P(\frac{1}{X})$.
Vérifiez u endomorphisme puis étudiez si u est diagonalisable en précisant ses valeurs propres et vecteurs propres.

RMS 132-680 124-1188 Odlt14 pl17

$u : a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n \to a_n + a_{n-1} X + \cdots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n$ donc $u^2 = Id$. diag. Si $n = 2m+1$ impair, $1 : 1 + X^n, X + X^{n-1}, \dots, X^m + X^{m+1}$. Si $n = 2m$ pair, $1 : 1 + X^n, X + X^{n-1}, \dots, X^{m-1} + X^{m+1}, X^m$. Pour -1 id avec - (mais pas de X^m)

CCP PSI 2021-2016 (endomorphisme de polynômes)

Enoncé 21 - 232030002 Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P)(X) = (X - a)P'(X) + P(X) - P(a)$.
1) Question absente en 2021 : Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme f
2) Donnez noyau et image de f
3) Donnez les éléments propres de f.

Camille 2021 Odlt 23-203

matrice triangulaire. $f(X^k) = (k+1)X^k - akX^{k-1} - a^k$ pour $k \geq 2$. $f(X) = 2X - 2a$ et $f(1) = 0$. 0 vp de $\mu = 1$ donc $\operatorname{Ker} f = dte = \operatorname{Vect}(1)$. $\operatorname{Im} f \subset \{P | (X - a)/P\}$ + hyperplan donc =. vp toutes $\neq$ sur la diagonale donc les $k+1$ pour $k \geq 1$ et 0 sont de $\mu = 1$. espace propre = Dte = $E(k+1) = \operatorname{Vect}(X^k)$ et $E(0) = \operatorname{Vect}(1)$

CCP PSI 2021-2019 (diagonalisabilité endomorphisme)

Enoncé 22 - 1301201 Soient E un ev de dimension n, l une forme linéaire non nulle sur E et $a \neq 0 \in E$. On pose $f : x \in E \longrightarrow l(a)x - l(x)a$.
1) Montrez f endomorphisme de E.
2) Calculez $f(a)$.
3) Question absente en 2021 : Déterminez $\operatorname{Ker}(f)$ et calculez $f(\operatorname{Ker} l)$.
4) Calculez les éléments propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
(*Indication* : on distinguera les cas $l(a) = 0$ et $l(a) \neq 0$) (**2019 :** Indication absente)
5) On suppose $l(a) = 0$. Calculez f^2, en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouvez le résultat de Q4)

Antoine 2021 RMS 130-1201

Q3 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a)$ si $l(a) \neq 0$ sinon $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} l$. **Q4** $f(x) = \lambda x \implies (l(a) - \lambda)x = l(x)a$. dc ou $\lambda = l(a)$ ou $\operatorname{Vect}(a)$ (associé à 0). diag ssi $l(a) \neq 0$. si $l(a) = 0$ 1 seule vp 0 et $f(x) = -l(x)a$. **Q5** $f^2 = 0$.

II — Réduction : Autres

Centrale PSI 2021 (suite des puissances itérées d'une matrice)

Enoncé 23 - 1321008

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable tq la suite (A^k) converge vers une matrice L. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp distinctes de A.
1) Montrez A admet un polynôme annulateur de degré p.
2) Montrez que les vp de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A. En déduire $(I, A, \dots, A^{p-1})$ libre.
3) Montrez que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tq $A^k = P_k(A)$. En déduire il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tq $L = P(A)$.

RMS 132-1008

Q1 $Q(X) = \prod_i (X - \lambda_i)$ **Q2** si $(I, A, \dots, A^{p-1})$ lié, pol annul. de deg $\leq p-1$ dt les vp ne peuvent etre ttes racines. **Q3** div euclid de X^k par $Q(X)$. $\mathbb{R}_{p-1}[A]$ sev dim fini donc fermé dc (A^k) cvg dedans.

Note: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, équiv. de **(i)** $A^k \to 0$ **(ii)** $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $A^k X \to 0$ **(iii)** $\rho(A) < 1$ **(iv)** série $\sum A^k$ converge **(v)** Il ex. norme subordonnée tq $|||A||| < 1$.
Note: Si la suite (A^n) converge, elle converge vers une projection (on écrit $A^n A^n = A^{2n}$).
Note: Si (A^n) bornée, moy. de césaro $\frac{1}{n}\sum_k A^k$ cvg vers projection.
Note: Si $|||u||| \leq 1$ ds euclid., $\operatorname{Ker}(u - Id) \perp \operatorname{Im}(u - Id)$ et moy. de césaro cvg vers proj $\perp$ sur $\operatorname{Ker}(u - id)$.

Mines-Ponts PSI 2021 (racine carrée d'une matrice 3×3)

Enoncé 24 - 132675 Soient $A=\begin{pmatrix}0&-3&5\\-1&-2&5\\-1&-3&6\end{pmatrix}$ et $E=\mathrm{Vect}(I_3,A)$

1) L'espace E est-il stable par produit matriciel ?
2) Déterminez les matrices de E inversibles et d'inverse dans E.
3) Existe t-il $M\in E$ tel que $M^2=A$?

RMS 132-675

Q1 $\chi_A=x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-5)$ $1:x+3y-5z=0$ $2:(1,1,1)$ diag. dc $(X-1)(X-2)$ ann. dc $A^2=3A-2I$. Ok. **Q2** si $B\in E$ inv, $\varphi: M\in E\to BM\in E$ inj. dc surj. via $\varphi^{-1}(I)$, $B^{-1}\in E$ ps $\alpha I+\beta A$ inv. ssi $\frac{-\alpha}{\beta}$ pas vp de A ssi $(2\beta+\alpha)(\beta+\alpha)\neq 0$ **Q3** $(\alpha I+\beta A)^2=(\alpha^2-2\beta^2)I+(2\alpha\beta+3\beta^2)A$ dc $\alpha=\pm\sqrt{2}\beta$ $\beta^2=\frac{1}{\pm 2\sqrt{2}+3}=\frac{1}{(\sqrt{2}\pm 1)^2}$, soit 4 rac ds E.
Note: si $M\in E$ $\mathbb{K}$-algèbre de type fini et est inversible, alors $M^{-1}\in E$.
Note: le groupe des inversibles de $\mathbb{K}[A]$ est l'ens. des matrices $P(A)$ avec $P\wedge\mu_A=1$ ssi $P\wedge\chi_A=1$

CCINP PSI 2021 (espaces stables d'une matrice 3×3)

Enoncé 25 - 1321138 Soit $A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-2&5&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) Montrez A trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.
2) Donnez les droites stables de A.
3) Donnez les plans stables de A

RMS 132-1138

Q1 $\chi_A=x^3-5x^2+8x+4=(x-1)(x-2)^2$ $1:(1,1,1)$ $2:(2,2,1)$**Q2**D= Vect (u) stbl ssi u vecteur propre. **Q3** P : ${}^tUX=0$ stbl ssi U vect propre de ${}^tA$. ${}^tA$ $1:(0,1,-2)$ $2:(-1,1,0)$ dc $y-2z=0$ et $-x+y=0$ **démo :** $[{}^tUX=0\implies {}^tU\,AX=0]\implies {}^tUA=\alpha\,{}^tU$.
Note: Un hyperplan $H=\operatorname{Ker}\varphi=\{X,\ {}^tUX=0\}$ est stable par $a\in\mathscr{L}(E)$ de matrice A ssi U vecteur propre de ${}^tA$ ssi φ vecteur propre de ${}^ta$.
Note: Si $\mathbb{K}$ est infini, les endomorphismes n'admettant qu'un nombre fini d'evs stables sont les endomorphismes cycliques (A est cyclique)
Note: Les sevs stables d'un endomorphisme de rang 1 sont les $F\supset\operatorname{Im}f$ ou $F\subset\operatorname{Ker}f$.

Mines-Ponts PSI 2021 (équation matricielle matrices 2×2)

Enoncé 26 - 132678 Diagonalisez $A=\begin{pmatrix}3&5\\0&-12\end{pmatrix}$ puis résoudre l'équation $M^3+2M=A$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

RMS 132-678

$3:(1,0)=U$ $-12:(1,-3)=V$ si M vérif E, $M\in\mathrm{com}(A)=\mathbb{R}[A]=\mathrm{Vect}(I,A)$ dc codiag. av $P=[U,V]$, dc M verif E ssi $D=\mathrm{Diag}(a,b)=P^{-1}MP$ verif $D^3+2D=\mathrm{Diag}(3,-12)$ ssi $a^3+2a=3$ et $b^3+2b=-12$ ssi $a=1,-\frac{1}{2}\pm i\frac{1}{2}\sqrt{11}$ et $b=-2,1+\pm i\sqrt{5}$.

Ensea PSI 2021 (puissance n-ième d'une matrice trigonalisable)

Enoncé 27 - 1321129 Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

1) A est-elle diagonalisable ?
2) Montrez A semblable à $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
3) En déduire l'expression de A^n pour $n\in\mathbb{N}$.
4) Retrouvez cette expression en observant que $A=I_3+N$ où N est une matrice nilpotente.

RMS 132-1129

Q1 $\chi_A=(x-1)^3$ $1:y-z=0$. No **Q2** $(A-I)^2=0$ $e_3\notin\operatorname{Ker}(f-Id)$ $e_2=(f-Id)(e_3)$ et (e_1,e_2) base de $\operatorname{Ker}(f-Id)$. par ex : $e_3=(0,1,0)e_2=(0,1,1)e_1=(1,0,0)P^{-1}=[1,0,0],[0,0,1],[0,1,-1]$ **Q3** diag par blocs av $[1,1][0,1]^n=[1,n][0,1]$ $A^n=[1,0,0],[0,1+n,-n],[0,n,1-n]$ **Q4** $N=A-I=\mathrm{Diag}(0,B)$ av $B=[1,-1],[1,-1]$, $B^2=0$ dc $A^n=I+nN$

CCINP PSI 2021 (matrices sans valeur propre commune) ✷

Enoncé 28 - 1321144 Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)=\emptyset$.
1) Montrez, si P est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont racines de P.
2) Montrez la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
3) Soit $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Prouvez $AX=XB\iff X=0$.
4) Montrez, pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AX-XB=M$.

RMS 132-1144

Q2 si λ_i vp de A, $\chi_A(B)=\prod_i(\lambda_i Id-B)$ et $\lambda_i Id-B$ inv. cr λ_i pas vp de B. **Q3** pr recurr, $A^nX=XB^n$ ps $P(A)X=XP(B)$ ps, C-H, $0=\chi_A(A)X=X\chi_A(B)$ dc $X=0$. **Q4** $\varphi: X\to AX-XB$ isom. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ pr Q3.

Mines-Ponts PSI 2021 (suite de puissances de matrice compagnon) ☜

Enoncé 29 - 22020301 Soient $n \geq 2$ entier, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminez le polynôme caractéristique de A.
2) Calculez les dimensions des sous-espaces propres de A et en déduire une CNS pour que A soit diagonalisable.
3) Montrez que la suite $(A^p)_p$ est bornée ssi pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $|\lambda| \leq 1$ et si $|\lambda| = 1$, λ est de multiplicité 1.

BEOS 6407

Q1 av $C_1 \longleftarrow X^{n-1}C_1 + X^{n-2}C_2 + \dots + XC_{n-1} + C_n$, triangulaire ps $\chi_A = P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - \dots - a_{n-1}X - a_n$ **Q2** $\forall \lambda$, $\operatorname{rg}(A - \lambda Id) \geq n-1$ dc esp prop. de dim 1, dc diagonalisable ssi pol. P scindé à racines simples. **Q3** si ex. $|\lambda_0| > 1$, $\|A^p X_0\| = |\lambda_0|^p \|X_0\| \to +\infty$. si exis $\lambda_0 = e^{i\theta}$ av. mult. $m \geq 2$, il ex. plan stable tq endo induit est $B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ et $B^p = \begin{pmatrix} \lambda_0^p & p\lambda_0^{p-1} \\ 0 & \lambda_0^p \end{pmatrix}$ (notes)

Note: f cyclique ssi exist x tq $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ base ssi mat. compagnon ds une base ssi $\operatorname{com} f = \mathbb{K}[f]$ ssi esp. propres de dim 1 (dans $\mathbb{C}$).
Note: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable ssi $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Ker}(\lambda Id - A) \not\subseteq \operatorname{Ker}(\lambda Id - A)^2$ ssi il existe un plan stable tq a induit $\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}$.
Note: $\operatorname{mult}(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda Id - u)$ ssi $\operatorname{Ker}(\lambda Id - u) = \operatorname{Ker}(\lambda Id - u)^2$ ssi $\operatorname{Ker}(\lambda Id - u) \oplus \operatorname{Im}(\lambda Id - u) = E$ ssi λ racine simple de pol. minimal.

CCINP PSI 2021 (valeur propre en commun de 2 matrices) ✷

Enoncé 30 - 1321143
1) Enoncez le théorème de Cayley-Hamilton.
2) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $C \neq 0$. Montrez, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.
3) Montrez qu'un produit de matrices est inversible ssi tous ses facteurs le sont. En déduire A et B ont au moins une vp en commun.
4) Réciproquement, si A et B ont une vp en commun, montrez il existe une matrice $C \neq 0$ tq $AC = CB$.

RMS 132-1143

Q2 par recurr, $A^n C = CB^n$ **Q3** par le det. $C\chi_A(B) = 0 = C\prod_i (B - \lambda_i I)$. si tous $B - \lambda_i I$ inv, $C = 0$. absurde dc un des λ_i vp de B. **Q4** si $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$, alors $C = X\,{}^tY$ verif. $AC = CB = \lambda X\,{}^tY$.
Note: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une vp commune ssi existe $C \neq 0$ tq $AC = CB$ ssi $\mu_A(B)$ non inversible ssi $\chi_A(B)$ non inversible.
Note: si existe U de rg r tq $AU = UB$, alors au $-r$ vp en commun (avec multiplicité) ; ssi vrai ds $\mathbb{C}$ et ds $\mathbb{R}$ en rajoutant l'hypothèse trigonalisable.

Centrale PSI 2021 (matrice à coefficients entiers)

Enoncé 31 - 1321005
1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrez l'équivalence entre **(i)** $\det A \in \{-1, 1\}$ **(ii)** A est inversible et A^{-1} à coefficients entiers.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $A^p = I_2$. Montrez A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversible avec A^{-1} à coefficients entiers. Montrez que toute valeur propre est de module 1.
3) Montrez que l'ensemble des polynômes caractéristiques de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour lesquelles $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $A^p = I_2$ est fini.

RMS 132-1005

Q1 $(ii) \Rightarrow (i)$ $\det A$, $\frac{1}{\det A} \in \mathbb{Z}$ $(i) \Rightarrow (ii)$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\operatorname{com} A)$ **Q3** $\chi_A = x^2 - ax + b$ av $|a| \leq |\lambda| + |\lambda'| \leq 2$ et $|b| = |\lambda\lambda'| \leq 1$ et a, b entiers : 15.

CCINP PSI 2021 (polynôme annulateur d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

Enoncé 32 - 1321127 Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $f + f^3 = 0$ et A sa matrice dans la base canonique.
1) Montrez que A n'est pas inversible.
2) Montrez $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + Id)$.
3) Montrez $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul.
4) Montrez que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

RMS 132-1127

Q1 $X(X^2+1)$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} \subset \{0\}$ et $\neq \emptyset$ cr dim impaire. **Q2** $x = (x + f^2(x)) - f^2(x)$ **Q4** base $(x, y, -f(y))$ av. $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Ker}(f^2 + Id)$.
Note: $\operatorname{Ker}(f^2 + id) = \operatorname{Im} f$.

Mines-Ponts PSI 2021 (espaces stables d'une matrice 3×3) ✌

Enoncé 33 - 132674 Déterminez les sous-espaces stables par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

RMS 132-674

$\chi_A = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$ $0 : (0,-1,1)$ $1 : (-1,-1,1)$ $2 : (1,1,0)$ et ${}^tA$: $0 : (-1,1,0)$ $1 : (-1,1,1)$ $2 : (0,1,1)$ dtes : $\operatorname{Vect}(0,-1,1)$ $\operatorname{Vect}(-1,-1,1)$ $\operatorname{Vect}(1,1,0)$.
plan : P : ${}^tUX$ stbl ssi U vect prop de ${}^tA$, dc $-x+y+z=0$ $-x+y=0$ $y+z=0$. **démo :** $[{}^tUX = 0 \Longrightarrow {}^tU\,AX = 0] \Longrightarrow {}^tUA = \alpha\,{}^tU$.
Note: Un hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi = \{X,\ {}^tUX = 0\}$ est stable par $a \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A ssi U vecteur propre de ${}^tA$ ssi φ vecteur propre de ${}^ta$.
Note: Si $\mathbb{K}$ est infini, les endomorphismes n'admettant qu'un nombre ***fini*** d'evs stables sont les endomorphismes cycliques (A est cyclique)
Note: Les sevs stables d'un endomorphisme de rang 1 sont les $F \supset \operatorname{Im} f$ ou $F \subset \operatorname{Ker} f$.
Note: Si u est diag., les ev stabl st exact. les ev engendrés par vect prop ou ceux égaux à la somme (directe) de ses intersections av les sevs prop.

Centrale PSI 2021 (suites de matrices)

Enoncé 34 - 22020701

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possédant $p \geq 2$ vp distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tq $\forall 2 \leq i \leq p$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$ tq $\operatorname{tr} A^k \neq 0$, $t_k = \dfrac{\operatorname{tr} A^{k+1}}{\operatorname{tr} A^k}$ $(*)$.

1) Montrez que t_k est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminez sa limite.
2) Justifiez que, si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut-être en défaut.
3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Montrez que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminez la limite de $\dfrac{A^k}{k}$ lorsque $k \to +\infty$.

BEOS 6231

Q1 $|\sum_{i\geq 2} \lambda_i^k| \leq \sum_i |\lambda_i|^k = o(|\lambda_1|^k)$ dc $\operatorname{tr} A^k \neq 0$ apcr. $t_k = \lambda_1(1+\sum(\lambda_i/\lambda_1)^{k+1})/(1+\sum(\lambda_i/\lambda_1)^k) \to \lambda_1$. **Q2** av $D = \operatorname{Diag}(i,-i)$ t_k jms défini pour k impair et $D = \operatorname{Diag}(1,j)$, t_k périodique de période 3. **Q3** $1 : -2x+2y+z=)0 : P$ $e_3 \notin \operatorname{Ker}(A-I)e_2 = (A-I)e_3 \in P$ et e_1 tq (e_1,e_2) base de P. **m1 :** $\frac{B^k}{k} \to [0,0,0][0,0,1][0,0,0] = J$ ps $P^{-1}AP = I+J$ dc $\lim \frac{A^k}{k} = PJP^{-1} = A-I$ **m2 :** $A^k = kA+(1-k)I$ dc $\frac{A^k}{k} \to A-I$

CCINP PSI 2021 (matrices à diagonale propre)

Enoncé 35 - 1321146 Soit D_n l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\chi_A(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - a_{kk})$.

1) Montrez que toute matrice triangulaire est dans D_n.
2) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans D_n ?
3) L'ensemble D_n est-il un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
4) Montrez, si $M \in D_n$, alors $M + aI_n \in D_n$ pour tout réel a.
5) Montrez toute matrice de D_2 est triangulaire.
6) Exhibez un ensemble de matrices de D_3 nilpotentes non triangulaires.

RMS 132-1146

Q2 $rg1$ dc 0 vp dc non. **Q3** $E_{1n}, E_{n1} \in D_n$ mais pas $M = E_{1n} + E_{n1}$ cr 1 vp cr $M(e_1+e_n) = (e_1+e_n)$. **Q4** si $\lambda_k = m_{kk}$ vp de M, les vp de $M = aI_n$ st $\lambda_k + a = [M+aI_n]_{kk}$. **Q5** si $M = [a,b][c,d]$, $\chi_M = (\lambda-a)(\lambda-d) - bc = (\lambda-a)(\lambda-d)$ ssi $bc = 0$. **Q6** $[0,a,0][0,0,0][b,0,0]$

Mines-Telecom PSI 2021 Mines-Ponts PSI 2017-2013 (morphisme de polynômes)

Enoncé 36 - 124646 Soient $E = \mathbb{C}_3[X]$ et $\varphi : P \in E \to P(1-X) \in E$ (**Mines-Ponts :** $E = \mathbb{R}_n[X]$)

1) Montrez φ endomorphisme. (**Mines-Ponts :** Question absente)
2) Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique de E (**Mines-Ponts :** Question absente)
3) L'endomorphisme φ est-il injectif? bijectif?
4) Ecrire A^{-1}. (**Mines-Ponts :** Question absente)
5) Donnez les éléments propres de φ.

Mathieu 2021 RMS 128-792 124-646

Q3-4 $\varphi^2 = Id$. **Q5** $P(1-X) = P(1/2+(1/2-X)) = \varepsilon P(X) = \varepsilon P(1/2-(1/2-X))$ dc parité / $\frac{1}{2}$ $1(X-\frac{1}{2})^{2i}$ et $-1 : (X-\frac{1}{2})^{2i+1}$.

CCP PSI 2021-2019 (matrice $X\,{}^tX$) ✌

Enoncé 37 - 1301206 Soit $X \neq 0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = X\,{}^tX$.

1) Déterminez le rang et le spectre de A.
2) Calculez le polynôme caractéristique de A.
3) Montrez l'égalité $\det(I_n + A) = 1 + {}^tXX$.

BEOS 6334 RMS 130-1206

Q1 rg1 et vp :1, ${}^tXX$. **Q2** $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - {}^tXX)$ **Q3** $\det(I+A) = \prod \lambda_i = 1^{n-1}(1+{}^tXX)$.

Mines-Ponts PSI 2021 (commutant d'un endomorphisme cyclique) ✷

Enoncé 38 - 21070201

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose, il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E

1) Montrez existence et unicité du n-uplet $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \cdots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.
2) Montrez $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ annule u. Montrez si Q annule u, alors Q est multiple de P
3) En déduire CNS pour que u soit diagonalisable.
4) On note $\mathbb{K}[u] = \left\{Q(u),\ Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$. Déterminez $\dim \mathbb{K}[u]$
5) Montrez que le Commutant de u est $\mathbb{K}[u]$.

Romain 2021

Q1 base **Q2** $P(u)(u^k(x_0)) = u^k(P(u)(x_0)) = 0$. pr dvs. euclid., $Q = AP + R$ av. $\deg R \leq n-1$ ps $R(u) = 0$ dc si $R \neq 0$, $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ lié. absurde. Ok. **Q3** si P sc. rac smpls oK. si U diag de vp $\neq$ λ_i, $Q = \prod_i (X - \lambda_i)$ ann. u dc $P|Q$ dc P scd. rac spls. **Q4** P ann. deg n, dc $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$. si lié, il exist. pol annul de deg $n-1$. absurde. dc $\dim \mathbb{K}[u] = n$. **Q5** com $u \supset \mathbb{K}[u]$. st $g \in$ com u, al. $g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{i-1}(x_0)$ ps $g(u^k(x_0)) = u^k(g(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} u^{i-1}(u^k(x_0))$. com. $(u^k(x_0))$ base, $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{i-1} \in \mathbb{K}[u]$. Ok.

Note: u endo cyclique ssi $\exists x_0, \left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ base de E ssi $\mathbb{K}[u] =$ com u ssi $\chi_u = \mu_u$ ssi $\exists \mathscr{E}$ base tq $\operatorname{Mat}(u, \mathscr{E})$ compagnon.

Centrale PSI 2021 (traces des puissances itérées d'une matrice nulles) ✌

Enoncé 39 - 1321007

1) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$ et $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. Montrez A diagonalisable.
2) Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{tr} A^k = 0$ $\forall 1 \leq k \leq n-1$ et $\operatorname{tr} A^n \neq 0$. Montrez A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \dots, n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

RMS 132-1007

Q1 2 vp $\pm\lambda$ distinctes car $\neq 0$ car $\operatorname{tr}(A^2)\neq 0$. **Q2** $\operatorname{tr} A^n \neq 0$ dc exist une vp $\neq 0$. On a $n_1\lambda_1^k+\cdots+n_p\lambda_p^k=0$ pr $1\leq k\leq n-1$. A a n vp $\neq$ sinon $p\leq n-1$ et syst de Vandermonde a unique solution $(n_i)=(0)$. absurde.
Note: si $\operatorname{tr} A^n=0$, A est nilpotente.
Note: si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, 1 est la seule valeur propre de $A \iff \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^2)=\cdots=\operatorname{tr}(A^n)=n$

CCP PSI 2021 (polynome annulateur)

Enoncé 40 - 21063003
Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4=4M^2$ et 2 et -2 sont valeurs propres de M.
1) On suppose M non inversible. Montrez $\operatorname{Sp} M=\{0,-2,2\}$.
2) Montrez M diagonalisable.
Adrien 2021 RMS 132-1140

Q1 M annule $X^2(X-2)(X+2)$. **Q2** ou M non inv. 3 vp $\neq$ en dim 3, ou M inv. : via $\times M^{-2}$, $M^2=2I$.

