Corrigé du DM n° 7

II - Formule de Wald

II.A.1) Voir le cours.

II.A.2) On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1}. Or, pour tout pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

Donc, d'après la question précédente, on a $G_{S_{k+1}} = G_{S_k + X_{k+1}} = G_{S_k} G_{X_{k+1}}$, comme G_X est la fonction génératrice commune à toutes les variables X_k, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$G_{S_{k+1}} = G_{S_k} G_X$$

Prouvons alors par récurrence sur *k* que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.

Pour $k = 0$, on a $S_0 = 0$, donc $G_{S_0} : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S_0 = n) t^n = P(S_0 = 0) = 1$. Ainsi, $G_{S_0} = 1 = (G_X)^0$ et la propriété est vraie au rang $k = 0$.

Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$, soit $G_{S_k} = (G_X)^k$. On a alors :

$$G_{S_{k+1}} = G_{S_k} G_X = (G_X)^k G_X = (G_X)^{k+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ G_{S_k} = (G_X)^k.}$$

II.A.3) On a $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$ et *S* est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $t \in [0,1[$, $G_S(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S = n) t^n$.

La famille d'évènements $((T = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, donc la loi des probabilités totales donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((T = k) \cap (S = n)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((T = k) \cap (S_k = n)\big).$$

Comme S_k et *T* sont indépendantes pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T = k) P(S_k = n).$$

Alors, pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(T = k) P(S_k = n) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{K} P(T = k) P(S_k = n) t^n + \sum_{k=K+1}^{+\infty} P(T = k) P(S_k = n) t^n \right]. \end{aligned}$$

Comme toutes les séries sont à termes positifs (avec $t\in[0,1[$), la convergence de la série ci-dessus entraine celles des séries $\sum P(T=k)P(S_k=n)t^n$ et $\sum\left(\sum_{k=K}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$, donc :

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{K}\left[P(T=k)\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_k=n)t^n\right]+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right]$$

Enfin, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_k=n)t^n=G_{S_k}(t)=\left(G_X(t)\right)^k$, donc, pour tout $t\in[0,1[$ et tout $K\in\mathbb{N}$:

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{K}P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right].$$

II.A.4) Pour $t\in[0,1[$ et tout $K\in\mathbb{N}$, on pose :

$$R_K=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right].$$

On a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leq P(S_k=n)\leq 1$, donc $0\leq P(T=k)P(S_k=n)t^n\leq P(T=k)t^n$ et :

$$0\leq\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\leq\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)t^n=t^n\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k).$$

Remarquons que la série $\sum P(T=k)$ converge (de somme 1), donc $\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)$ est bien défini.

De plus, comme $t\in[0,1[$, la série géométrique $\sum t^n$ converge, et on peut écrire :

$$0\leq R_K\leq\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)\left(\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)\right).$$

Soit :

$$\boxed{0\leq R_K\leq\frac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)}$$

II.A.5) Soit $t\in[0,1[$ fixé. Comme la série $\sum P(T=k)$ converge, la suite de ses restes est de limite nulle, donc on a $\lim_{K\to+\infty}\left[\frac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)\right]=0$ et avec le théorème des gendarmes, l'encadrement de la question précédente permet de conclure que :

$$\lim_{K\to+\infty}R_K=0.$$

Or, on a vu que pour tout $t\in[0,1[$ et tout $K\in\mathbb{N}$:

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{K}P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k+R_K.$$

En passant à la limite quand $K\to+\infty$, on obtient:

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k.$$

Enfin, on a $G_T(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k)x^k$, donc pour tout $t\in[0,1[$, $G_S(t)=G_T\left(G_X(t)\right)=G_T\circ G_X(t)$ et ainsi :

$$\boxed{G_S=G_T\circ G_X}$$

II.B - On suppose que T et X_1 admettent une espérance finie, donc G_T et $G_{X_1}=G_X$ sont dérivables en 1 et :

$$E(T)=G_T'(1) \text{ et } E(X_1)=G_{X_1}'(1)=G_X'(1).$$

Comme $G_X(1)=1$, $G_S=G_T\circ G_X$ est dérivable en 1, donc S admet une espérance finie et :

$$E(S)=G_S'(1)=G_X'(1).G_T'\left(G_X(1)\right)=G_X'(1).G_T'(1)=E(T)E(X_1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } S \text{ admet une espérance finie et } E(S)=E(T)E(X_1).}$$

II.C.1) La fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ est :

$$\boxed{t\mapsto e^{\lambda(t-1)}}$$

II.C.2) Notons T la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, donc de fonction génératrice $G_T: t\mapsto e^{\lambda(t-1)}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, appelons X_k la variable aléatoire valant 1 si l'œuf n° k devient un nouvel insecte et 0 sinon. Les variables X_k suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre α, de fonction génératrice $G_X: t\mapsto \alpha t+1-\alpha$.

La variable $S=\sum_{k=1}^{T} X_k$ comme définie dans les questions précédentes représente alors le nombre d'insectes issus de la ponte.

L'éclosion d'un œuf est indépendante de celle des autres et du nombre d'autres œufs, donc les variables X_k sont mutuellement indépendantes et T est indépendante des précédentes.

Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, les variables T et X_{k+1} sont indépendantes de $X_1,\dots,X_k$, qui sont elles-mêmes mutuellement indépendantes. Le lemme des coalitions permet alors d'affirmer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, T et X_{k+1} sont indépendantes de $S_k=X_1+\dots+X_k$.

On peut donc utiliser le résultat de la question II.A, soit pour tout $t\in[0,1[$:

$$G_S(t)=G_T\circ G_X(t)=G_T\left(G_X(t)\right)=G_T\left(G_X(t)\right)=e^{\lambda(\alpha t+1-\alpha-1)}=e^{\lambda\alpha(t-1)}.$$

Cette fonction est la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\alpha$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le nombre d'insectes issus de la ponte suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda\alpha.}$$