CCP PSI 2021 (equation matricielle avec transposée) ☜

Enoncé 41 - 21062501 Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2+{}^tM=I_n$.
1) Montrez que si un polynôme P annule M, alors les vp de M sont des racines de P
2) On suppose M symétrique. M est-elle diagonalisable? Montrez $\det(M)\times\operatorname{tr}(M)\neq 0$.
3) On ne suppose plus M symétrique. Montrez M diagonalisable.
4) On suppose M inversible. Montrez 1 n'est pas vp de M puis M symétrique.
Gabriel 2021 RMS 132-1141

Q2 sym compl. annul X^2+X-1 scindé rac. spl ds $\mathbb{R}$ $\operatorname{Sp}\subset\{\alpha,\alpha'\}$ av $\alpha=\frac12\pm\sqrt5$. si $\mu(\alpha)=p$, $\operatorname{tr} M=\frac{n}{2}+(2p-n)\frac{\sqrt5}{2}\neq 0$ et $\det M\neq 0$. **Q3** $({}^tM)^2=(I-M^2)^2$ et ${}^t(M^2)={}^t(I-{}^tM)=I-M$ ps $M^4-2M^2+I=0$ de rac $0,1,\alpha,\alpha'$. **Q4** Si $MX=1X \implies (M^2-I)X=0={}^tMX$ dc ${}^tM$ non inversible. Absurde. M annule X^2+X-1 dc $M^2=I-M=I-{}^tM\implies M={}^tM$.

Mines-Ponts PSI 2021-2019 (endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$) ✷ ☜

Enoncé 42 - 130656 Soient p un projecteur d'un ev E de dimension n et $\varphi\in\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ tq $\varphi(f)=\frac12(p\circ f+f\circ p)$.
1) Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur p pour que φ soit un projecteur. (**2019 :** Question absente) .
2) Montrez $A=\{f\in\mathscr{L}(E),\ \operatorname{Im} p\subset\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} p\}$ et $B=\{f\in\mathscr{L}(E),\ \operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} p,\ \operatorname{Ker} p\subset\operatorname{Ker} f\}$ sont des sev de $\mathscr{L}(E)$. (**2019 :** Question absente) .
3) Montrez que φ est diagonalisable et précisez ses espaces propres.
RMS 132-686 130-656

Q1 $\varphi^2(f)=\frac14 p\circ f+\frac14 f\circ p+\frac12 p\circ f\circ p$. si $p\neq 0, Id$, on prd f tq $f(\operatorname{Ker} p)=\{0\}$ et $f(\operatorname{Im} p)=D$ droite de $\operatorname{Ker} p$ et alors $\varphi^2(f)=\frac14 f\circ p\neq\frac12 f\circ p=\varphi(f)$. recipr ok av $p=0, Id$. **Q2** $\{f,\ \operatorname{Im} f\subset F\subset\operatorname{Ker} f\}$ ev car $\operatorname{Im}(f+g)\subset\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker}(f+g)\supset\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$. **Q3** $\varphi^3(f)=\frac18(p\circ f+6p\circ f\circ p)+f\circ p)$ dc φ ann. $8X^3-12X^2+4X$, $\operatorname{Sp}\varphi\subset\{0,\frac12,1\}$ ds base adaptée à $\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Im} p$, $p\to[0,0][0,I]$. $f\in A$ ssi$\to[0,0][M,0]$ dc $A\subset E(\frac12)$. $f\in B$ ssi$\to[0,M][0,0]$ dc $A+B\subset E(\frac12)$ ps$\to[0,0][0,M]\subset E(1)$ et$\to[M,0][0,0]\subset E(0)$. pr des raisons de dimension, tout =.
***Note* :** Si A,B diag., $M\to AM+MB$ diag. avec vp $\lambda_A+\lambda_B$ de base $(X_i\,{}^tY_j)_{ij}$ av $AX=\lambda_A X$, ${}^tBY=\lambda_B Y$. (même ds $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). Récipr. Ok ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

III — Algèbre Linéaire

X PSI 2021 (décomposition d'une matrice selon une matrice de permutation) ✷ ✷ ☜

Enoncé 43 - 132335 Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez M s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} D_kC^k$ avec D_k diagonale et $C=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&&&\ddots&1\\ 1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$
RMS 132-335

av (E_i) bascan, en lignes $D=[E_2]\dots[E_n][E_1]$, $D^2=[E_3]\dots[E_n][E_1][E_2]\dots D^{n-1}=[E_n][E_1]\dots[E_{n-1}]$, ps comme $\operatorname{Diag}(d_i)M\times$ la ligne $L_i(M)$ par d_i, $D_0=\operatorname{Diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$, $D_1=\operatorname{Diag}(a_{12},a_{23},\dots,a_{n1}),\dots,D_{n-1}=\operatorname{Diag}(a_{1n},a_{21},\dots,a_{n,n-1})$.

Centrale PSI 2021 (sous-evs de matrices inversibles)

Enoncé 44 - 1321003 Soit F un sous-ev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tq toute matrice non nulle de F soit inversible.
1) Ici $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Montrez, pour toutes matrices A,B avec A inversible, $\exists\,\alpha\in\mathbb{C}$ tq $\alpha A-B$ ne soit pas inversible. En déduire $\dim F\leq 1$.
2) Ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Que peut-on dire de F si n est impair? Pour $n=2$, donnez un exemple avec F de dimension 2. Montrez que, si n pair, la dimension de F ne peut excéder n.
RMS 132-1003

Q1 $\alpha A-B=A(\alpha I-A^{-1}B)$, α vp de $A^{-1}B$. si (A,B) lib inv, $\alpha A-B$ non inv. **Q2** rais id. en dim impaire. $F=\{[a,-b][b,a]\}$. soit $(A_1,\dots,A_n)$ inv. et $x\neq 0$ ou $\exists(\alpha_i)\neq 0$ tq $\sum_i\alpha_iA_ix=0$ dc $\sum_i\alpha_iA_i$ non inv. ou $(A_1x,\dots,A_nx)$ base de $\mathbb{R}^n$. pr tt B inv, $\exists(\alpha_i)\neq 0$ tq $Bx=\sum_i\alpha_iA_ix=0$ dc $B-\sum_i\alpha_iA_i$ non inv.
Note: $G=\mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ est dense ds $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pr $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$; on peut trouver une base de mat. inversibles car $E=\overline{G}\subset\overline{\operatorname{Vect}(G)}=\operatorname{Vect}(G)$ (fermé dim finie).

Mines-Ponts PSI 2021 (commutant matrice 3×3) ✌

ENONCÉ 45 - 22020302 Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) Calculez M^n.
2) Déterminez une base de $F=\mathrm{Vect}\,(M^n)_{n\geq 1}$
3) Montrez que le commutant de M est exactement F.

BEOS 6165

Q1 av $J=[010][001][000]$, $M^n=I+nJ+\frac{1}{2}n(n+1)J^2$. **Q2** (I,J,J^2) **Q3** com $M\supset F$ un calcul simple av $[abc][def][ghi]$ donne $=F$.
Note: M cyclique ssi com $F=\mathbb{K}[F]$ ssi esp propres dans $\mathbb{C}$de dimension 1 ssi $\chi_M=\mu_M$.

CCINP PSI 2021 (matrices dans bases adaptées à noyau et image) ✷

ENONCÉ 46 - 1321128

1) Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2=0$ et $\mathrm{rg}\,u=n$.
(i) Montrez $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Im}\,u$.
(ii) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est $\left(\begin{smallmatrix}0&I_n\\0&0\end{smallmatrix}\right)$
2) Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3=0$ et $\mathrm{rg}\,u=2n$.
(i) Montrez $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Im}\,u^2$.
(ii) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\left(\begin{smallmatrix}0&I_n&0\\0&0&I_n\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$.

RMS 132-1128

Q1 $\mathrm{Im}\,u\subset\mathrm{Ker}\,u$ et th. du rg. st F tq $F\oplus\mathrm{Ker}\,u=\mathbb{R}^{2n}$, u isom. de F sr $\mathrm{Im}\,u$, $(e_1,\ldots,e_n)$ base de $\mathrm{Ker}\,u$ et $f_i\in F$ tq $u(f_i)=e_i$ dc $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n)$ base de $\mathbb{R}^{2n}$ et mat. Ok. **Q2** $\mathrm{Im}\,u^2\subset\mathrm{Ker}\,u$. st $u':x\in\mathrm{Im}\,u\to u(x)$, $\mathrm{Im}\,u'=\mathrm{Im}\,u^2$, $\mathrm{Ker}\,u'=\mathrm{Im}\,u\cap\mathrm{Ker}\,u$, th du rg à u' : $\dim\mathrm{Im}\,u=2n=\dim\mathrm{Im}\,u^2+\dim\leq n$ dc $\dim\mathrm{Im}\,u^2\geq n$ dc $\mathrm{Im}\,u^2=\mathrm{Ker}\,u$ ps $\dim(\mathrm{Im}\,u\cap\mathrm{Ker}\,u)=n$ dc $\mathrm{Ker}\,u\subset\mathrm{Im}\,u$. st $F\oplus\mathrm{Ker}\,u=\mathbb{R}^{3n}$ et $\mathrm{Ker}\,u\oplus G=\mathrm{Im}\,u$. u' isom. de G sur $\mathrm{Im}\,u^2$. st $(e_1,\ldots,e_n)$ base de $\mathrm{Ker}\,u$, $g_i\in G$ tq $u'(g_i)=e_i$, et $f_i\in F$ tq $u(f_i)=g_i$, alors $(e_1,\ldots,e_n,g_1,\ldots,g_n,f_1,\ldots,f_n)$ base et mat. Ok.

CCINP PSI 2021 (jordanisation matrices 4×4 nilpotentes)

ENONCÉ 47 - 1321126 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 4.

1) Soit u un endomorphisme de E tq $\mathrm{rg}\,u=2$ et $u^2=0$. **(i)** Montrez $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Im}\,u$. **(ii)** Montrez il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$
2) Soit u un endomorphisme de E tq $\mathrm{rg}\,u=3$ et $u^4=0$.
(i) Montrez $\mathrm{Ker}\,u^2=\mathrm{Im}\,u^2$. **(ii)** Montrez il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$

RMS 132-1126

Q1 $u\circ u=0$ et m dim. (e_1,e_2) base de $\mathrm{Im}\,u$ ps $e_i=u(f_i)$. base (e_1,e_2,f_1,f_2). **Q2** $u^2\circ u^2=0$ et m dim. $x\notin\mathrm{Ker}\,u^3$ ps base $(u^3(x),u^2(x),u(x),x)$.

ENS PSI 2021 (pseudo-inverse d'une matrice) ✷ ✷

ENONCÉ 48 - 132155 Soit $n\geq 2$. On appelle pseudo-inverse de $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB=BA$, $A=ABA$ et $B=BAB$. Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note a l'endomorphisme canoniquement associé.

1) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\mathrm{rg}\,(a)=\mathrm{rg}\,(a^2)=r$. Montrez $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}\,a\oplus\mathrm{Im}\,a$. Montrez il existe $C\in\mathscr{G}l_r(\mathbb{R})$ et $P\in\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ tq $A=P\left(\begin{smallmatrix}C&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)P^{-1}$
2) Montrez que $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse ssi $\mathrm{rg}\,(a^2)=\mathrm{rg}\,(a)$
3) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un pseudo-inverse $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, a et b canoniquement associés.
(i) Montrez $a\circ b$ est un projecteur dont on précisera image et noyau.
(ii) Montrez A admet un unique pseudo-inverse que l'on notera A^+.
(iii) Montrez A^+ est un polynôme en A.
4) On suppose que A^+ existe et que $(\mathrm{Im}\,a)^\perp=\mathrm{Ker}\,a$. Soit $y\in\mathbb{R}^n$. Montrez que le vecteur A^+y minimise la fonction $f:x\longrightarrow\|Ax-y\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ puis qu'il est le vecteur de norme minimale parmi tous les vecteurs qui minimisent f.

RMS 132-155

Q1 $\mathrm{Ker}\,a\subset\mathrm{Ker}\,a^2$ dc $=$. st $x\in\mathrm{Ker}\,a\cap\mathrm{Im}\,a, a(x)=0$ et $x=a(y)$ ps $a^2(y)=0$ ps $a(y)=0=x$. dc a induit isom. de $\mathrm{Im}\,a$ sur $\mathrm{Im}\,a$. ds base adaptée à $\mathrm{Im}\,a\oplus\mathrm{Ker}\,a$ mat. est $[C,0][0,0]$ av C inv. **Q2** $\Leftarrow B=P\begin{pmatrix}C^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ Ok. $\Rightarrow$ si $x\in\mathrm{Ker}\,a\cap\mathrm{Im}\,a, x=ay, ax=0$ ps $0=bax=abx, x=ay=abay=abx=0$ dc $\mathrm{Ker}\,a\oplus\mathrm{Im}\,a=\mathbb{R}^n$ dc $\mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,a^2$, $\mathrm{Ker}\,a=\mathrm{Ker}\,a^2$, $\mathrm{rg}\,a=\mathrm{rg}\,a^2$. **Q3** **(i)** $ab=(aba)b$. $\mathrm{Im}\,(ab)\subset\mathrm{Im}\,(a)$. recipr ok cr $ax=(ab)(ax)$. $\mathrm{Ker}\,(ab)\supset\mathrm{Ker}\,(b)$. recipr ok cr $bx=b(abx)=0$. **(ii)** ds base adaptée à $\mathrm{Im}\,a\oplus\mathrm{Ker}\,b=\mathbb{R}^n$, $a\to[C,D][0,0], b\to[E,0][F,0]$ $AB=[I,0][0,0]=BA$ donne $CE+DF=EC=I, ED=FC=FD=0$ ps $E=C^{-1}$ ps $D=F=0$. unicité Ok. **(iii)** $E=C^{-1}=P(C)$ dc $A^+=P(A)$ via base. **Q4** $\|Ax-AA^+y+AA^+y-y\|^2=\|Ax-AA^+y\|^2+\|AA^+y-y\|^2$ cr $Ax-AA^+y\in\mathrm{Im}\,a\perp AA^+y-y\in\mathrm{Ker}\,a$ cr $A(A^+Ay-y)=AA^+Ay-Ay=0$. si x minimise f, $\|Ax-AA^+y\|=0$ dc $Ax=AA^+y$ ps $A^+Ax=A^+y$ et $\|A^+Ax\|\leq\|x\|$ cr $A^+A=AA^+$ proj $\perp$ cr $\mathrm{Ker}\,b=\mathrm{Ker}\,a=(\mathrm{Im}\,a)^\perp$.
Note: un pseudo-inv. vérif $aba=a$ et $bab=b$. existe tjrs ms pas unicité, autant que choix supplémentaires I_a,K_a tq $K_a\oplus\mathrm{Ker}\,a=\mathbb{R}^n=I_a\oplus\mathrm{Im}\,a$.
Note: ici la condition supplémentaire $ab=ba$ donne unicité ms pas existence ($\mathrm{rg}\,a=\mathrm{rg}\,a^2$) et alors $I_a=\mathrm{Ker}\,a, K_a=\mathrm{Im}\,a$.
Note: la condition de Q4 $(\mathrm{Im}\,a)^\perp=\mathrm{Ker}\,a$ amène ${}^t(AB)=AB$ et ${}^t(BA)=BA$, c'est alors le pseudo-inverse de Moore-Penrose. ***Note:*** le système $Ax=y$ a des solutions ssi $AA^+y=y$. Sinon A^+y minimise l'approche et est de norme minimale (euclidienne).

Mines-Ponts PSI 2021-2019-2018 (ev engendré par matrices nilpotentes) ✷

ENONCÉ 49 - 129708

Soient $n\geq 2$, $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{N}$ celui des matrices nilpotentes.
1) Les ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{N}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2) Montrez que l'espace engendré par $\mathscr{N}$ est inclus dans $\mathscr{H}$. (**2019-2018 :** Question absente) .
3) Cette inclusion est-elle une égalité? (**2019 :** Montrez égalité) (**2018 :** Déterminez $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{N})$)

RMS 132-676 130-634 129-708

Q1 $\mathcal{H} =$ Ker tr et $\mathcal{N}$ non stab. par + : $M = E_{n1} + E_{1n}$ verif $M^{2p}E_1 = E_1$. **Q2** si $N \in \mathcal{N}, N^n = 0$ dc Sp $N \subset \{0\}$ dc = dc tr $N = 0$ **Q3 m1 :** on trouve n^2-1 matrices nilpotentes libres : $(M_{ij})_{i\neq j}, (B_i)_{i\geq 2}$ avec $B_i = E_{11} + E_{1i} - E_{i1} - E_{ii}$. $B_i^2 = 0$ car restriction à (e_1, e_i) est $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$. **m2** si tr $M = 0, M = \sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}(E_{ii} + E_{ni} - E_{in} - E_{nn}) + \sum_{i\neq j\neq n} m_{ij}E_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1}(m_{nj} - m_{jj})E_{nj} + \sum_{i=1}^{n-1}(m_{in} + m_{ii})E_{in}$

Note: Dans un ev de dimension n, f est nilpotente ssi $f^n = 0$.

Th de Gerstenhaber: tt sev de mat. nilp est de dim $\leq \frac{n(n-1)}{2}$ et tt sev de dim $\frac{n(n-1)}{2}$ est tq qu'il ex. base dt laquelle ce st les mat. triang. strictes

---

X PSI 2021 (Classe de similitude) ✷ ✷

ENONCÉ 50 - 132336 Déterminez les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est finie

RMS 132-336

av $D =$ Diag(d_i), si $i \neq j$, $[DAD^{-1}]_{ij} = \frac{d_i}{d_j}a_{ij}$ infini dc $a_{ij} = 0, A$ diagonale. si 2 coeff diag ≠ par ex $a_{11} \neq a_{22}$, on prd $T = \left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $P =$ Diag(T, I_{n-2}), alors $[P^{-1}AP]_{12} = a(a_{11} - a_{22})$ infini dc $A = \lambda I$. recipr. Ok.

Note: Sim$A$ est finie ssi Sim$A$ est bornée ssi Sim$A$ compacte ssi A homothétie.

Note: A est nilpotente ssi $O \in \overline{\text{Sim}A}$ (continuité de χ qui vaut constante X^n).

Note: A est diagonalisable ssi une matrice diagonale ∈ Sim$A$ ssi Sim$A$ fermé (dans $\mathbb{C}$).

Note: Sim$A$ non ouvert, car son intérieur est vide : Sim$A \subset \{M,\ \text{tr}\, M = \text{tr}\, A\}$.

CCINP PSI 2021 (matrice compagnon)

ENONCÉ 51 - 22031801 Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix}$

1) Calculez le polynôme caractéristique χ_A de A.

2) Soit φ un endomorphisme de E, où dim $E = n+1$. On dit que φ est cyclique si $\exists x \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^n(x))$ soit une base de E. Montrez alors que si φ est cyclique, alors il existe une matrice représentant φ de la forme de A.

BEOS 6078

Q1 via $L_0 + \lambda L_1 + \dots + \lambda^{n-1}L_n + \lambda^n L_{n+1} \to L_{n+1}$ et mat. triang., $\chi_A = \lambda^{n+1} + \sum_i a_i\lambda^i$ **Q2** ds base donnée.

Note: $\chi_u = \mu_u$ ssi u endomorphisme cyclique ssi com$(u) = \mathbb{K}[u]$ ssi matrice de u ds bonne base = matrice compagnon.

ENSEA PSI 2021 (racine carrée matrice 3 × 3)

ENONCÉ 52 - 1321125 Trouvez toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RMS 132-1125

$A^4 = U^2 = 0$ nilp, C-H $A^3 = 0$ Sp $A = \{0\}$ ps $AU = UA$ av $A = [a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]$ ps $d = g = h = 0$ $a = i$ ps $a = e = 0$. recipr ok av $f = 1/b, b \neq 0$.

Centrale PSI 2021 (matrices 2 × 2 de diagonale nulle) ✌

ENONCÉ 53 - 1321004 Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

1) Montrez que S est diagonalisable et précisez ses valeurs propres.

2) Montrez que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3) Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) =$ Diag$(1,2)M - M$ Diag$(1,2)$. Déterminez Imφ. Montrez il existe C et D telles que $S = DC - CD$.

RMS 132-1004 BEOS 6337

Q1 sym. r. $\pm\sqrt{34}$ **Q2** $P = [E_1, C_1]$ $P^{-1}SP = [0,34][1,0] = U$ **Q3** Imφ = mat diag. nulle. $U = D'M - MD'$ ps $S = DC - CD$ av $D = PD'P^{-1}, C = PMP^{-1}$.

Note: Se généralise : toute mat. de trace nulle est semblable à une mat. de diagonale nulle et $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}\, M = 0\} = \{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$

Mines-Ponts PSI 2021 (nullité déterminant 5 × 5) ✷

ENONCÉ 54 - 132672 Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Montrez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix} \neq 0$ ssi $x \neq y$.

RMS 132-672 BEOS 6263

(C_3, C_4, C_5) lib. si $x \neq y$, C_1 pas cb lin dc (C_1, C_3, C_4, C_5) lib. id (C_2, C_3, C_4, C_5) lib. ps ds base (C_2, C_3, C_4, C_5, e), la fam (C_2, C_3, C_4, C_5, e) a pour mat triang av diagonale $1, 1, 1, 1, a$. rg$(C_1, C_3, C_4, C_5) = 4$ donne $a \neq 0$ puis ok.

IMT PSI 2021 (système linéaire 2 × 4) ✌

ENONCÉ 55 - 1321124 Soient $m, a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} mx + my + mz + t & = & a \\ x + my + z + mt & = & b \end{array}\right.$

RMS 132-1124

rg2 ssi $m \neq 1$ et alors e.a. de dim $p - r = 2$ alors $mx + t = -my - mz$ et $x + mt = b - my - z$.

IV — Algèbre Euclidienne

Mines-Ponts PSI 2021-2017 (polynôme matriciel)

Enoncé 56 - 128797 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique (**2017 :** diagonalisable) et $B = A^3 + A + I_n$. Montrez que A est un polynôme en B. (**2017 :**Qu'en est-il si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?)

RMS 132-695 128-797 BEOS 6339

$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ et $Q^{-1}P(B)Q = \mathrm{Diag}(P(\lambda_i^3+\lambda_i+1))$ on cherche $P(\mu_i) = \lambda_i$ av $\mu_i = \lambda_i^3+\lambda_i+1$. par polynômes de Lagrange sur les $\mu_i \neq$. possible car $f : x \to x^3+x+1$ injective : $f'(x) = 3x^2+1 > 0$. Dans $\mathbb{C}$, f non injective car $f(i) = f(0) = 1$ d'ou non.

CCP PSI 2021-2015-2014 - Mines PSI 2011 (matrice normale nilpotente)

Enoncé 57 - 122557 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$ et $A^p = 0$. En considérant $B = {}^tAA$, montrez $A = 0$. (**CCP 2015-2014 :** Montrez $A\,{}^tA$ nilpotente, puis trouvez tous les A.) (**Mines :** Seulement, trouvez A) .

RMS 132-1150 122-557 120-1057 ODLT 22-234 21-280

$({}^tAA)^p = 0$ par comm. $S = {}^tAA$ sym. diag. av. $\mathrm{Sp}\,A \subset \{0\}$ dc $S = 0$. puis $\mathrm{tr}\,({}^tAA) = 0 = \|A\|_2^2$.
Note: Toute matrice normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (${}^tAA = A\,{}^tA$) est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ssi symétrique.
Note: Pour toute matrice normale, $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \mathrm{Ker}(\lambda I - {}^tA)$ car $\|(\lambda I - A)X\|_2 = \|(\lambda I - {}^tA)X\|_2$

Mines-Ponts PSI 2021-CCP PSI 2012 (encadrement valeur propre)

Enoncé 58 - 123987 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrez $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$.

RMS 132-698 123-987

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ une Bon de vect. pro. de S. $\lambda_1\|X\|_2^2 \leq {}^tXSX = \sum_i x_i^2\lambda_i \leq \lambda_n \sum_i x_i^2 = \lambda_n\|X\|_2^2$. Puis ${}^tXSX = \frac{1}{2}\,{}^tXAX + {}^tX\,{}^tAX = {}^tXAX$. Pour $AX = \mu X$, ${}^tXSX = \mu\|X\|_2^2 \leq \lambda_n\|X\|_2^2$ avec $X \neq 0$.

CCINP PSI 2021 (transformation de Cayley)

Enoncé 59 - 1321152 Soient $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tU \\ U & I_n \end{pmatrix}$

1) Calculez ${}^tMM$. En déduire M est inversible.
2) Montrez que $M^{-1}\,{}^tM$ et une matrice orthogonale.

RMS 132-1152 BEOS 6356

Q1 $M = I + A$ av $A = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tU \\ U & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ps ${}^tMM = (I-A)(I+A) = I - A^2$ av $A^2 = \begin{pmatrix} -\|U\|^2 & 0 \\ 0 & -U\,{}^tU \end{pmatrix}$ A^2 n'a pas vp 1 car vp ≤ 0 : $-\|U\|^2$ dble et 0 : $-U\,{}^tU$ de rg 1 et $\mathrm{tr}(-U\,{}^tU) = -\|U\|^2$. **Q2** $M^{-1}\,{}^tM\,{}^t(M^{-1}\,{}^tM) = (I+A)^{-1}(I-A)(I+A)(I-A)^{-1} = I$ car commutent : $B^{-1} = P(B)$ par C-H.
Note: $B^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det B}P(B)$ avec $\chi_B(X) = XP(X) + (-1)^n\det(B)$
Transformation de Cayley: si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $(I+A)^{-1}(I-A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sans vp -1 (cad $\in SO_n$) et réciproquement.

X PSI 2021 (famille obtusangle) ✷ ✷

Enoncé 60 - 132338
Soient E un espace euclidien de dimension n et $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs de E vérifiant $\left(x_i \mid x_j\right) < 0$ pour tous $i \neq j$. Montrez $k \leq n+1$.

RMS 132-338

supp. $\sum_i \lambda_i x_i = 0$. si λ_i non ts nuls, par ex. il ex. $\lambda_i > 0$. Notons $I = \{1 \leq i \leq k,\ \lambda_i > 0\}$ et $J = \{\lambda_i < 0\}$. alors $\sum_I \lambda_i x_i = \sum_J -\lambda_j x_j$ ps si $J \neq \emptyset$, av. $x = \sum_J -\lambda_j x_j$, alors $\|x\|^2 = \sum_I\sum_J -\lambda_i\lambda_j(x_i|x_j) < 0$. absurde, dc ou ts $\lambda_i \geq 0$ ou ts $\lambda_i \leq 0$. montrons $\mathrm{rg}(x_i) = r \geq k-1$ (dc $k \leq n+1$) : si $r \leq k-2$, 2 vct cb lin des autres, par ex, $x_k = \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i x_i$ et $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1}\beta_i x_i$ dc $x_k - x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}(\beta_i - \alpha_i)x_i = 0$. absurde.
Note: $\forall\,\alpha < 0$, il existe une famille (v_i) de $n+1$ vecteurs de même norme et tq $\left(v_i \mid v_j\right) = \alpha$, et alors $\cos(v_i, v_j) = \frac{-1}{n}$, $v_1 + \cdots + v_{n+1} = 0$ et $\|v_i\| = \sqrt{-n\alpha}$, unique à un automorphisme orthogonal près.

CCINP PSI 2021 (segment de matrices orthogonales) ☜

Enoncé 61 - 1321151 Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A+2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
1) Calculez $A\,{}^tB + B\,{}^tA$. *Indication :* calculez $M\,{}^tM$.
2) Montrez $A = B$

RMS 132-1151

Q1 $M\,{}^tM = A\,{}^tA = B\,{}^tB = I$ dc $A\,{}^tB + B\,{}^tA = 2I$ **Q2** par trace, $2(A|B) = 2n$ puis C-S, $(A|B) \leq \|A\|\|B\| = \sqrt{n}^2$ dc $A = \lambda B$ ps $2\lambda = 2$.
Note: Par Cauchy-Schwarz, stricte convexité de la norme euclidienne sur les sphères et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset S_2(0, \sqrt{n})$.

Mines-Ponts PSI 2021 (polynômes de l'Hermite)

Enoncé 62 - 132691 Soit $\varphi : x \to e^{-x^2}$. On admet φ intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.
1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez il existe un unique polynôme H_n tq, $\forall\,x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$. Précisez degré et coefficient dominant de H_n.
2) Montrez que l'application $(P, Q) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left(P \mid Q\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3) Montrez, $\forall\,n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\,P \in \mathbb{R}[X]$, $\left(P \mid H_n\right) = \left(P' \mid H_{n-1}\right)$. En déduire la famille (H_n) est orthogonale. Calculez $\|H_n\|^2$ pour tout n.
4) Soient $x, t \in \mathbb{R}$. Étudiez la convergence de la série de terme général $\frac{t^n H_n(x)}{n!}$.

RMS 132-691

Q1 recurr sur n $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-H_n'(x)$ $\deg H_n=n$ coeff dom 2^n. **Q2** $P(t)Q(t)\varphi(t)\sim_{+\infty}|a_p|t^p|b_q|t^q e^{-t^2}=o(1/t^2)$. **Q3** par ipp. si $p=\deg P<n$, $\left(P\,\middle|\,H_n\right)=\left(P^{(p+1)}\,\middle|\,H_{n-p+1}\right)=0$ dc $H_n\in(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp=\mathrm{Vect}(H_0,\dots,H_{n-1})^\perp$. $\|H_n\|^2=\left(H_n'\,\middle|\,H_{n-1}\right)=\left(H_n^{(n)}\,\middle|\,H_0\right)=2^n n!\int_{\mathbb{R}}\varphi=2^n n!\sqrt{\pi}$. **Q4** $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|\sim|t|\frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{2^n|x|^n(n+1)}\sim|t|\frac{2|x|}{n+1}\to 0 R=+\infty$.

Note: Via $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$, on peut calculer la somme de la série génératrice exponentielle de (H_n) : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n H_n(x)}{n!}=e^{2xt-t^2}$.

Centrale PSI 2021 (formes linéaires et bilinéaires sur les polynômes)

ENONCÉ 63 - 1321010

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et pour $0\le k\le n-1$, u_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $u_k:\sum_{j=0}^{n-1}a_jX^j\longrightarrow a_k$.

1) Montrez que $(u_0,\dots,u_{n-1})$ est une base de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R}\right)$.

2) Soient $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1})$ distincts et , pou $0\le k\le n-1$, v_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $v_k:P\to P(a_k)$. Déduire de la question précédente que $(v_0,\dots,v_{n-1})$ est une base de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R}\right)$.

3) Montrez il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes telle que :

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est de degré n.

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n est positif.

(iii) Pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1\frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t=\delta_{mn}$.

RMS 132-1010

Q1 $u_k(X^j)=\delta_{kj}$. $\mathscr{E}=(u_k)$ base duale de (X^j) **Q2** $v_k(X^j)=a_k^j$ dc mat de (v_k) ds $\mathscr{E}$ est vandermonde en $(\alpha_i)_i$ ts $\neq$ dc inv. **Q3** $(P|Q)=\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ pdt scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, déf. en 0 : $\sim_0\frac{a_pt^pb_qt^q}{\sqrt{t}}=\frac{a_pb_q}{t^{1/2-p-q}}$ ou p,q val. de P,Q et $\frac12-p-q<1$. id en 1. il ex. une unique BON déduite par Schmidt de $(1,X,\dots,X^n)$, unique à $\pm$ près, vérifiant $\mathrm{Vect}(1,\dots,X^k)=\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_k)$ pour $0\le k\le n$ équiv à $\deg P_k=k$. Unicité av cond. coeff dom ≥ 0.

Note: $(v_k)_k$ est la base duale de $(L_k)_k$ polynômes de Lagrange en les α_i

---

ENS PSI 2021 (espace euclidien sur $\mathscr{F}(\{0,1\}^n,\mathbb{R})$) ✷ ✷ ☜

ENONCÉ 64 - 132158 Soit Φ l'ev des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\left(\varphi\,\middle|\,\psi\right)=\sum_{x\in\{0,1\}^n}\varphi(x)\psi(x)$.

Pour $u\in\{0,1\}^n$, on pose $\delta_u:x\in\{0,1\}^n\longrightarrow 1$ si $x=u$ et 0 sinon et $\chi_u:x=(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}^n}(-1)^{\sum_{i=1}^n u_ix_i}$

1) Montrez que $(\delta_u)_{u\in\{0,1\}^n}$ est une base orthonormée de Φ. Précisez les coordonnées de φ dans cette base.

2) Montrez que $(\chi_u)_{u\in\{0,1\}^n}$ est une base orthonormée de Φ.

3) Pour $\varphi\in\Phi$, on pose $\widehat{\varphi}:u\longrightarrow\left(\varphi\,\middle|\,\chi_u\right)$. Calculez $\widehat{\delta_u}$ et $\widehat{\chi_u}$

4) Montrez que $\varphi\longrightarrow\widehat{\varphi}$ est une isométrie de φ.

5) Montrez, pour tous $\varphi,\psi\in\Phi$, $\left(\widehat{\varphi}\,\middle|\,\psi\right)=\left(\varphi\,\middle|\,\widehat{\psi}\right)$.

RMS 132-158

Q1 st $A=\{0,1\}^n$. Φ ev eucl. dim 2^n. $\varphi=\sum_{u\in A}\varphi(u)\delta_u$. **Q2** $\chi_u(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ sel. parité nbre de 1 en commun à la meme pos. de x,u. $\left(\chi_u\,\middle|\,\chi_v\right)=\sum_{x\in A}\chi_u(x)\chi_v(x)=\sqrt{2}^n\sum\chi_x(u+v)=0$ car si $I_w=\{x\in A,\ x,w$ nb com. 1 pair$\}$, $J=A\setminus I$, $\sum_x\chi_x(w)=\sum_{x\in I}\chi_x(w)+\sum_{x\in J}\chi_x(w)=0$ cr $|I|=|J|$ par bij. (si $w_1=1$) $\xi:I\to J, x\to(1-x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $\xi^2=Id$. si $w_1=0$, simil. av $\inf\{i,w_i=1\}$. **Q3** $\widehat{\delta_v}(u)=\left(\delta_v\,\middle|\,\chi_u\right)=\chi_u(v)=\chi_v(u)$ dc $\widehat{\delta_v}=\chi_v$ et $\widehat{\chi_v}(u)=\left(\chi_v\,\middle|\,\chi_u\right)=\delta_v(u)$ **Q4** lin. et img BON = BON pr Q3. **Q5** sur base BON (δ_u) vaut $\left(\widehat{\delta_u}\,\middle|\,\delta_v\right)=\left(\chi_u\,\middle|\,\delta_v\right)=\chi_u(v)=\chi_v(u)=\left(\chi_v\,\middle|\,\delta_u\right)$. Ok pr bilin.

Note: $\varphi\longrightarrow\widehat{\varphi}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\left((\chi_u+\delta_u)_u\right)$

CCP PSI 2021-2019 (condition suffisante pour base) ✷

ENONCÉ 65 - 1301224 Soit E un ev euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2<1$ (**2019 :** Inégalité mise en Q2) .

1) Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels. Montrez $\left\|\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i\right\|^2\le\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\ \sum_{i=1}^n\|u_i\|^2$.

2) En déduire la famille $(e_i+u_i)_{1\le i\le n}$ est une base de E.

RMS 132-1147 130-1224

Q1 par CS ddble produit, $\|\lambda_iu_i\|^2\le(\sum_{i=1}^n|\lambda_i|\|u_i\|)^2$ puis CS ds $\mathbb{R}$**Q2** soit $\sum_{i=1}^n\lambda_i(u_i+e_i)=0$ dc $\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i=-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i$ puis $\|\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\|^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2$ et Q1 donne $<\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\ \sum_{i=1}^n\|u_i\|^2$ sauf si $\sum_i\lambda_i^2=0$. Ok.

Mines-Ponts PSI 2021 (supplémentaire orthogonal)

ENONCÉ 66 - 132692 Soit F un espace préhilbertien réel et F un sev de E.

1) Montrez $F\subset(F^\perp)^\perp$

2) Dans le cas où $E=\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\left(f\,\middle|\,g\right)=\int_0^1P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $F=\left\{P\in E,\ P(0)=0\right\}$, calculez $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.

3) A quelle condition-t-on $F=(F^\perp)^\perp$?

RMS 132-692

Q2 $F=XR[X]$. $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\left(Q(X)\,\middle|\,XP(X)\right)=\left(XQ(X)\,\middle|\,P(X)\right)=0\Longrightarrow XQ(X)\in E^\perp=\{0\}$ dc $Q(X)=0$, soit $F^\perp=\{0\}$ ps $(F^\perp)^\perp=E$. Ici, $F\not\subseteq(F^\perp)^\perp$. **Q3** CS : F dim finie. CN : F fermé car $G^\perp$ fermé comme intersec. des noyaux fermés des app lin cont $x\to\left(x\,\middle|\,g\right)$ CS : $F+F^\perp=E$: si $x\in(F^\perp)^\perp$, $x=f+f'$ et $\|x\|^2=\|f\|^2+\|f'\|^2$ ps $\left(x\,\middle|\,f\right)=\|f\|^2$ et $\left(x\,\middle|\,x\right)=\left(f\,\middle|\,x\right)$ dc $\|x\|^2=\|f\|^2$ dc $f'=0$

Note: $F=(F^\perp)^\perp\Longrightarrow F$ fermé. réciproque vraie dans un Hilbert car $(F^\perp)^\perp=\overline{F}$.

Note: On a toujours $((F^\perp)^\perp)^\perp=F^\perp$ et $F+F^\perp=E\Longrightarrow F=(F^\perp)^\perp$

X PSI 2021 (quotient de Rayleigh) ✷ ✷ ☜

Enoncé 67 - 132340

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A) = \sup\left\{\left(Ax \,\middle|\, x\right),\ \|x\| = 1, x \in \mathbb{R}^n\right\}$.

1) Montrez que φ est bien définie et continue.

2) Que vaut $\varphi(A)$ pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$?

RMS 132-340

Q1 on pose $\psi : (x, A) \in S \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^t x A x$ cont. $\varphi(A) = \sup_{x \in S} \psi(x, A)$. Soit $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, par compacité, $\varphi(A_0) = \psi(x_0, A_0)$. pr $\|x - x_0\| \leq \eta, \|A - A_0\| \leq \eta$, on a $\psi(x_0, A_0) \leq \psi(x, A) + \varepsilon$ dc $\varphi(A) \geq \psi(x, A) \geq \psi(x_0, A_0) - \varepsilon = \varphi(A_0) - \varepsilon$. par sym, $\varphi(A_0) \geq \varphi(A) - \varepsilon$. Ok. **Q2** si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, via th spectr, et BON, ${}^t XAX = \sum_i \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_i x_i^2$ où λ_n est + grd vp. de A dc $\varphi(A) = \lambda_n$.

Quotient de Rayleigh: pr $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\rho(A, x) = \frac{(Ax|x)}{(x|x)}$. son image est $\left[\lambda_1, \lambda_n\right]$ $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ vp de A. Les vecteurs propres sont points critiques.

Note: comme ${}^t XAX = {}^t X\left(\frac{1}{2}(A + {}^t A)\right)X$, on a $\varphi(A) = \max \operatorname{Sp} S$ avec $S = \frac{1}{2}(A + {}^t A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Mines-Ponts PSI 2021 (diagonalisabilité d'une composée de projecteurs orthogonaux) ✷ ☜

Enoncé 68 - 132699 Dans un ev euclidien E, soient p, q deux projecteurs orthogonaux respectiv. sur les sevs F et G.

1) Montrez $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.

2) Montrez E est la somme orthogonale de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ et de $\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.

3) Montrez $p \circ q$ est diagonalisable.

RMS 132-699

Q1 ${}^t(PQP) = PQP$. **Q2** $(F + G^\perp)^\perp = G \cap F^\perp$. **Q3** on pose F tq $F \oplus (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \cap \operatorname{Ker} p) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ et $F \perp$. ds BON adaptée à $F \oplus (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \cap \operatorname{Ker} p) \oplus \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ mat. de $p \to [S, 0, 0][C, 0, 0][0, 0, 0]$ et pr symétrie, $C = 0$, S sym. dc diag. et invers. cr si $x = y + z \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$, $p(x) = y + p(z)$ ps si $p(x) = 0$, $p(z) = -y = -p(y)$ dc $p(z + y) = 0 = p(x)$, cad $x \in (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \cap \operatorname{Ker} p$. de meme, $p \circ q \circ p \to [S', 0, 0][0, 0, 0][0, 0, 0]$ av S' sym. dc diag., $p \circ q \to [A, 0, 0][B, 0, 0][0, 0, 0]$ ps $AS = S'$, $SS' = S'S = S'$ dc S, S' codiag. ps $A = S'S^{-1}$ diag. Ok.

Note: $p \circ q$ est un projecteur (donc orthogonal) ssi $p \circ q = q \circ p$.

Note: Les vp de $p \circ q$ vérifient $\lambda \in \left[0, 1\right]$, via $(p \circ q)(x) = \lambda x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow \lambda \|x\|^2 = \left(p(x) \,\middle|\, q(x)\right) = \left(x \,\middle|\, q(x)\right) = \|q(x)\|^2$

CCP PSI 2021-2019-2018 (distance à un sev)

Enoncé 69 - 1291175 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Calculez A_n en distinguant 2 cas selon la parité de n. Donnée : $A_0 = 1$.

2) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Vérifiez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Calculez $d\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)$.

RMS 132-1149 130-1221 129-1175

Q1 $A_{2n+1} = A_1 = 0$. par ipp $A_{2n} = \frac{2n-1}{2} A_{2n-2}$, puis $A_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\ n!}$ $A_2 = \frac{1}{2}$ $A_4 = \frac{3}{4}$ $A_6 = \frac{15}{8}$. **Q3** $d^2 = \|X^3\|^2 - \|p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2$. $\|X^3\|^2 = A_6$. **m1** BO de $\mathbb{R}_2[X] : 1, X, X^2 - \frac{1}{2}$ puis $\|p(X^3)\|^2 = \frac{(X^3|1)^2}{\|1\|^2} + \frac{(X^3|X)^2}{\|X\|^2} + \frac{(X^3|X^2 - \frac{1}{2})^2}{\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2} = A_3^2 + \frac{A_4^2}{A_2} + 0$ **m2** $X^3 - p(X^3) \perp X^i$ avec $p(X^3) = aX^2 + bX + c$ donne

Centrale PSI 2021 (matrice de Hilbert) **A Terminer** ✷ ☜

Enoncé 70 - 1321011

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(s)s^k\,ds\right) X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

1) Justifiez que f_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit M_n la matrice de f_n dans la base canonique. Soit Y un vecteur colonne. Montrez que ${}^t Y M_n Y = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n y_k s^k\right)^2 ds$. En déduire que les valeurs propres de f_n sont strictement positives.

3) Soit $\lambda_{1,n}$ la plus petite vp de f_n. Montrez $\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$.

RMS 132-1011

Q1 pr $1 \leq i, j \leq n+1$, $M_n[i, j] = \int_0^1 s^{i+j-2} ds$ sym. réelle. si $f_n(P) = 0$, $\int_0^1 P(s)s^k ds = 0$ pr tt $0 \leq k \leq n$ dc, via pdt scal. $(P|Q) = \int_0^1 PQ$, $P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp = \{0\}$. **Q2** ${}^t Y M_n Y = \sum_{0 \leq i j \leq n} y_i y_j \int_0^1 s^{i+j} ds = \int_0^1 \sum_{ij} y_i y_j s^i s^j ds = \int_0^1 (\sum_i y_i s^i)^2 ds$. si $M_n Y = \lambda Y$, ${}^t Y M_n Y = \lambda\, {}^t Y Y > 0$ pr $Y \neq 0$ av ${}^t Y Y = \sum_i y_i^2 > 0$ dc $\lambda > 0$. **Q3**

Note: si $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $\int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$ avec f continue sur $\left[0, 1\right]$, f admet au moins $n+1$ racines distinctes dans $\left]0, 1\right[$.

Note: si $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$ avec f continue sur $\left[0, 1\right]$, alors f identiquement nulle (par Stone-Weierstraß).

CCP PSI 2021-2016 (produit scalaire)

Enoncé 71 - 127116 Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application $(P, Q) \longrightarrow < P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1) Montrez que c'est un produit scalaire.

2) Montrez que l'ensemble $E = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donnez sa dimension.

3) Calculez $d(1, E)$.

RMS 132-1148 127-116

Q1 $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(1) = 0$ amène 1 racine de multiplicité au moins $n+1$, dc $P = O$. **Q3** $\forall\, P$ tq $P(1) = 0$, alors $< 1, P >= 0$ donc $1 \perp E$, dc $d^2(1, E) = \|1\|^2 - \|p_E(1)\|^2 = \|1\|^2 = 1$

Mines-Ponts PSI 2021 (endomorphismes adjoints)

Enoncé 72 - 132693 Soient E un espace euclidien, f,g 2 endomorphismes vérifiant $\forall x,y\in E,\ \big(f(x)\,\big|\,y\big)=\big(x\,\big|\,g(y)\big)$.

1) Exprimez $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ en fonction de $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.

2) Soit F un sev de E. Montrez F est stable par f ssi $F^{\perp}$ est stable par g.

3) Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Existe t-il toujours un endomorphisme $g\in\mathscr{L}(E)$ vérifiant ces hypothèses?

RMS 132-693

Q1 $x\in\operatorname{Ker} f$ ssi $\forall y\in E\big(f(x)\,\big|\,y\big)=0$ ssi $\big(x\,\big|\,g(y)\big)=0$ ssi $x\in(\operatorname{Im} g)^{\perp}$ soit $\operatorname{Ker} f=(\operatorname{Im} g)^{\perp}$. par sym., $\operatorname{Ker} g=(\operatorname{Im} f)^{\perp}$. **Q2** $\forall x\in F, f(x)\in F$ ssi $\forall x\in F\ [\forall y\in F^{\perp}\big(f(x)\,\big|\,y\big)=0]$ ssi $\forall y\in F^{\perp}\ [\forall x\in F\big(x\,\big|\,g(y)\big)=0]$ ssi $g(F^{\perp})\subset F^{\perp}$ **Q3** oui par $\psi_y: x\to\big(f(x)\,\big|\,y\big)\in E^*$ et isomorph. $\varphi: E\to E^*$ $y\longrightarrow[x\to\big(x\,\big|\,y\big)]: g(y)=\varphi^{-1}(\psi_y)$. g linéaire car π^{-1} l'est et $\psi_{\alpha y+\beta y'}=\alpha\psi_y+\beta\psi_{y'}$.

Note: Tout endomorphisme d'un euclidien vérifie $|||u|||=|||u^*|||$ (normes d'opérateurs).

Note: Si E dim infinie, $\operatorname{Ker} u^*=(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ $\operatorname{Ker} u=(\operatorname{Im} u^*)^{\perp}$ mais $\operatorname{Im} u^*\subset(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ $\operatorname{Im} u\subset(\operatorname{Ker} u^*)^{\perp}$. Dans un Hilbert, $\overline{\operatorname{Im} u}=(\operatorname{Ker} u^*)^{\perp}$.

Note: Si E dim infinie, pas toujours existence de u^*, mais si E Hilbert et u continue, u^* existe (théorème de représentation de Riesz).

CCP PSI 2021-2019 (calcul de projeté orthogonal)

Enoncé 73 - 26198 On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Vérifiez que $\big(f\,\big|\,g\big)=\int_0^1 f(t)g(t)t^2\,dt$ est un produit scalaire sur E.

2) Vérifiez l'existence et calculez $\int_0^1 x^n\ln x\,dx$

3) Calculez le projeté orthogonal de $x\ln x$ sur le sev des fonctions affines de E.

4) 2019 : Calculez $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1(at+b-t\ln t)^2t^2\,dt$.

BEOS 6090 RMS 130-1222 Odlt 26-198

Q2 par ipp, $I_n=\frac{-1}{(n+1)^2}$. **Q3** $p(f)-f\perp 1,t$ et, via $p(f)=at+b$, $(p(f)|t,1)=(f|t,1)$ donne $a=\frac{11}{20}$ $b=\frac{-3}{5}$. ou aussi BO de $F:(1,t-\frac{3}{4}):(f|t-\frac{3}{4})=\frac{11}{20}$ et $(f|1)=\frac{-3}{16}$. **Q4** $d^2=\|f\|^2-\|p(f)\|^2=\frac{2}{125}-\frac{31}{2000}=\frac{1}{2000}$

Mines-Ponts PSI 2021-CCP PSI 2009 (endomorphisme symétrique)

Enoncé 74 - 161860002

Soit $(E,(.|.))$ un ev euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base quelconque de E. On pose $f(x)=\sum_{i=1}^n\big(e_i\,\big|\,x\big)e_i$

1) Montrez f est un endomorphisme symétrique.

2) Montrez $\operatorname{Sp} f\subset\mathbb{R}^{+*}$.

3) En déduire qu'il existe g, automorphisme symétrique tel que $g^2=f^{-1}$. Est-il unique? (**2009 :** Pas en déduire, et $g\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$)

4) Soit g un tel automorphisme. Montrez $(g(e_1),\dots,g(e_n))$ est une BON de E. (**2009 :** Question absente) .

RMS 132-697 Odlt 16-186

Q1 $(f(x)|y)=(x|f(y))=\sum_i(e_i|x)(e_i|y)$ **Q2** si $f(x)=\lambda x,\ x\neq 0,\ \lambda\|x\|^2=(x|f(x)=\sum_i(e_i|x)^2>0$ car base : $=0\implies x\in\operatorname{Vect}(e_i)^{\perp}$. **Q3** g,f^{-1} codiag. av f. sur BON $(f_1,\dots,f_n)$ vect. prop. $g(f_i)=\frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda_i}}f_i$. pas unic. **Q4** $e_j=\sum_{i=1}^n(e_i|f^{-1}(e_j))e_i$ unic. coord. dc $(e_i|f^{-1}(e_j))=\delta_{ij}=(g(e_i)|g(e_j))$

X PSI 2021 (équation $AM=M\,^tA$) ✷ ☜

Enoncé 75 - 132339 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N_A=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM=M\,^tA\}$.

1) Montrez $\dim N_A\geq n$.

2) Donnez un exemple de matrice A telle que $\dim N_A=n$.

RMS 132-339

Q1 $\varphi: M\to AM-M\,^tA$, $^t\varphi(M)=-\varphi(^tM)$ dc $\varphi(S_n)\subset A_n$ ps $\varphi(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))=\varphi(A_n)+\varphi(S_n)\subset\varphi(A_n)+A_n$ st $\dim\operatorname{Im}\varphi\leq n^2-n$ ps $\dim\operatorname{Ker}\varphi\geq n$. **Q2** av A sym cyclique $N_A=\operatorname{Com}(A)=\mathbb{R}[A]=\mathbb{R}_{n-1}[A]$, par ex $A=Diag(1,2,\dots,n)$.

Note: Par div. euclidienne, $\mathbb{K}[A]=\mathbb{K}_{p-1}[A]$ avec $p=\deg\mu_A$ donc $\mathbb{K}[A]$ de dim n ssi $\chi_A=\mu_A$ ssi A cyclique.

CCINP PSI 2021 (matrice normale racine cubique de I) ☜

Enoncé 76 - 1321153

Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\neq I_n,\ M^3=I_n$ et $^tMM=M\,^tM$.

1) Montrez $M\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

2) Déterminez toutes ses matrices vérifiant ces hypothèses sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

RMS 132-1153

Q1 $(^tM)^3=I$ ps $(^tMM)^3=I$ ps $S=\,^tMM$ sym diag. ds $\mathbb{R}$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}\subset\{1\}$ dc $S=I$. -1 pas vp, $M\in SO_n$. **Q2** $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}\subset\{1,j,j^2\}$, rotation angle $\frac{2\pi}{3}$.

Note: Si $M\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\dim E(1)=\mu(1)$, $\dim E(-1)=\mu(-1)$ et $\det M=(-1)^{\mu(-1)}$ où μ est la multiplicité.

CCP PSI 2021 (inf intégrale)

Enoncé 77 - 21071902 On pose $m=\inf\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(x)-ax^2-bx-c\big)^2\,dx$.

1) Montrez l'existence de m.

2) Trouvez des réels a,b,c réalisant cet inf. (Ind :on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gramm-Schmidt).

Yassine 2021

Q1 $d^2(\cos(x),\mathbb{R}_2[X])$ av. $\big(f\,\big|\,g\big)=\int_{-\pi}\pi fg$ **Q2** BO de $\mathbb{R}_2[X]:(1,X,X^2-\frac{1}{3}\pi^2)$, $p(\cos x)=-\frac{45}{2}X^2+\frac{15}{2\pi^2}$.

Note: $m=\frac{1}{\pi^3}(-90+\pi^4)$

Mines-Ponts PSI 2021 (matrice $A\times 2$ orthogonalement semblable à matrice à 2 coefficients diagonaux égaux) ✷ ☜

Enoncé 78 - 132694

Soit $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrez il existe $P\in SO_2(\mathbb{R})$ tq la matrice PMP^{-1} ait ses 2 coefficients diagonaux égaux.

RMS 132-694

ssi ex. BON tq $(f(e_1)|e_1) = (f(e_2)|e_2)$. forme quadrat. $(f(u)|u) = a'x^2 + d'y^2 + (b'+c')xy = {}^tXSX = k'$ avec $S = [a', \frac{1}{2}(b'+c'][\frac{1}{2}(b'+c'), d']$ ps chgmt BON ${}^tQSQ = \pm\,\mathrm{Diag}(a^2, 0)$ ou $\pm\,\mathrm{Diag}(a^2, b^2)$ ou $\mathrm{Diag}(a^2, -b^2)$, alors $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right)$ av ou $k = \pm\frac{1}{2}a^2$ ou $k = \pm\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ou $k = \frac{1}{2}(a^2-b^2)$. la mat. $P = QRot(\frac{\pi}{4})$ convient. si (e_1, e_2)BONInd., on prend $(e_1, -e_2)$ cr $(f(e_2)|e_2) = (f(-e_2)|-e_2)$.
Orthogonalisation simultanée: $N \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPMP = I$ et ${}^tPNP$ diagonale.

V — Algèbre : Autres

X PSI 2021 (racines du polynôme dérivé dans enveloppe convexe) ✷

Enoncé 79 - 132334

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2. Montrez que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

RMS 132-334

si $P = \prod_i (X-a_i)^{m_i}$, $a_i \neq$, alors $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X-a_i}$ ps si $P'(z) = 0$, $\overline{\sum_i \frac{m_i}{z-a_i}} = \frac{m_i}{|z-a_i|}(z-a_i) = 0$ et $\frac{m_i}{|z-a_i|} \geq 0$. Ok
Enveloppe convexe: $\mathscr{E}\big((a_i)_{i\in I}\big) = \left\{\sum_i \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geq 0, (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{(I)}, \sum_i \lambda_i = 1\right\} = \left\{x,\ \sum_i \lambda_i(x-a_i) = 0, \lambda_i \geq 0, (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{(I)}\right\}$
Théorème de Carathéodory: Dans E espace affine de dimension n, $\mathscr{E}\big((a_i)_{i\in I}\big) = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i,\ \forall a_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\right\}$

Centrale PSI 2021-2007 (équation polynomiale)

Enoncé 80 - 1321001 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tq $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

1) Soit ω une racine de P. Montrez ω^2 racine de P.
2) Montrez que les racines de P sont soit nulles soit de module 1.
3) Montrez 0 n'est pas racine de P
4) Déterminez les polynômes solutions.
(**2007 :** Seulement : on pourra d'abord montrer que les racines sont de module 1)

RMS 132-1001 Odlt 14.60

Q2 soit ω ts $|\omega| \neq 0, 1$, alors ω^{2^n} rac de P et $|\omega^{2^n}| = |\omega|^{2^n}$ ts $\neq$ car $\nearrow\nearrow$ ou $\searrow\searrow$. absurde. **Q3** si 0 rac, 1 ps 2^2 ps x_n tq $x_{n+1} = (x_n+1)^2$ $\nearrow\nearrow$ tous $\neq$ absurde. **Q4** si ω rac, ω^2 et $(1+\omega)^2$ dc $|\omega| = |1+\omega| = 1$ dc $\omega = j, j^2$. recipr $a(X-j)^n(X-j^2)^n = (1+X+X^2)^n$ convient (av $P = 0$)

Centrale PSI 2021 (polynôme de degré 8) ✌

Enoncé 81 - 1321000

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ simplement scindé. Montrez P' simplement scindé.
2) Le polynôme $8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + 3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

RMS 132-1000

Q1 Rolle $n-1$ fois. **Q2** $P^{(5)}$ a 0 racine double. Non.
Note: Si P est scindé à rac. simples réelles, il ne peut avoir 2 coeff. nuls consécutifs, ni un coef nul encadré par 2 coefs de même signe.
Note: Plus généralement, si P scindé (rp. à racines simples) sur $\mathbb{R}$, $P' + aP$ est scindé (rp à racines simples) sur $\mathbb{R}$. (faux sur $\mathbb{C}$)
Note: P scindé à racines simples $\Longrightarrow P'$ scindé à racines simples est faux sur $\mathbb{C}$. ex :X^3+1.

VI — Séries : Convergence, Calcul de Sommes et de Rayons de Convergence

IMT PSI 2021 - Centrale PSI 2015 (nature d'une série) ✷

Enoncé 82 - 126767 Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$?

RMS 132-1158 126-767

$\sin v_n = \sin(\pi(\sqrt{2}-1)^n) \sim (\pi(\sqrt{2}-1)^n)$ Ok. $v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(\sqrt{2})^k\pi$ $u_n = \pi(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k\pi$ dc $v_n + u_n = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}2^k 2\pi = 2N\pi$ dc $\sin u_n = \sin v_n$. Ok.

Mines-Ponts PSI 2021 (série génératrice des polynômes de Tchebychev)

Enoncé 83 - 132711 Soit $(T_n)_n$ la suite de polynômes définie pas $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1) Montrez, pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
2) Calculez, pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $\int_{-1}^{1} \frac{T_p(y)T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.
3) Montrez, pour tout $|x| \geq 1$, $2T_n(x) = \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$.
4) Déterminez, pour $|x| \geq 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)z^n$ puis donnez la valeur de sa somme.

RMS 132-711

Q1 recurr. $\cos((n+2)y) = 2\cos(y)\cos((n+1)y) - \cos(ny) +$ ps ac $y = \arccos x$, ok. **Q2** chgmt $u = \arccos y \int_0^{\pi} \cos(ny)\cos(py)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+p)y) + \cos((n-p)y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)y)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)y)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0$ si $n \neq p$ sinon $= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)y)}{n+p} + y\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ si $n = p \neq 0$, sinon π si $n = p = 0$. **Q3** recurr. cr $2x(x \pm \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x \pm \sqrt{x^2-1})^n = (x \pm \sqrt{x^2-1})^n(2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2-1} - 1) = (x \pm \sqrt{x^2-1})^n(x \pm \sqrt{x^2-1})^2$ **Q4** $R = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ et $S = \frac{1-zx}{z^2+1-2zx}$

Mines-Ponts PSI 2021 (rayon série entière à coefficient indéterminé)

ENONCÉ 84 - 132709 On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1) Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

2) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrez que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon $R' \geq 1$ puis déterminez R' en fonction de R.

RMS 132-709

Q1 $|\frac{a_n}{n!} z^n| = |a_n|(\frac{R}{2})^n \times \frac{(2|z|/R)^n}{n!} \leq M\frac{(2|z|/R)^n}{n!}$ $R = +\infty$. **Q2** $|b_n| \leq 1$ dc $R' \geq 1$. si $R > 1, a_n \to 0$ dc $|b_n| \sim |a_n|$ dc $R' = R$. si $R < 1$: si $R' > 1, |b_n| \to 0$ et $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|} \to 0$. absurde dc $R' = 1$. si $R = 1$: si $R' > \max(R,1) = 1, b_n \to 0$ dc $|b_n| \sim |a_n|$ dc $R' = R$. absurde. $R' = \max(1,R)$.

CCINP PSI 2021 (somme de série numérique) ✌

ENONCÉ 85 - 1321159

1) Montrez, pour x dans un domaine D à préciser, $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

2) Montrez $\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

RMS 132-1159

Q1 sr $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ à $k\frac{\pi}{2}$, $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2SC}{C^2-S^2} = \frac{2S/C}{1-(S/C)^2}$. si $C = 0$ Ok. **Q2** $\arctan(\sqrt{2}-1)$ ps $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2y}{1-y^2}$ av $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ps $y^2 + 2y - 1 = 0 : -1 \pm \sqrt{2}$.

Mines-Ponts PSI 2021 (série fraction rationnelle complexe)

ENONCÉ 86 - 132701

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Etudiez la convergence de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{P(n)}{Q(n)}$

RMS 132-701

$p = \deg P\, q = \deg Q$. si $p \geq q\, u_n \not\to 0$. si $q \geq p+2, |u_n| \sim \frac{|a_p|}{|b_q|}\frac{1}{n^{q-p}}$. Ok. si $q = p+1, u_n = \frac{1}{b_{p+1}n}\left(a_p + O(\frac{1}{n})\right)\left(1 + O(\frac{1}{n})\right)^{-1} = \frac{a_p}{b_{p+1}}\frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ Ok.

ENS PSI 2021 (série alternée)

ENONCÉ 87 - 132161 Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et , pour $n \geq 2, u_n = \dfrac{(-1)^n n^a}{n^{2a} + (-1)^n}$.

1) Pour quelles valeurs de a, la série de terme général est-elle absolument convergente ? convergente ?

2) Déterminez un équivalent de u_n et commentez.

RMS 132-161

Q1 $|u_n| \sim \frac{1}{n^a}$ dc $\sum u_n$ cvg abs. ssi $a > 1$ et si $a \leq 0, u_n \not\to 0$. si $0 < a \leq 1, u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}[= v_n] - \frac{1}{n^{3a}} + O(\frac{1}{n^{5a}})$, $\sum v_n$ cvg et $u_n - v_n \sim -\frac{1}{n^{3a}}$ dc $\sum u_n - v_n$ cvg ssi $a > \frac{1}{3}$ dc $\sum u_n$ aussi. **Q2** pr $0 < a \leq \frac{1}{3}$, on a $\sum u_n$ dvg et $\sim v_n$, $\sum v_n$ cvg.

Centrale PSI 2021 (équivalent série entière)

ENONCÉ 88 - 1321023

1) Montrez la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

2) On pose $a_1 = -1$ et , pour $n \geq 2, a_n = -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Déterminez les rayons de convergence des séries entières $f : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$ et $g : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

3) Que peut-on dire de $g(1)$? En déduire un équivalent simple de f en 1.

RMS 132-1023

Q1 $\sum u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ cvg **Q2** $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ $R_f = R_g = 1$. **Q3** $g(1)$ cvg abs. g cont. en 1. $\sum_{k=1}^{n} a_k = -u_n = \ln n - H_n$ dc, via prod de Cauchy av. $\sum x^n$, $\frac{g(x)}{1-x} = f(x) - \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ ps $f(x) \sim_1 \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ cr $g(x) = o_1(\ln(1-x))$

Note: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{b_{2k}}{2k}\frac{1}{n^{2k}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ où les b_k sont les nombres de Bernoulli $b_{2n+3} = 0$

Note: si $a_n, b_n \geq 0$, $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon $R = 1$ et $\sum b_n$ diverge, alors si $a_n \sim b_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Note: avec les mêmes hypothèses et plus faiblement, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \sim B_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$, on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

CCP PSI 2021-2018-2016 (série à terme récurrent)

ENONCÉ 89 - 127142 On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in \left]0, \pi/2\right[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Etablir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.

2) En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrez que $\sum u_n^3$ converge.

3) En considérant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrez la série $\sum u_n^2$ diverge. (**2018 :** pas le résultat) .

RMS 132-1161 130-1344 127-142 Odlt 25-202

Q1 $u_{n+1} \leq u_n$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1 \searrow$ cvg vers ℓ. $\sin \ell = \ell \iff \ell = 0$. **Q2** série $\sum u_{n+1} - u_n$ cvg ssi suite u_n cvg. ok. et $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}u_n^3$. **Q3** série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ cvg ssi suite $\ln u_n$ cvg. : non et $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(1 - 1/6u_n^2 + o(u_n^2)) \sim -1/6u_n^2$.

Note : $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ (par $u_{n+1}^a - u_n^a \longrightarrow \frac{1}{3}$ avec $a = -2$ et moyenne de Césaro).

Mines-Ponts PSI 2021 (somme et convergence d'une série) ✌

ENONCÉ 90 - 132703 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Déterminez les couples (a, b) pour lesquels la série de terme général u_n converge. Déterminez alors sa somme.

RMS 132-703

$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$. $\sum u_n$ cvg ssi $b = 1$ $a = -2$. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$ par télescopage.

Navale PSI 2021 (convergence série alternée)

ENONCÉ 91 - 1321160 Nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

RMS 132-1160

$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ $\sum u_n$ cvg.

CCP PSI 2021-2017-2011 (série à terme intégral)

ENONCÉ 92 - 1221259 Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrez que la suite (a_n) est convergente et déterminez $\lim a_n$.
2) Montrez que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3) Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. (**2011 :** question absente) .
4) Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
5) Trouvez une équation différentielle vérifiée par f. (**2017-11 :** question absente) .

RMS 132-1170 128-1350 122-1259

Q1 $a_n \to 0$. lebesgue. **Q2** CSSA **Q3** cvxt $(1+t^2)/2 \geq t$ **Q4** $a_n \to 0 \Rightarrow R \geq 1$ ou $\sum$ cvg pr $x=-1$, Q3 dc $R \leq 1$. **Q5** pr ipp, av $v' = 1$, $(2n+1)a_n = 1 + n a_{n-1}$ ps $2n a_n x^n + a_n = 1 + (n-1)a_{n-1} + a_{n-1}$ $\times x^n$ ps $2xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x} + x^2 f'(x) + x f(x)$ ps $x(x-2)y' + (x-1)y = \frac{1}{x-1}$

Mines-ponts PSI 2021 (série entière avec coefficient $tr(A^n)$)

ENONCÉ 93 - 132710 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrez A admet 3 vp distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.
2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n) x^n$.

RMS 132-710

Q1 $\chi_A = x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = P$ $P(0) = 1$ $P(2) = -1$: 3 chgm de sign. dc (au -) 3 vp $\neq$. $P(-1) = 7$ $P(1) = 1$ $P(3) = 1$ dc $-1, 1, 2$ pr α, β, γ. **Q2** $R = \inf(\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma}$ ps $S = \frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1}{1-\beta x} + \frac{1}{1-\gamma x} = \frac{\sum_{\text{sym}}(1-\alpha x)(1-\beta x)}{-\alpha\beta\gamma\, x^3 \chi_A(1/x)} = \frac{3+\sigma_2 x^2 - 2\sigma_1 x}{-\sigma_3(x^3+3x^2-4x+1)} = \frac{3x^2-8x+3}{x^3+3x^2-4x+1}$
polynôme réciproque: si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, $X^n P(\frac{1}{X}) = a_n + a_{n-1} X + \cdots + a_0 X^n$. $\alpha \simeq -0.247$ $\beta \simeq 1.445$ $\gamma \simeq 2.802$

ENS PSI 2021 (série entière définie par récurrence de ses coeffs) ✷

ENONCÉ 94 - 132166

Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $2(n+1)u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ et $f : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ de rayon R.

1) Montrez pour tout n, $u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^n}$. Que peut-on dire de R?
2) Montrez pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, $\int_0^x \frac{2f'(t)}{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t = x$.
3) En déduire f.

RMS 132-166

Q1 recurr. $R \geq \sqrt{2}$ **Q2** $\sum_{n=1}^{+\infty} 2(n+1)u_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right) x^n$ dc $2f'(x) - 2 = f(x)^2 - 1$ dc $\int_0^x \frac{2f'(t)}{1+f(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\ \mathrm{d}t = x$ **Q3** $2\arctan f(x) - 2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}x^2$ ps $f(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$
Note: $R = \frac{\pi}{2}$. La récurrence des coeffs du DSE de tan est $(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$

Mines-Ponts PSI 2021-2019 (nature série numérique)

ENONCÉ 95 - 130697 Soit $u_n = \left(\cosh\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^{\sinh(1/n)}$.

1) Déterminez, si elle existe, la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$, notée ℓ.
2) Déterminez la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.
3) Etudiez la convergence de la série $\sum (-1)^n (u_n - \ell)$. (Question absente en 2019)

Romain 2021 RMS 130-697

$u_n = \exp\left(-\frac{2\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + O(\frac{\ln n}{n^2})\right) = 1 - \frac{2\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + O(\frac{\ln^2 n}{n^2})$ $\sum (u_n - 1)$ dvg. Bertrand. $\sum (-1)^n (u_n - 1)$ cvg.

CCP PSI 2021-2019 (suite récurrente et série)

ENONCÉ 96 - 1301236 Soit (a_n) une suite de réels ≥ 0 et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

1) Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} a_n$.
2) Montrez que si $\sum a_n$ converge, alors (u_n) converge.
3) Etudiez la réciproque. (*Indication :* considérez $u_n = \frac{n}{n+1}$).

Gabriel 2021 - RMS 132-1163 130-1236

Q1 $0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n\right)$ et $u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2$. **Q3** $a_n = 2\sqrt{u_{n+1}}\,\sqrt{u_{n+1} - u_n} \sim \frac{2}{n}$.

Mines-Ponts PSI 2021 (équivalent reste d'une série) ✌

ENONCÉ 97 - 132702 Soit $a > 1$. On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^a} + \dfrac{1}{(n-1)^a} - \dfrac{2}{n^a}$.

1) Montrez la convergence de la série $\sum u_n$ puis caclulez la somme de cette série.
2) On pose, pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^n u_n$. Montrez $S_n = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{(n+1)^a} - \frac{1}{n^a}$.
3) Trouvez un équivalent de $R_n = S - S_n$.

RMS 132-702

Q1 $u_n \sim \frac{a(a+1)}{n^{a+2}}$ $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 16\frac{1}{2^a}$ pr telesc. **Q3** $R_n \sim \frac{-a}{n^{a+1}}$.
Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin: si $f C^n$ sr $[p,q]$, $\sum_{k=p}^q f(k) = \int_p^q f + \frac{1}{2}\big(f(p)+f(q)\big) + \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)\big) - \frac{1}{(2n)!}\int_p^q \widetilde{B}_{2n}(t) f^{(2n)}(t)$ av b_k (r B_k) nb (r pol) Bernoulli, $\widetilde{B}_k$ périod 1 $= B_k$ sr $]0,1[$ dc, via $f(t) = \frac{1}{t^a}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} + \frac{1}{2n^a} + \sum_{k=1}^n \frac{a(a+1)\ldots(a+2k-2)\ b_{2k}}{(2k)!\ n^{a+2k-1}} + O(\frac{1}{n^{a+2n+1}})$

VII — SÉRIES ET SUITES DE FONCTIONS

Mines-Ponts PSI 2021 (équivalent série de fonctions)

ENONCÉ 98 - 132707 Soit $f : x \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(nx)^2}$.

1) Déterminez le domaine de définition puis étudiez la continuité de f.
2) Montrez f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.
3) Exhibez un équivalent simple de f en 0.

RMS 132-707

Q1 $\mathbb{R}^{+*}$ pr $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, $e^{-n^2x^2} \leq e^{-n^2a^2}$ cvg norm. cont. sr $\mathbb{R}^{+*}$. **Q2** $f \searrow$. $\lim_{+\infty} f_n = 0$ pr $n \neq 0$ et $= 1$ pr $n = 0$ + cvg norm. $\lim_{+\infty} = 1$ **Q3** pr compar. serie-integr, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt + 1$ et $x\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ av. $u = tx$ dc $f(x) \sim_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{x}$.
Note: si $f \searrow$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$(qui converge) $\sim_{h=0} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f$.

CCP PSI 2021-2013 (série entière à coefficient récurrent) ☜

ENONCÉ 99 - 1241271 Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1) Montrez que $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ pour tout n.
2) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrez f définie sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et solution de l'équation $y' = y^2$ (**2013 :** sur un intervalle à préciser) .
3) En déduire une expression de u_n (**2013 :** En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.)

BEOS 6084 RMS 124-1271

Q1 recur. sr n. **Q2** $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. $f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}u_k \frac{1}{(n-k)!}u_{n-k})x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}u_{n+1}x^n$. Ok sur]-R,R[. Q1 donne $R \geq \frac{1}{4}$. **Q3** $\frac{y'}{y^2} = 1$ ps $y = \frac{-1}{x+k}$ ps $f(x) = \frac{1}{1/3-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1}x^n$ dc $u_n = 3^{n+1}n!$.

Centrale PSI 2021 (développement en série entière d'une série de fonctions) ✷

ENONCÉ 100 - 1321020 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Montrez f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2) Montrez f est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$.

RMS 132-1020

Q1 def. cr $|u_n(x)| \sim |x|^n$. sur $[-a,a] \subset]-1,1[$, $|\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$. **Q2** $\sum_{n=1}^N u_n(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^n x^{np} = \sum_{n=1}^N (-1)^n \sum_{q\geq 1 \text{multiple de } n} x^q = \sum_{q=1}^{+\infty} a_{Nq}x^q$ av $a_{Nq} = \sum_{n|q\leq N}(-1)^n$ qd $N \to +\infty$, $a_{Nq} \to \sum_{n|q}(-1)^n = b_q$ et $|a_{Nq}x^q| \leq q|x|^q$. cvg norm. Ok. $f(x) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q x^q$
Note: Pour $|x| < 1$, la série double $(x^{np})_{n,p\geq 1}$ est sommable et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{np}$ = (via q=np) $\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{n|q}(-1)^n\right)x^q$.
Formule de Dirichlet: si d_n est le nbr de divis. de n, $\sum_{k=1}^n d_k = \sum_{d=1}^n \lfloor \frac{n}{d} \rfloor = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$
Note: si $b_k = \sum_{d|n}(-1)^d = dp_n - di_n$, $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{d=1}^n (-1)^d \lfloor \frac{n}{d} \rfloor = -n\ln 2 + O(\sqrt{n})$

CCINP PSI 2021 (calcul intégrale par développement en série) ✌

ENONCÉ 101 - 1321171 Soit f définie sur $I =]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

1) Vérifiez f est prolongeable par continuité en 1.
2) Justifiez l'intégrabilité de f sur I.
3) Donnez, au voisinage de 1, un développement de f en série entière.
4) Calculez l'intégrale de f sur I.

RMS 132-1171

Q1 $f(x) \sim_1 1$. **Q2** $\sim_0 -\ln x$. **Q3** av $u = 1-x$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}$ **Q4** $\int_0^1 f = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ int. trm à trm ok cr $\sum \int_0^1 \frac{|u|^{n-1}}{n} = \frac{1}{n^2}$ cvg.

Mines-Ponts PSI 2021 (développement en série entière de $1/\cos x$)

ENONCÉ 102 - 132712

1) Montrez que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\cos x}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

2) Encadrez son rayon par deux réels strictement positifs.

RMS 132-712

Q1 si $\frac{1}{\cos x}$ paire dse $\sum b_{2n}x^{2n}$, prod. Cauchy av $\cos x$, $b_0 = 1$, $b_{2n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} b_{2n-2k}$. Recipr. Ok car $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$: $|b_{2n}| \leq 2^n$ par recurr : $|b_{2n}| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \leq \frac{1}{2}2^n \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k = 2^n$ **Q2** $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ pr Q1 et $R \leq \frac{\pi}{2}$ car $\frac{1}{\cos}C^\infty$ sr (au +) $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Note: $R = \frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2n+1}}\right)\frac{2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_n}{n!}x^n$ $\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{E_n}{n!}x^n$ (nombre d'Euler, $E_{2n+1} = 0$).

Note: Si f est dse $\sum a_n x^n$ dans un voisinage de 0 et $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dse $\sum b_n x^n$ dans un voisinage de 0 avec $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

X PSI 2021 (développement en série intégrale) ✌

ENONCÉ 103 - 132346 Justifiez l'existence et montrez l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

RMS 132-346

$I = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. int. trm a trm ok cr $\sum\int_0^1 |f_n| = \sum\frac{1}{n^2}$ cvg.

Note: $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ car $-I + \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\zeta(2)$.

CCINP PSI 2021 (limite suite intégrale)

ENONCÉ 104 - 1321168 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

2) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?

3) Montrez que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

4) Pour $a \in [0,1[$, montrez la suite (I_n) converge et déterminez sa limite.

5) Qu'en est-il pour $a = 1$?

RMS 132-1168

Q1 pr $x > 0$, $f_n(x) \to \frac{1}{x^a(1+x^2)}$ **Q2** $(f_n - f(x))' < 0$ et $\lim_0 f_n - f = +\infty$ pr $a > 0$ (ou 1 pr $a = 0$) dc non. cvg unif. sr $[A,1]$ **Q3** $\sim_0 \frac{n}{x^{a-1}}$ et $a-1 < 1$. **Q4** $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^a(1+x^2)}$ integ. sur $]0,1[$ pr $a < 1$. Lebesgue. $\lim I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x^2)}$ **Q5** $I_n = \int_0^n \frac{1-e^{-u}}{u(1+u^2/n^2)} \geq \int_0^n \frac{1-e^{-u}}{2u} \to +\infty$ cr int. ≥ 0 et dvg. en $+\infty$.

Ensea PSI 2021 (série entière solution équation différentielle)

ENONCÉ 105 - 1321174 Déterminez les solutions de $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ développables en série entière.

RMS 132-1174

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sol. ssi $(n^2-1)a_{n+1} = (n-1)a_n, \forall n \geq 0$ dc $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$ pr $n \neq 1$ $a_1 = a_0$ et $a_n = \frac{2}{n!}a_2$ ps $y = a_0 + a_0 x + 2a_2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = A(x+1) + Be^x$.

Centrale PSI 2021 (décomposition binaire de $]0,1[$)

ENONCÉ 106 - 1321021

1) Rappelez le développement en série entière de $\ln(1+x)$. Montrez $\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}$.

Pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k(x) = \lfloor 2^k x \rfloor - 2\lfloor 2^{k-1}x \rfloor$.

2) Justifiez que, pour $x \in]0,1[$, et $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k(x) \in \{0,1\}$.

3) Montrez, pour $x \in]0,1[$, $x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{E_k(x)}{2^k}$.

RMS 132-1021

Q1 $\ln 2 = -\ln(1-\frac{1}{2})$. **Q2** $E(2^{k-1}x) \leq 2^{k-1}x < E(2^{k-1}x)+1$ ps $2E(2^{k-1}x) \leq 2^k x < 2E(2^{k-1}x)+2$ dc $0 \leq E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x) < 2$ et entier. **Q3** $x - S_n = x - \sum_{k=1}^{n}\frac{E(2^k x)}{2^k} - \frac{E(2^{k-1}x}{2^{k-1}} = x - \frac{E(2^n x)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Note: comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, on en déduit que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ a la puissance du continu.

CCP PSI 2021-2019 (étude série de fonctions)

ENONCÉ 107 - 1301247 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.

2) Montrez S continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Calculez S

BEOS 6043 RMS 130-1247 Odlt 26-205

Q1 $x \geq 0$. **Q2** cvn sur $[a,+\infty[$. cvu sur $\mathbb{R}^+$, $\|R_n\|_\infty \leq \|\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\|_\infty = \frac{1}{n+1}$. **Q3** $\|f_n'\|_{\infty\,[a,b]} \leq e^{-na}$. **Q4** $\forall x > 0, S'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ dc $S(x) = -\ln(1+e^{-x})$

Mines-Telecom PSI 2021 (série de fonctions) ✌

Enoncé 108 - 21070602 On définit $\varphi(t)=\dfrac{1}{t(t+x)}$ avec $x>0$ et $t\in\left[1,+\infty\right[$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{n(n+x)}$.

1) Déterminez Nature et valeur de $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. *Indication : décomposer en élément simples*

2) Quel est le domaine de définition de $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$?

3) Etudiez la continuité de S.

4) Autre question ? Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Mathieu 2021

Q1 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ **Q2** Def $S=\mathbb{R}^{+*}$. **Q3** sr $[a,b]$, $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{n(n+a)}$ cvg nrm. **Q4** sr $[a,b]$, $\|f_n'\|_\infty\le\frac{1}{n^3}$

Centrale PSI 2021 (série-intégrale) ✌

Enoncé 109 - 1321025 Soit $a_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que la suite (a_n) est bien définie et déterminez sa limite.

2) Trouvez une relation entre a_n et a_{n-1}.

3) Soit $b_n=\sqrt{n}a_n$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

RMS 132-1025

Q1 $f_n(t)\to 0$ si $t\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ et e^{-t} sinon. $|f_n(t)|\le e^{-t}$. Ok. $\lim a_n=0$ **Q2** pr $n\ge 1$, $a_n=(ipp)2n\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin^{2n-1}t\cos t=(ipp)2n\big((2n-1)\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin^{2n-2}\cos^2$ $\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin^{2n}(t)\big)=2n\big((2n-1)(a_{n-1}-a_n)-a_n\big)$ dc $(1+4n^2)a_n=2n(2n-1)a_{n-1}$ **Q3** $u_n=-\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{n})+\ln(1-1/2n)-\ln(1+1/4n^2)=\frac{-1}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

X PSI 2021 (développement en série entière de la fonction Γ) ✷ ✷

Enoncé 110 - 132345 Montrez que l'application $\Gamma : x\longrightarrow\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisqu'elle est développable en série entière au voisinage de chaque $a\in\mathbb{R}^{+*}$.

RMS 132-345

pr $a>0$ et x tq $x+a>0$, $|\Gamma^{(n)}(x+a)|=|\int_0^{+\infty}\ln^n(t)t^{x+a-1}e^{-t}|\le\int_0^1|\ln^n(t)|t^{x+a-1}+\int_1^{+\infty}\ln^n(t)t^{x+a-1}e^{-t}$. pr $0\alpha<1$, $J(n,\alpha)=\int_0^1\ln^n t\frac{1}{t^\alpha}=\frac{-n!}{(\alpha-1)^{n+1}}$ pr ipp. dc $\int_0^1|\ln^n(t)|t^{x+a-1}=\frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$ ps $\int_1^{+\infty}\ln^n(t)t^{x+a-1}e^{-t}\le\int_1^{+\infty}t^{n+x+a-1}e^{-t}\le\int_0^{+\infty}t^{n+E(a)}e^{-t}=(n+E(a))!$ pr $x+a<E(a)+1$. Finalement, $|\Gamma^{(n)}(x+a)|\le\frac{n!}{(a+1)^{n+1}}+(n+E(a))!$ dc, via T-L, $|R_n(x)|=|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t+a)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\big(\frac{n!}{(a+1)^{n+1}}+(n+E(a))!\big)\to 0$ pr x assez ptt. Ok.

Note: si f C^∞ sur $]-r,r[$ et $\exists C,A>0$ tq $\forall n,\forall t\in]-r,r[$, $|f^{(n)}(t)|\le An!\,C^n$, alors f admet DSE sur $]-R,R[$ avec $R=\min(r,\frac{1}{C})$.

Dse fonction digamma: avec $\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\Psi(x+1)=-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)\,x^n$.

CCP PSI 2021 (développement d'une intégrale en série)

Enoncé 111 - 21063002 On pose $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Prouvez l'existence de I.

2) Donnez le développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ et ramenez I à une intégrale de somme.

3) Soit $(f_n)_{n\ge2}$ définie sur $\left[0,1\right[$ par $f_n(x)=\frac{x^{2n-2}\ln x}{n}$ si $x\ne0$ et 0 si $x=0$. Montrez cvg. normale de la série $\sum_{n\ge2}f_n$ sur $\left[0,1\right[$.

4) Calculer $J_n=\int_0^1 t^n\ln t\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$ et Montrez $I=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\,(2n-1)^2}$.

Adrien 2021 RMS 132-1173 128-1280

Q1 $f(t)\sim_0 -2\ln t$ **Q2** pr $|t|<1$, $\ln(1-t^2)=-\sum_{n=1}^{+\infty}(t^{2n})/(n)$ $I=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}-2\ln t(t^{2n-2})/(n)$ **Q3** max de f_n en $a_n=\exp(-1/2n-2)$, $|f_n(a_n)|=e^{-1}(1)/(n(2n-2))$ **Q4** $J_n=(-1)/((n+1)^2)$

Note: $\frac{2}{n\,(2n-1)^2}=\frac{2}{n}-\frac{4}{2n-1}+\frac{4}{(2n-1)^2}$ puis $I=\lim 2(\ln n+\gamma)-4\big(\ln(2n)+\gamma)+\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)\big)+4\frac{\pi^2}{6}\big(1-\frac{1}{4}\big)=\frac{\pi^2}{2}-4\ln 2$

Mines-Ponts PSI 2021 (dilogarithme) ✷

Enoncé 112 - 132706

Soit $f : x\longrightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(x^n+\left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$. Déterminez le domaine de définition D de f puis calculez $f(x)$ pour $x\in D$.

RMS 132-706

av $y=\frac{-x}{1-x}$, $\sum$ cvg si $|x|\le1$ et $|y|\le1$ ssi $x\le\frac{1}{2}$, dc $-1\le x\le\frac{1}{2}$. si $x<-1$ ou $x>\frac{1}{2}$, $u_{2n}=\frac{1}{4n^2}(x^{2n}+y^{2n})\to+\infty$. av $\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $f(x)=\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(y)$. pr $|x|<1$, $\mathrm{Li}_2'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$ ps pr $-1<x<\frac{1}{2}$, $f'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{-1}{x(1-x)}\ln(\frac{1}{1-x})=\ln(1-x)\frac{1}{1-x}$ dc $f(x)=-\frac{1}{2}\ln^2(1-x)+C$ av $f(0)=0$ dc $C=0$ ps par cont. sur $[-1,\frac{1}{2}]$.

Dilogarithm: $\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(-x)=\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(x^2)$, $\mathrm{Li}_2(1-x)+\mathrm{Li}_2\big(1-\frac{1}{x}\big)=-\frac{1}{2}\ln^2 x$, $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(x)\ln(1-x)$.

Centrale PSI 2021 (convergence uniforme série de fonctions) ✷

Enoncé 113 - 21062701 Soit $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n\,n}{n^2+x}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$.

1) Montrez $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a\ge0$.

3) Montrez $0\le(-1)^n\sum_{k=0}^n(-1)^k a_k\le a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, sachant $a_n\ge0$ et $a_n\nearrow$.

4) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Romain 2021 RMS 132-1019

Q1-2 $(-1)^n \frac{df_n}{dn}(x) = \frac{x-n^2}{(n^2+x)^2}$ $|f_n| \searrow$ pr $n^2 \geq x$. CSSA apcr Ok. **Q3** $n = 2m$ pair ssi $-a_{2m} \leq \sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k a_k \leq 0$ $n = 2m+1$ ssi $0 \leq \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k a_k \leq a_{2m+1}$. recurr. **Q4** $n \to \frac{n}{n^2+x} \nearrow$ pr $n^2 \leq x$ ps $\searrow$ st n_x tq $n_x^2 \leq x < (n_x+1)^2$. $|R_n(x)| \leq |\sum_{k=n+1}^{n_x}(-1)^k \frac{k}{k^2+x}| + |\sum_{k=n_x+1}^{+\infty}(-1)^k \frac{k}{k^2+x}|$ si $n_x \geq n+1$ et $\leq |\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \frac{k}{k^2+x}|$ si $n_x < n+1$ dc $|R_n(x)| \leq \frac{n_x}{n_x^2+x} + \frac{n_x+1}{(n_x+1)^2+x} \leq \frac{\sqrt{x}}{n^2+x} + \frac{\sqrt{x}+1}{n^2+x} \leq \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{n^2}$ si $n_x \geq n+1$ et $\leq \frac{n+1}{(n+1)^2+x} \leq \frac{1}{n+1}$ sinon. Ok.

CCINP PSI 2021 (suite de fonctions)

Enoncé 114 - 22022401 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longrightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$ et $I_n : x \in [0,1] \longrightarrow \int_0^x g_n(t)\,dt$.

1) Montrez $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n'(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.
2) Montrez $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}$.
3) Etudiez la convergence simple de la suite de fonctions (I_n).
4) Etudiez la convergence uniforme sur $[0,1]$.

BEOS 6183

Q1 $|g_n'(t)| = |e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}(-1+1-\frac{t}{n}| \leq e^t \times 1 \times \frac{1}{n}$. **Q2** acc. finis $|g_n(t) - g_n(0)| \leq \sup_{u \in [0,t]} |g_n'(u)||t-0| \leq \frac{e^t}{n} t$ **Q3** $g_n(t) \to e^{-t}e^t = 1$ $|g_n(t)| \leq e$. Lebesgue. $I_n(x) \to \int_0^x 1 = x$. **Q4** $|I_n(x) - x| \leq \int_0^x |g_n(t) - 1| \leq \frac{1}{n}\int_0^x te^t \leq \frac{1}{n}e$. Ok.

Mines-Ponts PSI 2021 (comparaison série-intégrale)

Enoncé 115 - 22022802 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. On pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,dt$.
Montrez que I et $\sum u_n$ sont de même nature. Lien entre les deux en cas de convergence?

BEOS 6325

si $\sum u_n$ cvg, th integr. terme a terme, $\sum \int_0^1 |t^n f(t)| = \sum u_n$ cvg (cr $f \geq 0$) et $\sum_n t^n f(t)$ cvg simpl. sur $]0,1[$ dc $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n f(t)$ integr sur $]0,1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = I$. Recipr, si I cvg, $S_n = \sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 f(t)\frac{1-t^{N+1}}{1-t} = I - \int_0^1 [\geq 0] \leq I$, dc $\sum u_n$ cvg car $u_n \geq 0$ et major. som. partielles.
Th de convergence monotone: si $u_n \to [0,+\infty]$ mesurable sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $\int_X (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X u_n d\mu$.
Note: si f C^1 et f' integrable sur $[a,+\infty[$, alors $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f$ sont de même nature.

CCINP PSI 2021 (somme de série de fonctions de période 1) ✷

Enoncé 116 - 22022301 Soit $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose, il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n) + \varphi(x-n)\big)$.
1) Montrez f est définie et et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrez f est 1-périodique.
3) Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

BEOS 6334

Q1 sur $[a,b]$, $|\varphi(x+n)+\varphi(x-n)| \leq \frac{2C}{1+(n-\max(|a|,|b|)^2} \sim \frac{2C}{n^2}$. cvg norm. **Q2** $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+1+n)+\varphi(x+1-n) = \varphi(x+1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x-n) = f(x)$ **Q3** $\int_{-m}^{n} |\varphi g| = \sum_{k=1}^{m} \int_{-k}^{1-k} |\varphi g| + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} |\varphi g| + \int_0^1 |\varphi g| = \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |\varphi|(x-k)|g|(x-k) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 |\varphi|(x+k)|g|(x+k) + \int_0^1 |\varphi g| = \int_0^1 |g|(x)\big(|\varphi|(x) + \sum_{k=1}^{m} |\varphi|(x-k) + \sum_{k=1}^{n-1} |\varphi|(x+k)\big)$ cvg unif de S_m et S_n' car cvg norm. de la série, comme en Q1, dc lim. exist. qd $n \to +\infty$ et $m \to +\infty$. dc $\int_y^x |\varphi g|$ bornée pour tous x, y dc φg integ. sur $\mathbb{R}$. ps mêmes égalités sans les $|.|$ donne le résultat par passage à la limite.

VIII — Intégrales

Mines-Ponts PSI 2021 (intégrale fonction de la borne) ✷

Enoncé 117 - 22022801 Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.
1) Montrez f définie sur $I =]0,+\infty[$. Montrez f dérivable sur I et déterminez f'
2) Déterminez un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
3) Montrez que $\int_0^{+\infty} f$ est définie et la calculer.

BEOS 6339

Q1 $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$. **Q2** pr ipp $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$ cr pr $x > \frac{1}{\varepsilon}$, $|\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}| < \varepsilon \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ dc $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + o_{+\infty}(f(x))$. $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ et $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} - \int_x^1 \frac{1}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} \to cste$ en 0 dc $f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} + O_0(1)$ d'ou $f(x) \sim_0 -\ln x$. **Q3** f cont. sr $]0,+\infty[$ et equival. de Q2.

CCPINP PSI 2021 (intégrale à paramètre)

Enoncé 118 - 22022403 Soit $f : x \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$

1) Domaine de définition de f?
2) f est-elle continue sur D_f?
3) Montrez $x \in D_f \Longrightarrow 1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4) Trouvez un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

BEOS 6063

Q1 $\sim_0 \frac{1}{t^x}$ $\sim_{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}$ dc $]0,1[$ **Q2** pr $[a,b] \subset]0,1[$, $|\frac{t^{-x}}{1+t}| \leq \frac{t^{-a}}{1+t}$. Ok. **Q3** $f(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^x(1+u)} = f(x)$ chgmt $u = \frac{1}{t}$. **Q4** $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{u/x}}{1+e^{u/x}} e^{-u} + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}$ chg $u = x\ln t$. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{u/x}}{1+e^{u/x}} e^{-u} \to \int_0^{+\infty} e^{-u} = 1$ cr $|\frac{e^{u/x}}{1+e^{u/x}} e^{-u}| \leq e^{-u}$ et $|\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}| \leq \int_0^1 t^{-x} = \frac{1}{1-x} = o_0(\frac{1}{x})$ dc $f(x) \sim_0 \frac{1}{x}$ ps $f(x) \sim_1 \frac{1}{1-x}$ pr Q3.

CCP PSI 2021-2019-2017-2015-2014 (intégrale à paramètre transformée de Laplace)

Enoncé 119 - 212910002 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,dt$.

1) Donnez l'ensemble de définition de f.
2) Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3) Calculez $f(x-1) - f(x)$ pour $x > 0$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.
4) Proposer une autre méthode pour obtenir ce résultat. (**2015 :** Question absente)

BEOS 6429 RMS 130-1261 128-1358 Aurélie 2015 - Odlt 21-291

Q1 $\sim_0 \frac{t}{t} = 1$ $\sim_{+\infty} te^{-t(x+1)}$. $x > -1$. **Q2** $t \to \frac{t}{e^t-1}$ cont. et lim. finies en $0, +\infty$ dc bornée. $|F(x)| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{M}{x} \to 0$. **Q3** $f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dt = \frac{1}{x^2}$ d'où $f(x-1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)^2} + f(x+n) \to \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$. **Q4** meth. série $= \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} te^{-t(x+1+n)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n+1)^2}$
Note: $F = \mathscr{L}f$ avec $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ et une transformée de Laplace vérifie toujours $\lim_{+\infty} \mathscr{L}f(x) = 0$.

Mines-Ponts PSI 2021 (équivalent suite-intégrale)

Enoncé 120 - 132725 On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\,dt$.

1) Montrez que cette intégrale est convergente puis l'écrire sous forme de somme d'une série.
2) En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

RMS 132-725

Q1 $\sim_0 t^{n+1}\ln t$ $\sim_1 \frac{t-1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}$ $I_n = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} t^{n+1+2p}\ln t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+2+2p)^2}$ cr $\int_0^1 t^n \ln t = \frac{-1}{(n+1)^2}$. **Q2** $I_n \sim \int_0^{+\infty} \frac{-dx}{(n+2+2x)^2} = \frac{-1}{2(n+2)} \sim \frac{-1}{2n}$

ENS PSI 2021 (suite-intégrale récurrente) ✷ ✷

Enoncé 121 - 132163 Soient $\rho > 0$ et $a \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

On pose $f_0 : x \in [0,1] \to 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in [0,1] \to \dfrac{\rho}{\rho + a(x) - \int_0^1 a(y) f_n(y)}\,dy$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 a(y) f_n(y)\,dy$.

1) Montrez pour tout n, $u_n \in [0,\rho]$ et que la suite (u_n) est monotone.
2) On suppose $\exists C > 0$ tq $a(x) \geq C$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrez la suite de fonctions (f_n) cvg uniformément et précisez sa limite.
Ind : Distinguez les cas $\rho\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} \leq 1$ et $\rho\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} > 1$.
3) On considère ici $a : x \longrightarrow \sqrt{x}$.
(i) Déterminez les ρ pour lesquels la suite (f_n) converge uniformément.
(ii) Déterminez les ρ pour lesquels la suite $(\|f_n\|_1)$ converge.

RMS 132-163

Q1 recurr sr n :$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{a(y)\rho}{\rho+a(y)-u_n} \leq \int_0^1 \frac{a(y)\rho+\rho^2}{\rho+a(y)} = \rho$ et $u_{n+1} \geq 0$ cr $\rho - u_n \geq 0$. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 a(y)\big(\frac{\rho}{\rho+a(y)-u_n} - f_n(y)\big) = \int_0^1 a(y)\big(\frac{\rho}{\rho+a(y)-u_n} - \frac{\rho}{\rho+a(y)-u_{n-1}}\big)$ dc $u_n \to \ell \in [0,\rho]$. **Q2** cvg spl :$f_n(x) \to \frac{\rho}{\rho+a(x)-\ell} = f(x)$ ps $0 \leq \frac{1}{\rho}(f(x) - f_n(x)) = \frac{\ell-u_n}{(\rho+a(x)-u_n)(\rho+a(x)-\ell)} \leq \frac{\ell-u_n}{C(\rho+C-\ell)} \to 0$ Ok.? **Q3 (i)** si $\ell < \rho$, $0 \leq \frac{1}{\rho}(f(x) - f_n(x)) \leq \frac{\ell-u_n}{(\rho-\ell)^2}$. Ok. si $\ell = \rho$, $f(0) - f_n(0) = +\infty$. Non. av. $x_n = \rho - u_n$, $x_{n+1} = \rho - \int_0^1 \frac{\rho\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x_n} = \rho x_n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x_n} \leq 2\rho x_n$ dc si $\rho < \frac{1}{2}$, $x_n \to 0$, Non. sinon, si $x_n \to 0$, $x_{n+1} = \rho x_n 2(1 - x_n \ln(\frac{1+x_n}{x_n})$ av calcul int. chgmt $u = \sqrt{x}$ ps $x_{n+1} \sim 2\rho x_n$. absurde si $2\rho > 1$. reste $\rho = \frac{1}{2}$. **(ii)** si $\rho > \frac{1}{2}$, cvg unif dc $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$. sinon, si $\rho < \frac{1}{2}$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{x}+x_n} = 2\rho(1 - x_n\ln(\frac{1+x_n}{x_n})) \to 2\rho$ cr $x_n \to 0$

Mines-Ponts PSI 2021 (suite-intégrale avec indéterminée) ✷ ☜

Enoncé 122 - 132704
1) Soit $n \geq 1$. Montrez que les intégrales $\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,dx$ et $\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$ sont égales puis déterminez leur valeur.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Déterminez la limite de $\left(\displaystyle\int_0^\pi \frac{f(x)}{1+\cos^2(nx)}\,dx\right)_{n\geq1}$.

RMS 132-704

Q1 av $u = nx$, $I_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{1}{1+\cos^2 u} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+\cos^2 u} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} I_1 = I_1$ par period. ps av $u = \tan x$, $I_1 = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2} = \sqrt{2}[\arctan(\frac{u}{\sqrt{2}})]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **Q2** $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{f(u/n)}{1+\cos^2 u} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{f(v/n+k\pi/n)}{1+\cos^2 v}$ av $v = u - k\pi$ ps $u_n = \int_0^\pi \frac{S_n(f,v)}{\pi(1+\cos^2 v)}$ av $S_n(f,v) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{v}{n} + \frac{k\pi}{n})$. à v fixé, somme de Riemann assoc. a subdiv pointée $((\frac{k\pi}{n}), (x_n))$ av $k\frac{\pi}{n} \leq x_n = \frac{v}{n} + \frac{k\pi}{n} \leq \frac{(k+1)\pi}{n}$ dc $S_n \to \int_0^\pi f$. ps Lebesgue $|..| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi(1+\cos^2 v)}$ integr sur $[0,\pi]$ dc $\lim u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi f$.

CCINP PSI 2021 (intégrale à paramètre)

Enoncé 123 - 1321172 Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,dt$ et D son domaine de définition.

1) Montrez $]-1,1[\subset D$.
2) Trouvez un développement en série entière de F.
3) Montrez F de classe C^1 sur $[0,1[$.
4) Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.
5) Proposez une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

RMS 132-1172

Q1 $1+xt>0$ sur $[0,1]$ pr $x\in]-1,1[$ cr $|xt|<1$ et $\frac{\ln(1+xt)}{t}\sim_0 x$. **Q2** $F(x)=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^nt^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$ cvg norm. sr $[0,1]$ cr $|(-1)^{n-1}\frac{x^nt^{n-1}}{n}|\leq|x|^n$. **Q3** $R=1$ dc FC^∞ sr $[0,1[$. **Q4** $F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{\ln(1+x)}{x}$. **Q4** $|\frac{\partial f}{\partial x}|=\frac{1}{1+xt}\leq 1$, $F'(x)=\int_0^1\frac{dt}{1+xt}=\frac{\ln(1+x)}{x}$

IMT PSI 2021-2019 (convergence calcul intégrale avec arctan)

Enoncé 124 - 26236

Justifiez la convergence et calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-t\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. (**2019 :** utilisez le calcul de $\int_0^x t\arctan\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$)

RMS 132-1166 Odlt 26-236

Q1 $\lim_0 f=1$ $f\sim_{+\infty}\frac{1}{3t^2}$. **Q2** par ipp $f(x)=\frac{1}{2}x^2\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}x$ ps $I=[x-f(x)]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$ car $f(x)=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})$

Mines-Ponts PSI 2021-2019 (Equivalent intégrale à paramètre)

Enoncé 125 - 130723 Soit $x>0$ et on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\ln(t)\ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$ (**2019 :** pas d'hypothèse sur x).

1) Montrez que f est définie. (**2019 :** Domaine de définition de f).
2) Ecrire f comme somme d'une série de fonctions.
3) Donnez un équivalent de f lorsque $x\to+\infty$. (**2019 :** Limite de f en 0 ?)

RMS 132-722 130-723

Q1 $1-t^x>0$ ssi $x>0$. $\sim_0 -t^x\ln t$ ok. $\sim_1(t-1)\ln(1-t)$ ok. **Q2** $|t^x|<1$ sr $[0,1[$ ps $f(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\ln(t)\frac{t^{nx}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(nx+1)^2}$ **Q3** $f(x)\sim_{+\infty}\frac{\zeta(3)}{x^2}$ cr $x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+nx)^2}-\frac{1}{n^3x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-n(2nx+1)}{n^4(1+nx)^2}\to\sum_{n=0}^{+\infty}=0$ cvg norm sr $[1,+\infty[$: $|.|\leq\frac{4n^2x}{n^4(1/2nx)^2}=\frac{8}{n^4x}\leq\frac{8}{n^4}$.

CCINP PSI 2021 (équation fonctionnelle intégrale) ✷ ☜

Enoncé 126 - 1321165 On cherche $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant la condition (E) $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x)f(y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Résoudre, selon la valeur du réel c, l'équation différentielle $y''-cy=0$
2) Soit $F:(x,y)\longrightarrow\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez F de classe C^2 et calculez $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}$.
3) Soit f une solution de (E). Calculez $f(0)$ et $f''(x)f(y)-f(x)f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

RMS 132-1165

Q1 $c>0$: $\alpha\cosh(\sqrt{c}x)+\beta\sinh(\sqrt{c}x)$ $c=0$: $ax+b$ $c<0$: $\alpha\cos(\sqrt{-c}x)+\beta\sin(\sqrt{-c}x)$ **Q2** à y fixé (E) donne $f(x)C^1$ ps C^2. $\frac{\partial F}{\partial x}=f(x+y)-f(x-y)$ $\frac{\partial F}{\partial y}=f(x+y)+f(x-y)$ ps $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=f'(x+y)-f'(x-y)$. **Q3** $f(0)^2=0$. si $f\neq0,\exists y$ tq $f(y)\neq0$ ps à y fixé, Q1 av. $c=\frac{f''(y)}{f(y)}$ dc sol. $\beta\sinh(bx)$, β, $\beta\sin(bx)$ car $f(0)=0$ av. b quelc. Recipr sol. pr (1) ssi $\beta^2\sinh(bx)\sinh(by)=\frac{\beta}{b}(\cosh(b(x+y))-\cosh(b(x-y))=2\frac{\beta}{b}\sinh(bx)\sinh(by)$ ssi $b\beta^2=2\beta$ dc sol. : $\beta\sinh(\frac{2}{\beta}x)$ ou $\beta\sin(\frac{2}{\beta}x)$

X-ENS PSI 2021 (intégrale à paramètre)

Enoncé 127 - 22030802 On pose, pour $a>0$, $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $J(a)=a\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que $I(a)$ et $J(a)$ sont définies pour tout $a>0$.
2) Montrez $I(a)=J(a)$ pour tout $a>0$.
3) En déduire que $\forall a>0,\ I(a)=\frac{e^{-2a}}{a}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)e^{-(t-\frac{a}{t})^2}\,\mathrm{d}t$.
4) Montrez $\forall a>0,\ I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. *on admet* $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}\,ds=\sqrt{\pi}$.

BEOS 5932

Q1 $I(a)\sim_0 e^{-\frac{a^2}{t^2}}\to0\sim_{+\infty}e^{-t^2}=o(\frac{1}{t^2})$ $J(a):\sim_0\frac{1}{t^2}e^{-a^2/t^2}=o_0(\frac{1}{\sqrt{t}})$ **Q2** $u=\frac{a}{t}$. **Q3** $I(a)=\frac{1}{2}(I(a)+J(a))$ et $e^{-2a}e^{-(t-\frac{a}{t})^2}=e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}$ **Q4** $u=1-\frac{a}{t}$

CCINP PSI 2021 (fonction-intégrale de la borne sup)

Enoncé 128 - 21071501 On pose $F(x)=-\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Donnez le domaine de définition de F.
2) Montrez, pour tout $x\in[0,1]$, $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.
3) Montrez, pour tout $x\in]0,1[$, $F(x)+F(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(1-x)\ln(x)$

Indication : on pourra procéder à une intégration par parties et utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Nicolas 2021 RMS 132-1169

Q1 Def $F=]-\infty,1]$. **Q2** pr $x\in[0,1[$, $F(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ cr cvg norm. sr $[0,x]$. ps lim. en 1 pr cont. et exist de $F(1)$. **Q3** $(F(x)+F(1-x))'=-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\ln x=(\frac{\pi^2}{6}-\ln(1-x)\ln(x))'$ et lim. en $0=\frac{\pi^2}{6}$.

ENSEA PSI 2021 (convergence calcul intégrale)

Enoncé 129 - 1321167 Soient $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$

1) Justifiez l'existence de I et J.
2) Montrez $I=J$.
3) Calculez $I+J$ et en déduire la valeur de I.

RMS 132-1167

Q1 $\ln\sin t \sim_0 \ln t$ et $\ln\cos t \sim_{\pi/2} \ln(\frac{\pi}{2}-t)$ **Q2** chgmt var $u=\frac{\pi}{2}-t$ **Q3** $I+J=2I=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\ \sin(2t)\right)=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\left(\sin(u)\right)=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin u=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I-\int_{\pi/2}^{0}\ln\sin(\pi-v)=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I$ dc $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

Mines-Ponts PSI 2021 (calcul intégrale par développement en série)

ENONCÉ 130 - 132724 Soient $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$

1) Justifiez la définition et calculez I_n.
2) Justifiez la définition de I et calculez sa valeur.

RMS 132-724

Q1 $\frac{1}{n^2}$ **Q2** $I=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)\sqrt{t}}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}$ cr $\int_0^{+\infty}e^{-n\sqrt{t}}=2I_n$ av chgmt $u=\sqrt{t}$.

CCP PSI 2021-2019 - CCP PC 2017 (calcul intégrale de Dirichlet)

ENONCÉ 131 - 1301262

Pour $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}$, on pose $g(x,t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t$ et $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1) PC : Déterminez la limite de $g(x,t)$ lorsque $t\longrightarrow 0$.
2) Montrez que $f(x)$ existe pour $x\geq 0$.
3) Montrez f continue sur $\mathbb{R}^+$.
4) Montrez f de classe C^2 sur $\left]0,+\infty\right[$. (**PC :** de classe C^1)
5) Déterminez les limites de f et f' en $+\infty$. (**PC :** Question absente) .
6) Montrez $f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. (**PSI 2019,PC :** calculez $f'(x)$ et $f(x)$) .(**PC :**En déduire $f(x)$)
7) Exprimez I en fonction de $f(0)$ et en déduire sa valeur. (**PSI 2019 :** Justifiez l'existence et calculez I)

Emy 2021 RMS 130-1262 128-1159

Q2 $|f(x,t)|\leq\frac{1-\cos t}{t^2}$. **Q3** $|\frac{\partial f}{\partial x}|,|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|\leq Me^{-at}$ pour $[a,b]\subset\left]0,+\infty\right[$. **Q4** $|f(x)|,|f'(x)|\leq M\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. **Q5** $f''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ ps $f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ av $C=0$ ps $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1-\arctan x+C$ avec $C=\frac{\pi}{2}$ **Q6** $F(0)=\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par ipp.
Note : La transformée de Laplace de $f(t)=\frac{1-\cos t}{t}$ est $L(f)(x)=x\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1-\arctan x+\frac{\pi}{2}$

Mines-Ponts PSI 2021 (limite équation fonctionnelle intégrale) ✷

ENONCÉ 132 - 22022702 Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ continue. On suppose $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t=\ell>0$.

1) Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2) Donnez un exemple d'une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé.
3) Calculez un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

BEOS 6406

Q1 si $\lim_{+\infty}f=b\neq 0$ pr $x>A, f(x)\geq\frac{b}{2}$ ps $\int_0^x f^2\geq(x-A)\frac{b^2}{4}\to+\infty$ dc $\ell=+\infty$ absurde. **Q2** en écriv. $f(x)\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t=\ell$ on trouve $f=\frac{a}{x^{1/3}}$ av $a=(\ell/3)^{1/3}$. **Q3** av. $F(x)=\int_0^x f^2$, $F^2(x)F'(x)\to\ell^2$ ps $(F^3(x))'\to 3\ell^2$ ps $F^3(x)\sim 3\ell^2x$ ps $F(x)\sim bx^{1/3}$ av $b=(3\ell^2)^{1/3}$ ps $f(x)F(x)\sim\ell$ dc $f(x)\sim\frac{\ell}{bx^{1/3}}$.
Note: si f dérivable et $\lim_{+\infty}f'(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$. Réciproque fausse.
Note: si $\lim_{+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ et f'' bornée (dans un voisinage de $+\infty$), alors $\lim_{+\infty}f'(x)=0$.

IMT PSI 2021 (équation fonctionnelle)

ENONCÉ 133 - 1321164 On cherche les applications f C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (*) $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\forall\,x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n}$.

1) Soit f vérifiant (*)
(i) En considérant des valeurs particulières de n, montrez $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f'(x+1)$.
(ii) Montrez que $\int_x^{x+1}f'(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.
2) Donnez toutes les solutions du problème posé.

RMS 132-1164

Q1 $f'(x+1)-f(x)=\frac{1}{n+1}(f(x+n+1)-f(x+1)-f(x+n+1)+f(x)=\frac{1}{n+1}(f(x)-f(x+1))=\frac{-f'(x)}{n+1}$ ps $f'(x+1)=\frac{n}{n+1}f'(x)\forall\,n\to f'(x+1)=f'(x)$ **(ii)** $\left(\int_x^{x+1}f'\right)'=0$ dc $\int_x^{x+1}f'=k=f(x+1)-f(x)$ ps $f'(x)=\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}f(x+k+1)-f(x+k)=\frac{kn}{n}=k$ **Q2** recipr, $f(x)=kx+b$ convient.

CCP PSI 2021 (équivalent suite-intégrale)

ENONCÉ 134 - 21062601 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrez l'existence de I_n.
2) Montrez $I_n=\dfrac{1}{n^{5/3}}J_n$ avec $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3) Montrez $\lim J_n=K$ avec $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$
4) A l'aide d'un changement de variables, montrez $K=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$
5) Prouvez $2K=\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $I_n\sim\frac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{5/3}}$.

Camille 2021

Q2 chgmt $u=n^{4/3}x$. **Q3** $f_n(t)\to\frac{t}{1+t^3}$ et $|f_n(t)|\leq\frac{t}{1+t^3}$ **Q4** chgmt $u=\frac{1}{t}$ **Q5** $I_n\sim\frac{1}{n^{5/3}}K=\frac{1}{2n^{5/3}}\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{1+t^3}=\frac{1}{2n^{5/3}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-t+1}$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2\pi}{3}$

Mines-Ponts PSI 2021-2019-2018 (calcul intégrale de Dirichlet) ✷

Enoncé 135 - 129786

Soit $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ et $g : x \longrightarrow \cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$.

1) Montrez $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$ convergent. (**2019 :** Montrez les intégrales dans l'expression de g convergent) .

2) Montrez que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3) En déduire que $f = g$ puis la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

RMS 132-719 130-721 129-786

Q2 Def $f = \mathbb{R}^+$ Def $g = \mathbb{R}^{+*}$ C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)| \le e^{-at}$ puis $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$. $g'(x) = -\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t} - \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}$ puis $g''(x) = -g(x) + \frac{1}{x}$. **Q3** on a $f(x) = A\cos x + B\sin x + g(x) = (A + \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t})\cos x + (B - \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t})\sin x$. $0 \le f(x) \le \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$ dc $\lim_{+\infty} f = 0$ dc $A = B = 0$ via suites $2n\pi$ et $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. dc $f = g$ puis $g(0) = f(0)$. ok.

CCP PSI 2021 (fonction Γ)

Enoncé 136 - 21062301 On définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

1) Donnez domaine de définition de Γ.

2) Trouvez une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$.

3) Calculez $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

4) Montrez Gamma continue puis dérivable sur son domaine de définition. Précisez $\Gamma'(x)$.

5) Antoine n'est plus très sûr : Donnez la valeur pour laquelle Γ' s'annule. Calculez $\Gamma''(x)$. Donnez les limites de Γ aux bornes du domaine de définition. (**BQMP :** Question absente) .

Antoine 2021 BQMP 2021-029

Q1 Def $\Gamma = \mathbb{R}^{+*}$ **Q2** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pr ipp. $\Gamma(n) = (n-1)!$ **Q3** $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$ av $u = \sqrt{t}$. **Q4** $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t\, t^{x-1}e^{-t}$ cr sr $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $|\frac{\partial f}{\partial x}| \le |\ln t| t^{b-1}e^{-t}$ si $t \ge 1$ et $\le |\ln t| t^{a-1}e^{-t}$ sinon.

Note: Γ analytique sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ et $\mathrm{Res}\big((,\Gamma), -k\big) = \frac{(-1)^k}{k!}$. $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t}\,dt = -\gamma$.

Note: $\Gamma' \ge 0$ s'annule en un seul point $x \simeq 1.4616325$ OEIS-A030169 $\Gamma(x) \simeq 0.88560319$ OEIS-A030171.

Mines-Ponts PSI 2021 (inégalité intégrales des dérivées) **A Terminer** ✷

Enoncé 137 - 132705 On considère une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Donnez une primitive de $y^2 - (y')^2 + (y'')^2 - (y + y' + y'')^2$.

2) Montrez que la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$ et $\int_0^{+\infty}(y'')^2$ implique celle de $\int_0^{+\infty} yy'$ (**note :** est-ce $\int_0^{+\infty} yy''$?) et de $\int_0^{+\infty}(y')^2$.

3) Montrez que la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$ et $\int_0^{+\infty}(y'')^2$ implique l'inégalité : $\int_0^{+\infty}(y')^2 \le \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty}(y'')^2$.

RMS 132-705

Q1 $= -2yy' - 2y'y' - 2yy'' - 2y'y'' = -2(y+y')(y'+y'') = -[(y+y')^2]'$ **Q2** $|yy''| \le \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(y'')^2$. $(yy') = yy'' + (y')^2$. **Q3** $\int_0^x y^2 + (y'')^2 - (y')^2 = \int_0^x (y + y' + y'')^2 - [(y(x) + y'(x))^2]_0^x$ ps

CCP PSI 2021-2015 - Mines-Ponts PSI 2019 - Ensea PSI 2019 (intégrale à paramètre transformée de Laplace)

Enoncé 138 - 1515880001 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sinh t}{t}\,dt$.

1) Donnez le domaine de définition D de F.

2) Etudiez la dérivabilité de F sur D et calculez $F'(x)$ (**Mines :** absent) .

3) Détermination de la suite $(F(n))$? (**Mines :** Comportement Asymptotique en $+\infty$ **Autres :** limite de F en $+\infty$) .

4) Donnez une expression de F.

BEOS 6066 1588 RMS 130-719 130-1260

Q1 $\sim_{+\infty} \frac{1}{2t}e^{-t(x-1)}$ $\sim_0 1$ Def $F =]1,+\infty[$ **Q2** $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le e^{-at}\sinh t$ sr $[a,+\infty[$. $F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sinh t = \frac{1}{1-x^2}$ **Q3** $\lim_{+\infty} F = 0$ carct seq + lebesgue $|e^{-x_n t}\frac{\sinh t}{t}| \le e^{-t}\frac{\sinh t}{t}$ apcr pr $x_n \to +\infty$. pr $x > 2$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{\sinh(u/x)}{u/x}\,du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\exp\big(-u(1-\frac{2}{x})\big)k(u/x)\,du$ av $k(y) = \frac{\sinh y}{y}e^{-2y}$. leb. k bornée sur $\mathbb{R}^+$ dc $F(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ **Q4** $F(x) = \mathscr{L}\big(\frac{\sinh t}{t}\big)(x) = C + \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$ av $\lim_{+\infty} F = C = 0$

Note: Une transformée de Laplace existe sur $]\sigma(f), +\infty[$, où $\sigma(f)$ est l'abscisse de sommabilité, est C^∞ sur $]\sigma(f), +\infty[$, analytique sur $\{\Re z > \sigma(f)\}$, et $\big(\mathscr{L}f\big)^{(n)}(x) = \mathscr{L}\big((-1)^n t^n f(t)\big)(x)$.

Mines-Ponts PSI 2021 (intégrale à paramètre)

Enoncé 139 - 132720

1) Justifiez l'existence de $\Delta = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifiez la convergence de $\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt$. Exprimez I_n en fonction de Δ.

3) Soit $F : x \longrightarrow \int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$. Montrez F définie sur $\mathbb{R}$. Donnez une expression de $F(x)$ en utilisant Q2.

4) Montrez F de classe C^1. Retrouver le résultat de Q3.

RMS 132-720

Q2 pr $n \ge 1$, $I_n = \frac{1}{2}(2n-1)I_{n-1}$ ps $I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Delta = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Delta$ **Q3** $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}I_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!}\Delta = e^{-x^2/4}\Delta$ **Q4** sr $[a,b]$, $|-t\sin(xt)e^{-t^2}| \le te^{-t^2}$ integ. sr $\mathbb{R}^+$. $F'(x) = -\int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2} = -\frac{1}{2}xF(x)$ pr ipp ps $F(x) = Ce^{-x^2/4}$ et $F(0) = \Delta$

IX — Espaces Vectoriels Normés

ENS PSI 2021 (opérateur intégral compact) ✷ ✷

Enoncé 140 - 132168 Soit $k : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq $k(x,y) = 0$ si $y \geq x$.

Pour tout $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on pose $T(u) : x \longrightarrow \displaystyle\int_a^b k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^x k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T^n = T \circ \cdots \circ T$.

1) Construire une suite (k_n) de fonctions continues de $[a,b]^2 \to \mathbb{R}$ tq $k_n(x,y) = 0$ si $y \geq x$ et, pour toute $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $T^n(u) = \int_a^b k_n(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$.

2) Montrez, pour tous $x, y \in [a,b]$, $|k_2(x,y)| \leq \|k\|_\infty{}^2 |x-y|$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrez que la série de fonctions $\frac{T^n(w)}{\lambda^n}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour toute $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. continue.

4) Soit $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez il existe une unique fonction $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq $T(v) - \lambda v = u$.

RMS 132-168

Q1 recurr $k_{n+1}(x,z) = \int_a^b k(x,y)k_n(y,z)\,\mathrm{d}y$ + Fubini **Q2** $k_2(x,y) = \int_y^x k(x,u)k(u,y)\,\mathrm{d}u$. **Q3** recurr $|k_n(x,y)| \leq \|k\|_\infty^n \frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}$ ps $\frac{|T_n(w)(x)|}{|\lambda|^n} \leq \frac{\|k\|_\infty^n \|w\|^n}{|\lambda|^n} \frac{(x-a)^n}{n!}$ **Q4** $T(u)$ cont. sr $[a,b]$ cr $|k(x,y)u(y)| \leq \|k\|_\infty \|u\|_\infty$ integr. sr $[a,b]$. **Exist :** soit $v(x) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n(u)(x)}{\lambda^n}$ cont. sr $[a,b]$ pr cvg. norm. $(T - \lambda Id)\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k(u)}{\lambda^k}\right) = u$ ps $n \to +\infty$ et T cont. pr $\|.\|_\infty$ cr $\|T(u)\|_\infty \leq (b-a)\|k\|_\infty \|u\|_\infty$ amène $(T - \lambda Id)(v) = u$ **Unic :** $T - \lambda Id$ inj. cr λ pas vp : si $T(u) = \lambda u$, $T^n(u) = \lambda^n u$ ps $|\lambda|^n \|u\|_\infty = \|T^n(u)\|_\infty \leq \frac{\|k\|_\infty^n (b-a)^n}{n!} \|u\|_\infty$. imposs. sauf si $\lambda = 0$ (ou $k \equiv 0$).

Note: Dans $\left(\mathscr{L}_C(E), \|\!|.\|\!|\right)$, E Banach, si $|\lambda| < \|\!|T\|\!|$, $T - \lambda Id$ inversible et $(T - \lambda Id)^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$. $Gl_C(E)$ ouvert et $f \in Gl_C(E) \to f^{-1}$ continue.

Alternative de Fredholm: si T opérateur compact et $\lambda \neq 0$, $T - \lambda Id$ injectif ssi $T - \lambda Id$ surjectif. $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$ de dim finie, $\operatorname{Im}(T - \lambda Id)$ fermé.

Centrale PSI 2021 (application matricielle 2×2 de classe C^1)

Enoncé 141 - 1321016

1) Montrez que 2 matrices semblables ont même trace. Que dire de la réciproque ? Même question en remplaçant trace par déterminant puis par polynôme caractéristique.

2) Soit $G = \left\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}),\ \det A = 1\right\}$. Déterminez une CNS sur les traces pour que 2 matrices $A, B \in G$ soient semblables.

3) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ de classe C^1 et vérifiant $\varphi(0) = I_2$ et $\varphi'(0) = A$. Montrez $\operatorname{tr} A = 0$.

RMS 132-1016

Q1 $A = 0$ et $B = 0$ sauf $B_{1n} = 1$ ont m $\chi = X^n$ et pas sblbl. **Q2** si $A, A' \in G$ ont m $\operatorname{tr}(A)$ et m $\operatorname{tr}(A)^2$, cad $\lambda + \mu = \lambda' + \mu'$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \lambda'^2 + \mu'^2$, alors $\lambda\mu = \lambda'\mu'$ dc m vp. si vp $\neq$, sbl a $Diag(\lambda, \mu)$. Ok. si $\lambda = \mu$, ou sblbl à $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ ou à λI_2 av $\lambda = \pm 1$ dc Ok sauf si $A = \pm I$ et $A' \neq \pm I$ ou contraire. $A, A' \in G$ sblbl ssi $A, A' \neq \pm I$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A')$, $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A'^2)$ ou $A = A'$. **Q3** $\varphi(t) = \left(\begin{smallmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{smallmatrix}\right)$ av $a(0) = d(0) = 1, b(0) = c(0) = 0$, $a'(0) = a_{11}, b'(0) = a_{12}, c'(0) = a_{21}, d'(0) = a_{22}$ et $ad - bc = 1$ ps $(\det(\varphi(t)))' = a'd + ad' - b'c - bc' = 0$ evalué en $t = 0$: $a_{11} + a_{22} = 0$

Note: $d\det(M).H = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}\, MH)$, en particulier $d\det(I) = \operatorname{tr}$ donc ici $0 = (\det(\varphi(t)))'(0) = d\det(\varphi(t)).\varphi'(t)(0) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}\,\varphi(t)\varphi'(t))(0) = \operatorname{tr}(IA)$

CCINP PSI 2021 (normes équivalentes sur espaces de fonctions)

Enoncé 142 - 1321155

On note $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1\left[0,1\right],\ f(0) = 0\right\}$. On pose, pour toute fonction $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1) Montrez N et N' sont des normes sur E.

2) Etablir, pour tout $x \in [0,1]$, $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$.

3) Montrez il existe deux réels α, β tq $\forall f \in E$, $\alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f)$.

RMS 132-1155

Q1 $f + f' = 0$ ssi $f(x) = Ce^{-x}$ et $C = 0$ cr $f(0) = 0$. **Q2** mem deriv et val en 0. **Q3** $|f(x)| \leq e^x |f(x)| \leq N'(f) \int_0^x e^t \leq (e-1)N'(f)$ dc $\|f\|_\infty \leq (e-1)N'(f)$ et $\|f'\|_\infty = \|f' + f - f\|_\infty \leq (1 + e - 1)N'(f)$. $N'(f) \leq N(f)$ immediat.

CCINP PSI 2021 (convergence suite de polynômes)

Enoncé 143 - 1321154

Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = \left|P(a)\right| + \displaystyle\int_0^1 \left|P'(t)\right|\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrez que, si E est un evn muni d'une norme N, si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \longrightarrow N(x)$.

3) Pour quelles valeurs de a, la suite des $P_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

RMS 132-1154

Q2 $\left|N(x_n) - N(x)\right| \leq \|x_n - x\|$. **Q3** $N_a(P_n) = (\frac{|a|}{2})^n + \frac{1}{2^n}$ cvg ssi $|a| \leq 2$, vers 0 ssi $|a| < 2$. pr $a = \pm 2$, $N_a(P_n - 1) \to 0$.

X-ENS PSI 2021 (convergence faible sur L^2) ✷

Enoncé 144 - 22030801 Soit $E = L^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ et de la norme associée. On dit que la suite (f_n) converge fortement vers f si la suite $(\|f_n - f\|)$ converge vers 0. On dit que la suite (f_n) converge faiblement vers f si $\forall \varphi \in C^1([-1,1],\mathbb{R}), (f_n \mid \varphi) \longrightarrow (f \mid \varphi)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

1) Montrez que si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge fortement vers f. La réciproque est-elle vraie ?
2) Montrez que si (f_n) converge fortement vers f, alors (f_n) converge faiblement vers f.
3) Montrez que si (f_n) converge faiblement vers f de classe C^1 et si la suite $(\|f_n\|)$ cvge vers $\|f\|$, alors (f_n) cvge fortement vers f.
4) Montrez que si (φ_n) est une suite de fonctions C^1 qui converge uniformément vers φ et si (φ'_n) converge uniformément et si (f_n) est une suite bornée qui converge faiblement vers f, alors $(f_n \mid \varphi_n) \longrightarrow (f \mid \varphi)$.
5) On pose $f_n : x \longrightarrow \sin(nx)$. Montrez (f_n) converge faiblement vers la fonction nulle.

BEOS 6525 RMS 132-164

Q1 $\|g\| \le \sqrt{2}\|g\|_\infty$ dc $\|f_n - f\| \le \sqrt{2}\|f_n - f\|_\infty$. recipr fausse $\|x^n\| \to 0$ et $\|x^n\|_\infty = 1$. **Q2** $|(f_n \mid \varphi) - (f \mid \varphi)| \le \|f_n - f\|\|\varphi\|$ pr C-S. **Q3** $\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2(f_n \mid f) \longrightarrow 0 \|f\|^2$ cr $f C^1$ (!). **Q4** on sait φ C^1 et φ'_n cvg unif. vers φ'. $|(f_n \mid \varphi_n) - (f \mid \varphi)| \le |(f_n \mid \varphi_n - \varphi)| + |(f_n \mid \varphi) - (f \mid \varphi)| \le \|f_n\|\sqrt{2}\|\varphi_n - \varphi\|_\infty + |(f_n \mid \varphi) - (f \mid \varphi)| \to 0$ cr $\|f_n\| \le M$ et φ C^1 **Q5** ipp $|(f_n \mid \varphi)| = |\frac{1}{n}[-\cos(nx)\varphi(x)]_{-1}^{1} + \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\cos(nx)\varphi'(x)| \le \frac{2M_0}{n} + \frac{2M_1}{n} \to 0$

Lemme de Riemann-Lebesgue: si f intégrable sur $[a,b]$, $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt \longrightarrow 0$ et $\int_a^b \sin(nt) f(t)\,dt \longrightarrow 0$.
Note: Dans un Hilbert, de tte suite bornée on peut extraire une ss-suite faiblement convgte, cad les boules fermées sont faiblement compactes.
Note: Dans BEOS, il y a φ $C1$, dans la RMS il y φ continue ce qui change un peu la démo de Q5.

Centrale PSI 2021 (suite de matrices diagonalisables) ☜

Enoncé 145 - 1321013

1) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
2) Soit P de degré n. Montrez P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $c > 0$ tq, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \ge c|\operatorname{Im} z|^n$.
3) Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez χ_A scindé sur $\mathbb{R}$.

RMS 132-1013

Q1 Non. $T = \lim T_n$ av $T_n = [1,2,3][0,1+\frac{1}{n},2][0,0,\frac{2}{n}]$ **Q2** si $P = a\prod_i (X - x_i), |z - x_i| \ge |\operatorname{Im} z|$. Ok av $c = |a|$. recipr, si $|P(z)| \ge c|\operatorname{Im} z|^n$, $P(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$. **Q3** Q2 montre ens. des poly de degré n scindés unitaires ($c = 1 = cste$) sur $\mathbb{R}$ fermé.
Note: L'ensemble F_n des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés ou constants est un fermé.
Note: L'ens. des polynômes de degré n scindés à racines simples est ouvert, mais pas celui de $\mathbb{R}_n[X]$ (ex : $X(1 + \frac{1}{k}X^2) \in \mathcal{V}(X)$)). L'adhérence est F_n.
Note: L'ensemble des polynômes complexes de degré n scindés à racines simples est ouvert, connexe et dense dans $\mathbb{C}_n[X]$.

CCP PSI 2021 (limite suite endomorphismes)

Enoncé 146 - 21070101

Soit E un evn de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \le \|x\|$.
1) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - Id) \cap \operatorname{Im}(f - Id)$ et y tel que $x = f(y) - y$. Déterminez $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.
2) En déduire $E = \operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id)$
3) Emy ne s'en rappelle plus. Il y a un résultat qui demande alors de démontrer que la suite de vecteurs $\frac{1}{n}(x + f(x) + \cdots + f^{n-1}(x))$ a pour limite, lorsque $n \to +\infty$, la projection de x sur $\operatorname{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - Id)$. C'est peut-être cela ??

Emy 2021

Q1 $f^n(y) = y + nx$ pr recurr. **Q2** si $x \in \operatorname{Ker}(f - Id) \cap \operatorname{Im}(f - Id)$, $x = \frac{1}{n}(f^n(y) - y)$ et $\|x\| \le \frac{1}{n}2\|y\| \to 0$.

Centrale PSI 2021 (fonction matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) ✷ ☜

Enoncé 147 - 1321028 Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1.
1) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.
2) Supposons, dans cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$. Montrez, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

RMS 132-1028

Q1 $AS = SA_0$ ps $A'S + AS' = S'A_0$ dc $A' = S'A_0S^{-1} - AS'S^{-1} = S'(S^{-1}AS)S^{-1} - AS'S^{-1}$ st $B = S'S^{-1}$. **Q2** soit $(C_1, \ldots, C_n)$ un sys. de solutions de $X' = B(t)X$ tq $X(0) = \varepsilon_i$, base can. de $\mathbb{R}^n$. si on pose $S = [C_1 \ldots C_n], S' = BS$, $S(t)$ inv. pr tt t, et $S(0) = I_n$. $AS = SA_0$ cr $(AS)' = A'S + ABS = (BA - AB)S + ABS = BAS$ et $(SA_0)' = S'A_0 = BSA_0 = BAS$ et $(AS)(0) = (SA_0)(0) = A_0$

X — Analyse : Autres

CCINP PSI 2021 (systeme différentiel 2×2 à coefficients non constants) ✌

Enoncé 148 - 22022402 Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 3t & -2t \\ 4t & 1 + 3t \end{pmatrix}$

1) Donnez les éléments propres de $A(t)$.
2) En déduire il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3) Résoudre le système différentiel.

BEOS 5961

Q1 $\chi_A = x^2-2x+1-t^2$ $1-t:(-1,1)$ $1+t:(1,-2)$ **Q3** $x = Ce^{t+1/2t^2} + De^{t+1/2t^2}$ $y = -Ce^{t+1/2t^2} - 2De^{t+1/2t^2}$

Mines-Ponts PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec recollement)

Enoncé 149 - 132727 Soit $n\in\mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'-ny=0$

RMS 132-727

sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, $y=Cx^n$. sur $\mathbb{R}$: $n=0$ $y=C$ $n=1$ $y=Cx$ et pr $n\geq 2$, $y=Cx^n$ sur $\mathbb{R}^+$ et $y=Dx^n$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

X PSI 2021 (inégalité différentielle)

Enoncé 150 - 132343 Soient $a,b\in\mathbb{R}^{+*}$ et $f\in\mathscr{C}^1\left(\left[0,b\right],\mathbb{R}\right)$ telle que $f(0)=a$ et $f'(x)\geq f(x)^3$. Montrez $b\leq\frac{1}{2a^2}$.

RMS 132-343

soit $A=\left\{x\in[0,b],\ \forall y\in[0,x]f(y)>0\right\}$. comme $f(0)>0$, $A\neq\emptyset$ par cont. et maj. dc admet un sup c. $\forall y\in[0,c[, f(y)>0$ dc $\neq 0$ ps $\frac{f'(y)}{f^3(y)}\geq 1$ ps $\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2f^2(y)}\geq y-0$ ps a la lim, $c\leq\frac{1}{2a^2}$. Si $c<b$, $2f(y)^2\geq\frac{1}{1/2a^2-x}\geq 2a^2$ dc $f(c)>0$. absurde.

Centrale PSI 2021 (conditions de Cauchy-Riemann)

Enoncé 151 - 1321031 Soient $n\in\mathbb{Z}$ et (E_n) l'équation différentielle $t^2u''+tu'-n^2u=0$.

1) Déterminez les $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $u_\alpha : t\longrightarrow t^\alpha$ soit solution de (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$. Résoudre (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Soient f,g deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}$.

On pose $\widehat{f}:(r,\theta)\longrightarrow(r\cos\theta,r\sin\theta)$ et $\widehat{g}:(r,\theta)\longrightarrow g(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Reliez $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial r}$ à $\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\theta}$ puis $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\theta}$ à $\frac{\partial\widehat{g}}{\partial r}$.

3) Montrez il existe $a_n\in\mathbb{C}$ tel que, pour tout $r>0$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(r,\theta)e^{in\theta}d\theta=a_nr^{-|n|}$.

RMS 132-1031

Q1 $\alpha=\pm n$ $\frac{A}{t^n}+Bt^n$. **Q2** $C=\cos\theta, S=\sin\theta$, $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial r}=C\frac{\partial f}{\partial x}+S\frac{\partial f}{\partial y}=C\frac{\partial g}{\partial y}-S\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\theta}=-rS\frac{\partial f}{\partial x}+rC\frac{\partial f}{\partial y}=-rS\frac{\partial g}{\partial y}-rC\frac{\partial g}{\partial x}=-r\frac{\partial\widehat{g}}{\partial r}$ **Q3** $\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial r^2}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\widehat{g}}{\partial r\partial\theta}$ et $\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial\theta^2}=-r\frac{\partial^2\widehat{g}}{\partial r\partial\theta}$ dc $r^2\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial r^2}+r\frac{\partial\widehat{f}}{\partial r}=-\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial\theta^2}$. av. $k(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(r,\theta)e^{in\theta}d\theta$ C^2 sr $\mathbb{R}$ cr $|\frac{\partial^k\widehat{f}}{\partial r^k}e^{in\theta}|\leq M_k$ sur $D(0,R)$ ps $r^2k''(r)+rk'(r)=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial\theta^2}e^{in\theta}$ =(2 ipp)= $n^2\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(r,\theta)e^{in\theta}=n^2k(r)$ dc Q1 $k(r)=a_nr^{-|n|}+b_nr^{|n|}$. à r fixé, $k(r)$ borné / n dc $b_n=0$ pr $n\neq 0$.

Conditions de Cauchy-Riemann: $f=u+iv$ holomorphe(analytique) en $z=x+iy$ ssi f différentiable en $M(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(M)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ ssi $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(M)=0$ ssi $\frac{\partial u}{\partial x}(M)=\frac{\partial v}{\partial y}(M)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(M)=-\frac{\partial v}{\partial x}(M)$.

Formule intégrale de Cauchy: si f a un DSE $\sum a_nz^n$ (analytique) sur $]-R,R[$, $\forall r<R, \forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$.

IMT PSI 2021-2013 (systeme différentiel 3×3)

Enoncé 152 - 1321177 Soit le système (S) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y-z\\ y' & = & z-x\\ z' & = & x-y\end{array}\right.$ avec les conditions initiales $x(0)=1$, $y(0)=z(0)=0$.

1) Existence et unicité des solutions de (S).

2) Montrez que si (x,y,z) est une solution, alors $x+y+z$ et $x^2+y^2+z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

3) Résoudre (S).

RMS 132-1177 124-1308

Q2 $x'+y'+z'=0$ et $xx'+yy'+zz'=0$ dc traj. ds sphère centr. 0 ∩ plan = arc de cercle. ici $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ ctr $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ $R=\sqrt{1^2-3\times(\frac{1}{3})^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **Q3** $\chi_A=x^3+3x$ $0:(1,1,1)$ $\sqrt{3}i:(j,j^2,1)$. $x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}t)$, $y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$, $z=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)-\frac{1}{3}\cos(-\sqrt{3}t)$

X PSI 2021 (image d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)

Enoncé 153 - 132347 Déterminez l'image de $\varphi:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow(x+y,xy)$

RMS 132-347

si u,v ds img, X^2-uX+v a 2 rac. $x,y\in\mathbb{R}$ dc $\Delta=u^2-4v\geq 0$. recipr, si $u^2-4v\geq 0$, $\exists x,y\in\mathbb{R}$ tq $\varphi(x,y)=(u,v)$: rac. de X^2-uX+v dc $\varphi(\mathbb{R}^2)=\left\{x^2\geq 4y\right\}$.

Note: φ non injective car $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ mais φ C^∞-difféomorphisme de $\left\{x>y\right\}$ (ou $\left\{x<y\right\}$) sur $\left\{x^2>4y\right\}$.

CCINP PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2)

Enoncé 154 - 1321175 On considère l'équation différentielle $(E):(x^2-1)y''+2xy'-2y=0$.

1) Déterminez les solutions polynomiales de (E).

2) Trouvez une équation différentielle (E') vérifiée par $x\longrightarrow z(x)=\frac{1}{x}y(x)$.

3) Cherchez a,b,c tq $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

4) Résoudre (E'). En déduire toutes les solutions de (E).

RMS 132-1175

Q1 si a_nx^n coeff domin, $n^2+n-2+0$ dc $n=1$ ps $ax+b$ donne ax. **Q2** $y=xz\rightarrow(E')x(x^2-1)z''+(4x^2-2)z'=0$. **Q3** $a=-2$ $b=-1$ $c=-1$ **Q4** sr $I=]-\infty,-1[,]-1,0],]0,1[,]1,+\infty[$, $z'=\frac{C}{x^2(x^2-1)}=C(\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}+\frac{-1}{x^2})$ ps $z=\frac{C}{2}(\ln|\frac{x-1}{x+1}|+\frac{1}{x})+D$ ps $y=\frac{C}{2}(x\ln|\frac{x-1}{x+1}|+1)+Dx$ sr I.

ENS PSI 2021 (fonctions à variation bornée) ✷ ✷

ENONCÉ 155 - 132162

Une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si la quantité $V(f) = \sup_{n\geq 1} \sup_{0\leq t_0\leq \cdots \leq t_n \leq 1} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$ est finie.

On note BV l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ à variation bornée.

1) Montrez qu'une fonction monotone $\in BV$, puis qu'une fonction lipschitzienne $\in BV$. Est-ce qu'une fonction de BV est bornée?
2) Exhiber une fonction continue qui n'appartient pas à BV.
3) Pour tout $f \in BV$, posons $\|f\|_{BV} = |f(0)| + V(f)$. Montrez que $(BV, \|.\|_{BV})$ est un ev normé.
4) Est-ce que BV est stable par produit?
5) Soient $f \in BV$ et $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Montrez que si g est monotone, alors $f \circ g \in BV$. Est-ce que si f est monotone alors $f \circ g \in BV$?

RMS 132-162

Q1 si $f \nearrow$, $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n f(t_k) - f(t_{k-1}) = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$. si f k−lipsch, $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq k \sum_{k=1}^n |t_k - t_{k-1}| = k(t_n - t_0) \leq k$. pour $t_0 = 0$ et $t_1 = x$, $|f(t_1) - f(t_0)| \leq V(f)$ dc $|f(x)| \leq V(f) + |f(0)|$. Oui. **Q2** $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$ prolong. en 0 et $t_0 = \frac{1}{n\pi}, t_1 + \frac{1}{(n-1)\pi}, \ldots, t_{n-1} = \frac{1}{\pi}$ ps $\sum_{k=1}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} \to +\infty$ **Q3** si $\|f\|_{BV} = 0$, $f(0) = 0$ et com. Q2, $f(t_1) = f(t_0)$ donne $f(x) = f(0) = 0$ **Q4** oui cr $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| = |(f(t_k) - f(t_{k-1}))g(t_k) + f(t_{k-1})(g(t_k) - g(t_{k-1}))| \leq M_g|f(t_k) - f(t_{k-1}) + M_f|g(t_k) - g(t_{k-1})|$ **Q5** si $g \nearrow$, on pose $t'_i = g(t_i)$ et si $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1, 0 \leq t'_0 \leq \cdots \leq t'_n \leq 1$ dc $\sum_{k=1}^n |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}| = \sum_{k=1}^n |f(t'_k) - f(t'_{k-1}| \leq V(f)$. Oui cr $f \in BV$ Q1.

Note: si f C^1 sur $[0,1]$, alors $V(f) = \int_0^1 |f'|$.

Note: toute fonction avb s'écrit comme différence de 2 fonct. croissantes, donc BV est le sev engendré par l'ensemble des fonctions monotones.

Centrale PSI 2021 (équivalent racine d'une suite de polynômes)

ENONCÉ 156 - 1321015 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$

1) Montrez $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.
2) Montrez P'_n admet une unique racine dans $]0,1[$. On la note λ_n.
3) Simplifiez $\frac{P'_n}{P_n}$.
4) En déduire un équivalent de λ_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

RMS 132-1015

Q2 Rolle n fois : rac. α_k de P'_n verif $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2 < 2 < \cdots < n-1 < \alpha_n < n$ **Q3** $\frac{P'_n}{P_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{X-k}$ **Q4** $\frac{P'_n(\lambda_n)}{P_n(\lambda_n)} = 0 = \frac{1}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_n - k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\lambda_n} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ dc $\lambda_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

CCINP PSI 2021 (calcul de dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$) ✷

ENONCÉ 157 - 1321178

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Montrez que f est continue
2) Exprimez les dérivées partielles de f.
3) Montrez f est de classe C^1.
4) Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire?

RMS 132-1178

Q1 en $|f(x,y)| \leq |xy|$. Ok en $(0,0)$. **Q2** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$ dc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. $f(x,0) = 0$ dc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. **Q3** $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq \frac{|y|(2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|$. Ok en $(0,0)$. **Q4** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ dc $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. f non C^2 sr $\mathbb{R}^2$ (ms C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0)\}$).

Mines-Ponts PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec recollement) ✷

ENONCÉ 158 - 132728 Résoudre l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

RMS 132-728

av $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_1 = a_3 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{-4}{n^2-1} a_{n-3}$ pr $n \geq 3$ d'où $a_{4n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$ et $a_{4n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_2$. ev de dim 2 dc Ok sr $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{R}^{-*}$. c'est $a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2)$. sr $\mathbb{R}$, $a_0 = a'_0$ necess. pr C^0 et $a_2 = a'_2$ pr C^2. Recipr. Ok. dc $a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$.

Note: avec changement $t = x^2$ (rp $t = -x^2$), on trouve aussi $A\cos(x^2) + B\sin(x^2)$.

CCINP PSI 2021 (systeme différentiel 2×2)

ENONCÉ 159 - 22010912 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable?
2) Montrez que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
3) En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

RMS 132-1176 Banque CCINP MP 2021 075

Q1 $\chi_A = (x-1)^2$ $1 : (2,-1)$ Non **Q2** $v_1 = (2,-1)$ $v_2 = (-1,0) \to [1,1][0,1]$ **Q3** $x = ((2\lambda - \mu) + 2\mu t)e^t$ $y = (-\lambda - \mu t)e^t$.

X PSI 2021 (fonction C^∞)

ENONCÉ 160 - 132341 Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrez que la fonction $x \longrightarrow \dfrac{f(x)}{x}$ est de classe C^∞.

RMS 132-341

$\frac{f(x)}{x}=\int_0^1 f'(tx)\,dt$ et $|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}|=t^k|f^{(k+1)}(tx)|\le M_{k+1}$ av. $M_{k+1}=\sup|f^{(k+1)}|$ sr $[-A,A]$.

Centrale PSI 2021 (EDP d'ordre 1)

Enoncé 161 - 1321030 Soient $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $S(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=g(x,y)\}$.

1) Montrez que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

2) On cherche les fonctions g telles que ∇g soit constamment orthogonal à $(2,1)$ ou, ce qui revient au même, tq (E) $2\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0$.

(i) Montrez que l'endomorphisme $\varphi:(x,y)\longrightarrow(x-2y,y)$ de $\mathbb{R}^2$ est inversible.

(ii) Pour h de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $f=h\circ\varphi^{-1}$. Calculez les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

RMS 132-1030

Q1 av. $F(x,y,z)=(x,y,g(x,y))$, $\vec{n}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}\ne\vec{0}$ **Q2** av. $u=x-2y, v=y$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial v}$ ps $\vec{\nabla}g\perp(2,1)$ ssi $\frac{\partial h}{\partial v}=0$ ssi $h=k(u)$ ssi $g(x,y)=k(x-2y)$

IMT PSI 2021 (convergence d'une suite racine d'équation)

Enoncé 162 - 1321157

1) Montrez, pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^n x^k=1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0,1]$.

2) Montrez que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3) Montrez que la suite a_n converge et déterminez sa limite.

RMS 132-1157

Q1 $f_n(x)=\sum_{k=1}^n x^k$ $\upuparrows$ vrs $[0,n]$ **Q2** $f_{n+1}(a_n)=1+a_n^{n+1}\ge 1=f_{n+1}(a_{n+1})$ dc $a_n\ge a_{n+1}$ $f_n(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2^n}\le 1=f_n(a_n)$. **Q3** $\frac{1}{2}\le\ell\le a_n$ ps $f_n(\frac{1}{2})\le f_n(\ell)\le 1=f_n(a_n)$ ps lim, $1\le\frac{\ell}{1-\ell}\le 1$ dc $\ell=\frac{1}{2}$

Mines-Ponts PSI 2021 - Centrale PSI 2014 (extrema sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Enoncé 163 - 121858

Déterminez les extremums de $(x,y)\longrightarrow y\big(x^2+(\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$. (**2014 :** Précisez leur nature locale ou globale) .

RMS 132-729 121-858

$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$ $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\ln^2 y+2\ln y$ pts crit. $(0,1)$ $(0,e^{-2})$ $f(x,y)\ge 0$ et $f(0,1)=0$ dc mini. global. $\Delta(h,k)=f(0+h,e^{-2}+k)-f(0,1/e^2)[=4e^{-2}]=e^{-2}h^2-e^2k^2+kh^2+o(k^2)$ puis $\Delta(0,k)\sim_{k=0}-e^2k^2\le 0$ et $\Delta(h,0)\sim_0 e^{-2}h^2\ge 0$. Non. Point-Col.

IMT PSI 2021 (développement asymptotique d'une suite racine d'équation)

Enoncé 164 - 1321156

1) Montrez que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x-\ln x=n$ admet une unique solution $x_n\in\,]0,1]$.

2) Montrez que $x_n\longrightarrow 0$ puis que $x_n\sim e^{-n}$.

3) Donnez un développement asymptotique de x_n.

RMS 132-1156

Q1 $\varphi(x)=x-\ln x$ $\downdownarrows$ vrs $[1,+\infty[$. **Q2** $\varphi(x_{n+1})=n+1\ge n=\varphi(x_n)$ dc $x_{n+1}\le x_n$ minor. par 0 dc cvg. si $\ell\in]0,1]$, $\ell-\ln\ell=+\infty$ abs. $y_n=x_ne^n=e^{n+\ln x_n}=e^{x_n}\to 1$ **Q3** $x_n=e^{-n}+u_n$ av $u_n=o(e^{-n})$, $e^{-n}+u_n-\ln(e^{-n}+u_n)=n$ ps $e^{-n}+u_n-\ln(1+u_ne^n)=0=e^{-n}-u_ne^n+o(u_ne^n)$ dc $u_n\sim e^{-2n}$

CCINP PSI 2021 (trigonalisation et système différentiel)

Enoncé 165 - 21070901 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&4\\-1&3\end{pmatrix}$

1) Montrez A non diagonalisable.

2) Montrez il existe une base (e_1,e_2) qui trigonalise A. Donnez T.

3) Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl}x'&=&-x+4y\\y'&=&-x+3y\end{array}\right.$

4) Comment faire pour trouver les constantes sachant $x(0)=y(0)=1$.

Romain 2021

X PSI 2021 (équation différentielle non linéaire sur $\mathbb{R}$) ✷

Enoncé 166 - 132342 Déterminez les $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\big(f(x)-f'(x)\big)=x$.

RMS 132-342

av. $u=y^2$, $u-\frac{1}{2}u'=x$, $u=Ce^{2x}+x+\frac{1}{2}$ ps $Ce^{2x}+x+\frac{1}{2}\ge 0$ ssi $C\ge(-x-\frac{1}{2})e^{-2x}=g(x)$ et $g'(x)=2xe^{-2x}$ $]-\infty,0]\searrow[-\frac{1}{2},+\infty[=g_1(x)$ et $[0,+\infty[\nearrow[-\frac{1}{2},0[$ dc si $C\ge 0$, $u\ge 0$ sr $[g_1^{-1}(C),+\infty[$ et si $-\frac{1}{2}\le C<0$, $u\ge 0$ sur $[g_1^{-1}(C),\alpha]$. aucune solution jusqu'à $-\infty$ et aucun recollement possible.

Centrale PSI 2021 (extrema sur $\mathbb{R}^2$)

Enoncé 167 - 1321029

1) Déterminez le nombre de solutions de $xe^{-x}=\lambda$ en fonction de $\lambda\in\mathbb{R}$.

2) Trouvez les extrema de $f:(x,y)\longrightarrow xye^{-x-y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

3) Déterminez les λ tels que l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\lambda\}$ soit non vide.

RMS 132-1029

Q1 $g(x)=xe^{-x}\to]-\infty,1]\nearrow]-\infty,\frac{1}{e}]$ et $[1,+\infty[\searrow [\frac{1}{e},0[$ dc $>\frac{1}{e}:0$ $\frac{1}{e}:1$ $0<\lambda<\frac{1}{e}:2$ $\lambda\leq 0:1$ **Q2** $\frac{\partial f}{\partial x}=y(1-x)e^{-x-y}$ $\frac{\partial f}{\partial y}=x(1-y)e^{-x-y}$ pts crit., $(0,0)(1,1)$. en $(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$. av. $\Delta(h,k)=f(h,k)-f(0,0)$, $\Delta(h,h)\sim_0 h^2$ et $\Delta(h,-h)\sim_0 -h^2$. Non. Point-Col. en $(1,1)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-e^{-2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$. on a $f(1+h,1+k)-f(1,1)=g(1+h)g(1+k)-e^{-1}e^{-1}\leq 0$. max. global. **Q3** $f\geq 0$ dc $>e^{-2}$ ou $<0:\varnothing$, $f(0,0)=0$ et $f(1,1)=e^{-2}$ dc non vide pr $0\leq\lambda\leq e^{-2}$ via tvi et $[0,1]\to f(t,t)=g^2(t)$.

CCINP PSI 2021 (étude fonction de $\mathbb{R}^2$)

Enoncé 168 - 21070702

Soit $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y=0\}$. On définit $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ si $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus F$ et $f(x,y)=0$ si $(x,y)\in F$.

1) Montrez F C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus F$ et vérifie $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=3f$.
2) Montrez f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et calculez-les.
3) f est-elle continue en $(0,0)$?

Mathieu 2021

Q2 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. **Q3** non cr $f(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^a})\sim\frac{1}{n^{4-a}}\to+\infty$ pr $a>4$.

XI — Probabilités

CCINP PSI 2021 (lancement dé)

Enoncé 169 - 22031802 Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1) Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminez la loi de N.
2) Pour tous $(k,n)\in[\![1;6]\!]\times\mathbb{N}^*$, calculez $P(X=k,N=n)$.
3) Calculez $P(X=k)$. En déduire la loi de X.
4) Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

BEOS 5961

Q1 $N\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{6}{10}\right)$ **Q2** $P(X=k,N=n)=P(X=k|N=n)P(N=n)=\frac{1}{6}(\frac{4}{10})^{n-1}\frac{6}{10}$ **Q3** $P(X=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=k,N=n)=\frac{1}{6}$. $X\hookrightarrow\mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$. **Q4** oui $P(X=k,N=n)=P(X=k)P(N=n)$

Mines-Ponts PSI 2021 (équation différentielle à coefficients aléatoires)

Enoncé 170 - 132733 Soient A et B deux vas indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Déterminez la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''+(A-1)y'+B^2y=0$ tendent vers 0 en $+\infty$. .

RMS 132-733

$r^2+(a-1)r+b^2=0\Delta>0:r_1,r_2<0$ $\Delta=0:r<0$ $\Delta<0$: No. dc ssi ($\Delta>0$ et $P=r_1r_2>0$ et $S=r_1+r_2<0$) ou ($\Delta=0$ et $S<0$) ssi ($(a-1)^2>4b^2$ et $b>0$ et $a>1$) ou ($(a-1)^2=4b^2$ et $a>1$) soit $\bigcup_{n=1}^{+\infty}(B=n)\cap(A>2n+1)\bigcup\bigcup_{n=1}^{+\infty}(B=n)\cap(A=2n+1)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(B=n)\cap(A\geq 2n+1)$ ps $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p(1-p)^{2n}=\frac{(p-1)^2}{3-3p+p^2}$

CCINP PSI 2021 (premier succès jetons distincts)

Enoncé 171 - 1321182 On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1,2,3 et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la va correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la va correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1) Déterminez la loi de Y.
2) Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.
3) Déterminez la loi de (Y,Z).
4) En déduire la loi de Z.

RMS 132-1182

Q1 $Y(\Omega)=[\![2;+\infty]\!]$, $P(Y=n)=(\frac{1}{3})^{n-2}\frac{2}{3}$. **Q2** $Y-1\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. $E(Y)=E(Y-1)+1=\frac{5}{2}$, $V(Y)=V(Y-1)=\frac{3}{4}$ **Q3** si $k\leq n$ ou $n\leq 1$,0 et si $2\leq n<k$, $P(Y=n,Z=k)=P(Z=k|Y=n)P(Y=n)=(\frac{2}{3})^{k-n-1}\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{n-2}\frac{2}{3}$ **Q4** pr $k\geq 3$, $P(Z=k)=\frac{2}{9}(\frac{2}{3})^{k-3}\sum_{n=2}^{k-1}(\frac{1}{2})^{n-2}=(\frac{2}{3})^{k-1}-2(\frac{1}{3})^{k-1}$
Note: $E(Z)=\frac{11}{2}$ $V(Z)=\frac{27}{4}$, $Z-Y\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Plus généralement, pour n jetons, $J_k-J_{k-1}\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$, $E(J_n)=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Centrale PSI 2021 (limite suite espérance de vas)

Enoncé 172 - 1321037 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de vas indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

1) Pour $t\in\mathbb{R}$, justifiez que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Montrez $E(\exp(tX_n))\leq e^{t^2/2}$ pour tous $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$.
2) justifiez que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer. Déterminez la limite de $E\left(\exp(tS_n/\sqrt{n})\right)$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

RMS 132-1037

Q1 va finie $E(\exp(tX_n))=e^{-t}\frac{1}{2}+e^{t}\frac{1}{2}=\cosh t$ $(2n)!\geq(2n)!!=2^n n!$ dc $\cosh t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}=e^{t^2/2}$ **Q2** $E(\exp(tS_n))=E(\prod_{i=1}^{n}\exp(tX_i))=\prod_{i=1}^{n}\cosh t$ pr indep. $u_n=E\left(\exp(tS_n/\sqrt{n})\right)=\cosh^n(\frac{t}{\sqrt{n}})$ ps $\ln u_n=n\ln\cosh\frac{t}{\sqrt{n}}\sim n(\cosh\frac{t}{\sqrt{n}}-1)\sim\frac{1}{2}t^2$ dc $u_n\to\exp(t^2/2)$ si $t\neq 0$. Ok pr $t=0$.

CCINP PSI 2021 (appels téléphoniques) ✷

Enoncé 173 - 15052201 Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p, avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus après une série d'appels.

1) Donnez la loi de X. Justifier. Précisez $E(X)$ et $V(X)$.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels et Z au nombre total de clients joints.

(i) Exprimez Z à l'aide de$X$ et$Y$. Précisez les valeurs possibles pour Z

(ii) Calculez $P(Z=0)$. Montrez $P(Z=1) = npq^{2n-2}(1+q)$

(iii) Soit $i \in [[0,n]]$. Déterminez $P(Y=k \mid X=i)$.

(iv) Montrez $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$ puis $P(Z=i) = \binom{n}{i}(1-q^2)^i(q^2)^{n-i}$. En déduire la loi de Z.

RMS 132-1188 BQCCPMP 2021-98

Q1 $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p), E(X) = np, V(X) = npq$ **Q2 (i)** $Z = X+Y, Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$ **(ii)** $P(Z=0) = q^{2n}, P(Z=1) = P(X=1)P((Y=0)|(X=1)) + P(X=0)P((Y=1)|(X=0)) = npq^{n-1}\times q^{n-1} + q^n \times npq^{n-1} = npq^{2n-2}(1+q)$ **(iii)** Si $k > n-i$ 0 sinon $P(Y=k|X=i) = \binom{n-i}{k}p^kq^{n-i-k}$ **(iv)** $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$ $((X=i))_{0\le i\le n}$ sys cplt, prob. totl $P(Z=k) = \sum_{i=0}^k P(Y=k-i|X=i)P(X=i) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^iq^{n-i}p^{k-i}q^{n-k} = q^{2n-2k}p^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}q^{k-i} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k(q^2)^{n-k}$. $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(1+q))$. on a $p(1+q) = p(2-p) = 1-q^2$.

X PSI 2021 (probabilité matrice 3×3 diagonalisable)

Enoncé 174 - 132349

Soient A, B 2 vas indépendantes de loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$. Déterminez la probabilité pour que $\begin{pmatrix} 1 & A-1 & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

RMS 132-349

si $a, b, 1 \neq$ Ok. si $a=1$, diag. ssi $b \neq 1$, si $a=b$, diag ssi $a=0$, si $b=1$ non dc diag ssi $a, b, 1 \neq 2$ à 2 ou $a=b=0$ ou ($a=1$ et $b\neq 1$). $P(A=B=0) = \frac{1}{(n+1)^2}$, $P((A=1)\cap(B\neq 0)) = \frac{n}{(n+1)^2}$ et $\#\overline{(A,B,C \neq)} = (n+1)+n+n = 3n+1$ dc $P(A,B,C\neq) = \frac{n^2-n}{(n+1)^2}$ dc $\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$

CCINP PSI 2021-2019 (loi binomiale négative)

Enoncé 175 - 1301280

1) Donnez le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$ pour $n=1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k}p^nq^k$ avec $0<p<1$ et $q = 1-p$. Montrez que la suite (p_k) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

3) On définit la loi d'une va par $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = p_k$. Déterminez la fonction génératrice de X.

4) Calculez l'espérance et la variance de X.

RMS 132-1187 130-1280

Q1 $= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+2)x^{k-n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$. **Q2** $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p^n\frac{1}{(1-q)^n} = 1$ **Q2** $f_X(t) = \frac{p^n}{(1-qt)^n}$ **Q3** avec dl en 1, $f'_X(1) = \frac{nq}{p}$ $f''_X(1) = \frac{n(n+1)q^2}{p^2}$ dc $V(X) = \frac{nq}{p^2}$

Formule du binôme négatif: $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k}(-1)^kx^k$

Loi binomiale négative: $X \hookrightarrow \mathscr{BN}(n,p)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}, P(X=k) = \binom{-n}{k}p^n(-1)^k(1-p)^k = \binom{k+n-1}{k}p^n(1-p)^k$ = nbr échecs avt n^{e} succès

---

ENS PSI 2021 (série des inverses des nombres premiers) ✷ ✷

Enoncé 176 - 132173 Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\zeta : s \in]1,+\infty[\longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$

1) Déterminez $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que (λn^{-s}) soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. Soit X_s une va suivant cette loi.

2) Pour quels s, X_s est-elle d'espérance finie?

3) Montrez que les événements $(X_s \in p\mathbb{N}^*)$ pour $p \in \mathscr{P}$ sont indépendants.

4) Soit (p_n) l'énumération croissante de $\mathscr{P}$. Montrez que $\zeta(s) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-1/p_n^s}$.

5) Déterminez la nature de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$.

RMS 132-173

Q1 $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$. **Q2** $\sum n\frac{\lambda}{n^s}$ cvg ssi $s>2$ et $E(X_s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$. **Q3** pr tt $n, P(X_s \in n\mathbb{N}^*) = P(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X_s = kn)) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda}{k^sn^s} = \frac{1}{n^s}$ ps $(X_s \in n\mathbb{N}^*)\cap(X_s \in m\mathbb{N}^*) = (X_s \in n \vee m\mathbb{N}^*)$ ps si p, p' premiers, $P((X_s \in p\mathbb{N}^*)\cap(X_s \in p'\mathbb{N}^*)) = P(X_s \in pp'\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^sp'^s}$. Ok. **Q4** $\prod_{n=1}^N(1-\frac{1}{p_n^s}) = \prod_{n=1}^N P(\overline{X_s \in p_n\mathbb{N}^*}) = P(\bigcap_{n=1}^N\overline{X_s \in p_n\mathbb{N}^*})$ ps $A_N = \bigcap_{n=1}^N\overline{X_s \in p_n\mathbb{N}^*} \searrow \bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{X_s \in p_n\mathbb{N}^*} = (X_s = 1)$ dc lim.. $= P(X_s = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$. **Q5** $\lim_1\zeta(s) = +\infty$ dc $\lim_1 \ln\zeta(s) = +\infty$, ps $\ln(\zeta(s_0)) \ge 2A$, pr $s_0 \simeq 1$. com. $\ln(u_{N,s_0}) \nearrow \ln\zeta(s_0)$, pr $N \ge N_0, \sum_{n=1}^N -\ln(1-\frac{1}{p_n}) \ge \sum_{n=1}^N -\ln(1-\frac{1}{p_n^{s_0}}) \ge A$ dc $\sum -\ln(1-\frac{1}{p_n})$ dvg. $-\ln(1-\frac{1}{p_n}) \sim \frac{1}{p_n}$

Note: $p_n \sim n\ln n$, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{p_k} \sim \ln\ln n$. si $\pi(x)$ est le nombre de p premiers $\le x$, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

Mines-Ponts PSI 2021 (min et max de variables aléatoires géométriques) **A Terminer** ✷

Enoncé 177 - 132734 Soient $0<p<1$ et (X_n) une suite i.i.d. de vas suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \min(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi puis l'espérance de Y_n.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi de Z_n, puis un équivalent de $E(Z_n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

RMS 132-734

Q1 $Y_n \geq k$ ssi $\forall 1 \leq i \leq n, X_i \geq k$, $P(X_i \geq k) = (1-p)^{k-1}$ ps $P(Y_n \geq k) = (1-p)^{n(k-1)}$ ps $P(Y_n = k) = P(Y_n \geq k) - P(Y_n \geq k+1) = (1-p)^{n(k-1)}(1-(1-p)^n)$ dc $Y_n \hookrightarrow \mathcal{G}\big(1-(1-p)^n\big)$, $E(Y_n) = \frac{1}{1-(1-p)^n}$ **Q2** $Z_n \leq k$ ssi $\forall 1 \leq i \leq n, X_i \leq k$ ps $P(Z_n \leq k) = \prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i > k)) = (1-(1-p)^k)^n$ et $P(Z_n = k) = P(Z_n \leq k) - P(Z_n \leq k-1) = (1-(1-p)^k)^n - (1-(1-p)^{k-1})^n$

Centrale PSI 2021 (matrice 2×2 et valeurs propres aléatoires) ✌

Enoncé 178 - 1321036 Soient X et Y dex vas indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leq S$ les 2 valeurs propres de M.

1) Déterminez les expressions de I et S en fonction de X et Y.
2) Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?
3) Calculez la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4) Montrez, pour tout $k \geq 2$, $P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

RMS 132-1036

Q1 $I = X - Y, S = X + Y$ **Q2** inv ssi $X \neq Y$. $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p}{2-p}$ dc $\frac{2(1-p)}{2-p}$ **Q3** $\mathrm{Cov}\big((, X) - Y, X + Y\big) = V(X) - V(Y) = 0$ et $P((I = 0) \cap (S = 2)) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) = p^2$ et $P(I = 0) = \frac{p}{2-p}$ (Q2) $P(S = 2) = p^2$. Non. **Q4** pr $k \geq 2$, $P(S = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) = p^2 \sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{k-2}$. Ok.

CCP PSI 2021-2019-2018 (variable aléatoire $Z = X + Y + 1$)

Enoncé 179 - 1291207 Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1) Déterminez l'espérance et la variance de X. **(201x :** Pas la variance) .
2) Calculez la fonction génératrice de X.
3) En déduire la loi de X. **(201x :** Reconnaître la loi) .

RMS 132-1190 129-1207 Odlt 26.209

Q1 $E(Z) = 2E(X) + 1 = \frac{1}{p}$ dc $E(X) = \frac{1-p}{2p}$. $V(Z) = V(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}$ cr indep. dc $V(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$. **Q2** $G_Z(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = E(t t^X t^Y) = t(G_X(t))^2$ pr indep. ps $G_X(t) = +(\frac{p}{1-(1-p)t})^{1/2}$, + cr ≥ 0 sur $[0, 1]$ **Q3** $G_X(t) = \sqrt{p}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\ n!^2}(1-p)^n t^n$ dc $P(X = n) = \frac{\sqrt{p}\ (2n)!}{2^{2n}\ n!^2}(1-p)^n = \sqrt{p}\binom{-1/2}{n}(-1)^n(1-p)^n$.

Note: $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}\ n!^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n} x^n$ (formule du binôme négatif).

Loi binomiale négative: $X \hookrightarrow \mathcal{BN}\big(n, p\big)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}, P(X = k) = \binom{-n}{k} p^n(-1)^k(1-p)^k = \binom{k+n-1}{k} p^n(1-p)^k$ = nbr échecs avt n^{e} succès

---

X PSI 2021 (premeir succès 2 faces consécutifs) ✷

Enoncé 180 - 132348

On lance une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois Face-Face au n-ième lancer ?

RMS 132-348

$F_n = \{$F au n^{e} lancer$\}$ et $A_n = \{1^{re}$fois, 2 F consec. n^{e} lancer$\}$. $p_n = p(A_n), p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}$. $(F_1 \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2}, \overline{F_1})$ s.cplt ev. ps pr $n \geq 3$, $p_n = P(A_n) = P(A_n | F_1 \cap F_2)P(F_1 \cap F_2) + P(A_n | F_1 \cap \overline{F_2})P(F_1 \cap \overline{F_2}) + P(A_n | \overline{F_1})P(\overline{F_1}) = 0 \times \frac{1}{4} + p_{n-2}\frac{1}{4} + p_{n-1}\frac{1}{2}$ dc $p_n = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n$

Note: si X = rg 1^{er} succès 2 F consécutifs, $E(X) = 6$ La probabilité d'obtenir 2 F conséc. en n lancers est $\big(\frac{-5-3\sqrt{5}}{10}\big)\big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\big)^n + \big(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\big)\big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\big)^n + 1$

IMT PSI 2021 (fonction génératrice donnée) ✌

Enoncé 181 - 1321191 Soit $f : t \longrightarrow \dfrac{t}{2-t^2}$.

1) Développez f en série entière, précisez le rayon de convergence.
2) Donnez la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
3) Calculez l'espérance de X.
4) Déterminez la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$.

RMS 132-1191

Q1 $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$. $R = 1$. **Q2** $P(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}, P(X = 2n) = 0$. **Q3** $E(X) = f'(1) = 3$. **Q4** $Y(\Omega) = \mathbb{N} + \frac{1}{2}, P(Y = n + \frac{1}{2}) = P(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}$

ENS PSI 2021 (tirage boules distictes) **A Terminer** ✷

Enoncé 182 - 132169 On place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue k tirages avec remise et pour $i \in [\![1; k]\!]$, on note X_i la va qui vaut 1 si la i-ième boule tirée est différente de toutes les boules précédemment tirées, 0 sinon. On note Z_k la va égale au nombre de boules différentes tirées lors des k tirages.

1) Déterminez la loi de X_i.
2) Pour $i < j$, déterminez la loi de $X_i X_j$.
3) Les vas X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4) Exprimez Z_k à l'aide des X_i puis calculez $E(Z_k)$.
5) Déterminez $\lim_{k\to+\infty} E(Z_k)$ et commentez.

RMS 132-169

Centrale PSI 2021 (fonction génératrice et somme aleatoire)

Enoncé 183 - 21062702 On pose les vas $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1}(\omega) = \sum_{k=1}^{Z_n(\omega)} X_{nk}(\omega)$ avec les X_{nk} mutuellement indépendantes de loi $B(3,p)$.

1) Montrez $Z_n(\Omega) \subset [\![0;3^n]\!]$. Avec Python : calcul de Z_n par itération, probabilité d'avoir $Z_k = 0$ pour $k \le n$ Trouvez la probabilité p à partir de laquelle $Z_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ (estimation).

2) Série Génératrice : rappelez la définition.

(i) On note G (rp. G_n) celle de X (rp. Z_n). On admet $G_{n+1}(x) = G \circ G_n(x)$. Montrez $P(Z_{n+1} = 0) = a_{n+1}$ avec $a_{n+1} = G(a_n)$.

(ii) En déduire a_n converge vers $a \in [0,1]$. (question orale : démo de $G \nearrow$ et $a_1 > a_0 \Longrightarrow (a_n) \nearrow$.

(iii) Montrez que si $G_n'(1) \le 1$, alors $a = 1$

3) Autre question oubliée...

Romain 2021

PSI 2021 (espérance de gain dans un jeu)

Enoncé 184 - 1321184

1) Soient $c \in \mathbb{R}^+$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tq, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \frac{c}{k(k+1)}$. Trouvez a, b tq $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de la constante c.

2) Jacques et Isabelle jouent à un jeu. Si X prend une valeur paire, Isabelle donne k euros à Jacques. Si X prend une valeur impaire k, Jacques donne k euros à Isabelle. Déterminez l'espérance de gain de Jacques.

RMS 132-1184

Q1 $a = 1$ $b = -1$. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ pr telesc. dc $c = 1$. **Q2** $Y = (-1)^X X$ = gain algebr. de Jacques. $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - 1$

CCINP PSI 2021 (calculs sur loi de probabilité)

Enoncé 185 - 1321186 Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

1) Montrez $(p_k)_{k\ge1}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2) Soit X une va tq $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p_k$. Justifiez l'existence et déterminez la valeur de $E(X-1)$ puis de $E((X-1)(X-2))$.

3) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

RMS 132-1186

Q1 $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(x-1)^2}$ **Q2** $E(X-1) = p^2(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)k(1-p)^{k-2} = \frac{2(1-p)}{p}$ $E((X-1)(X-2)) = p^2(1-p)^2\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)k(k-2)(1-p)^{k-3} = \frac{6(1-p)^2}{p^2}$ **Q3** $X = X-1+1$ et $X^2 = (X-1)(X-2)+3(X-1)+1$. Ok. ps $E(X) = E(X-1)+1 = \frac{2-p}{p}$, $E(X^2) = \frac{p^2-6p+6}{p^2}$, $V(X) = \frac{2(1-p)}{p^2}$

Mines-Ponts PSI 2021 - Mines-Telecom PSI 2018 (probabilité matrice 2×2 diagonalisable)

Enoncé 186 - 184774

Soient 2 variables aléatoires X, Y indépendantes telles qu'elles suivent des lois géométriques $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

1) Quelle est la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

2) Soit Z une 3e va suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_2. Ces 3 vas étant supposées mutuellement indépendantes, déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable ? (**Telecom :** Question absente) .

RMS 132-732 BEOS 4774

Q1 diag. ssi $x \ne y$ $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n) = \frac{pq}{q+p-pq}$. **Q2** diag. ssi $z = 0$ ou ($z \ne 0$ et $x \ne y$) : $P(Z=0) + (1-P(Z=0))(1-P(X=Y)) = 1 - \frac{p_2pq}{q+p-pq}$

ENS PSI 2021 (variable aléatoire indépendante d'elle-même) ✷

Enoncé 187 - 132171

1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles et de probabilité strictement positive. Montrez que I est au plus dénombrable.

2) Soit X une va indépendante d'elle-même. Montrez X est presque sûrement constante.

RMS 132-171

Q1 posons $A_n = \{i \in I, P(A_i) > \frac{1}{n}\}$ est fini, cr, pr incompat., $\sum_{i\in A_n} P(A_i) \le 1$, $\#A_n \le n$. $\{i, P(A_i) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, union dénomb. d'ens. finis. dc au + dénomb. **Q2** Soit X va discrète, $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$, I au + dénomb. soit $i_0 \in I$ tq $P(X = i_0) \ne 0$, alors $P((X=i_0)\cap(X=i_0)) = P(X=i_0)^2$ dc $P(X=i_j) = 1$. Ok.

Note: si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, le support de la famille $\{i \in I, x_i \ne 0\}$ est au plus dénombrable.

Note: une union dénombrable d'ensembles au + dénombrables est toujours au + dénombrable mais pas un produit dénombrable : $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}$.

CCINP PSI 2021 (tirage nombre pair de boules dans une urne)

Enoncé 188 - 1321183 Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1) Soit B_i l'événement « *on tire i boules blanches* ». Calculez $P(B_i)$

2) Montrez $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\big((1+x)^n + (1-x)^n\big)$.

3) Calculez la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

RMS 132-1183

Q1 nb bls blchs= $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ ps $P(B_i) = P(Y=i) = \binom{n}{i}\left(\frac{a}{a+b}\right)^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i}$. **Q2** $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}x^i = 2\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}x^{2i} = (1+x)^n + (1-x)^n$. **Q3** av $B = \bigcup_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} B_{2i}$, $P(B) = \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}a^{2i}b^{n-2i} = \frac{b^n}{(a+b)^n}\frac{1}{2}\big((1+a/b)^n + (1-a/b)^n\big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n$

IMT PSI 2021 (loi à déterminer) ✌

Enoncé 189 - 1321279 On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie. On dispose d'un échantillon de 500000 élèves. Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

RMS 132-1179

Q1 $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(500000, 1/10^6\right)$. **Q2** $\hookrightarrow \mathscr{P}\left(1/2\right)$ cr $500000/10^6 = 1/2$

CCP PSI 2021 (probabilité matrice 2×2 diagonalisable)

Enoncé 190 - 21071901

Soient X, Y 2 vas indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. On pose $M = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

1) En développant de 2 façons différentes $(1+X)^{2n}$, montrez $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2) Calculez la probabilité pour que $X = Y$ **(RMS** : Question absente)

3) Calculez la probabilité pour que la matrice soit diagonalisable.

Yassine 2021 RMS 132-1185

Q1 av. coeff de X^n de $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$ **Q2** $P(X=Y) = (1-p)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = (1-p)^{2n}\binom{2n}{n}$. **Q3** M diag. ssi $X \neq Y$.

Centrale PSI 2021 (somme de 2 vas uniformes) **A Terminer** ✷

Enoncé 191 - 1321034

Soient X, Y deux vas indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.

1) Déterminez la loi de $X+Y$.

2) Déterminez la décomposition en facteurs irréductibles de $1+T+T^2+T^3+T^4+T^5$ dans $\mathbb{R}[T]$.

3) Soient $X'Y'$ deux vas indépendantes à valeurs dans $[\![1;6]\!]$. Montrez que si $X'+Y'$ et $X+Y$ suivent la même loi, alors X' et Y' suivent la loi uniforme.

RMS 132-1034

Q1 $(X+Y=k) = \bigcup_I (X=i)\cap(Y=k-i)$ av $\max(1,k-6) \le i \le \min(k-1,6)$: si $k \ge 7, k-6 \le i \le 6, P(X=k) = \frac{14-k}{36}$, si $k \le 7, 1 \le i \le k-1, P(X=k) = \frac{k-1}{36}$
Q2 $1+T+T^2+T^3+T^4+T^5 = \frac{T^6-1}{T-1} = \prod_{k=1}^{5}(T-\exp(\frac{2ik\pi}{6}))$ **Q3**

CCP PSI 2021-2018-2017 (suite de fonctions de répartition) ☜

Enoncé 192 - 1281380 On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. On note X_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième lancer. On pose $M_n = \max\limits_{1\le k\le n} X_k$ et $m_n = \min\limits_{1\le k\le n} X_k$.

1) Donnez la loi des X_k et leur fonction de répartition F.

2) Exprimez la fonction de répartition F_n de M_n à l'aide de F.

3) Déterminez la limite simple de la suite (F_n). La convergence est-elle uniforme ?

4) Déterminez la fonction de répartition G_n de m_n.

Romain 2021 RMS 129-1210 128-1380

Q1 $X_k \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$. **Q2** $F_n(x) = P(M_n \le x) = P(\cap_k (X_k \le x)) = \prod_k P(X_k \le x) = F(x)^n$ **Q3** $F_n(x) = 0$ si $x < 1$, $= (\frac{i}{6})^n$ si $x \in [i, i+1[$, $= 1$ si $x \ge 6$. cvg simple vers $f = 1_{[6,+\infty[}$. $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} = (\frac{5}{6})^n \longrightarrow 0$. **Q4** $G_n(x) = 1 - P(m_n > x) = 1 - P(\cap_k (X_k > x)) = 1 - \prod_k P(X_k > x) = 1 - (1-F(x))^n$.