Corrigé du DS n° 5 - Centrale PSI - 2021 - Maths 2

Autour des fonctions hypergéométriques

I - Suites et séries hypergéométriques

Q1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $qu_n = u_{n+1}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique avec $P = q$ et $Q = 1$ (polynômes constants). Ainsi :

$$\boxed{\text{Toute suite géométrique est hypergéométrique.}}$$

Q2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ (avec par convention $u_n = 0$ quand $n < p$).

Pour tout entier $n \geq p$, on a :

$$u_{n+1} = \binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!} = \frac{(n+1)}{n+1-p}\frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n+1}{n+1-p}\binom{n}{p} = \frac{n+1}{n+1-p}u_n .$$

Donc :

$$(n+1-p)u_{n+1} = (n+1)u_n .$$

Quand $n < p-1$ (s'il y a lieu), la relation reste vraie (0 = 0) et elle reste vraie aussi pour $n = p-1$, car on a bien $\big((p-1)+1-p\big)u_{(p-1)+1} = 0 = \big((p-1)+1\big)u_{p-1}$ (avec $u_{p-1} = 0$).

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ avec $P = X+1$ et $Q = X+1-p$, et donc :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } u_n = \binom{n}{p} \text{ est hypergéométrique.}}$$

Q3. Soit $E = \left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall\, n\in\mathbb{N},\, P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}\right\}$ avec $P = X(X-1)(X-2)$ et $Q = X(X-2)$.

Soit $u\in E$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$n(n-1)(n-2)u_n = n(n-2)u_{n+1} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $n\geq 3$ (donc $n\neq 0$ et $n\neq 2$), on obtient $u_{n+1} = (n-1)u_n$, donc :

$$\frac{u_{n+1}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)u_n}{(n-1)!} = \frac{u_n}{(n-2)!} .$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{u_n}{(n-2)!}\right)_{n\geq 3}$ est constante, soit $\dfrac{u_n}{(n-2)!} = \dfrac{u_3}{2}$ pour tout entier $n\geq 3$. Donc, pour $n\geq 3$:

$$u_n = \frac{u_3}{2}\omega_n$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et où ω est la suite réelle définie par $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ et pour tout entier $n\geq 3$, $\omega_n = (n-2)!$.

De plus, pour $n=1$, **(1)** donne $0=-u_2$, soit $u_2=0$.

Si on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j}=1$ quand $i=j$ et 0 sinon), $\delta_0=(\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\delta_1=(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $u=u_0\delta_0+u_1\delta_1+\dfrac{u_3}{2}\omega\in \operatorname{Vect}(\delta_0,\delta_1,\omega)$.

Réciproquement, si $u\in \operatorname{Vect}(\delta_0,\delta_1,\omega)$, on a alors $u=a\delta_0+b\delta_1+c\omega$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$n(n-1)(n-2)u_n=\begin{cases}0 & \text{quand } n\in\{0,1,2\}\\ n(n-1)(n-2)\,c\,\omega_n=c\,n(n-1)(n-2)\,(n-2)!=c\,(n-2)\,n! & \text{quand } n\geq 3\end{cases}$$

$$n(n-2)u_{n+1}=\begin{cases}0 & \text{quand } n\in\{0,2\}\\ -u_2=0 & \text{quand } n=1\\ n(n-2)\,c\,\omega_{n+1}=c\,n(n-2)\,(n-1)!=c\,(n-2)\,n! & \text{quand } n\geq 3\end{cases}$$

Ainsi, $n(n-1)(n-2)u_n=n(n-2)u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $u\in E$.

On obtient alors :

$$E=\operatorname{Vect}(\delta_0,\delta_1,\omega).$$

Notons enfin que si avec a,b,c sont trois réels tels que $a\delta_0+b\delta_1+c\omega=0$, alors en évaluant en $n=0$, $n=1$ et $n=3$, on obtient successivement $a=0$, $b=0$ et $c=0$. La famille $(\delta_0,\delta_1,\omega)$ est donc libre.

Finalement, avec $P=X(X-1)(X-2)$ et $Q=X(X-2)$, et en notant $\delta_0=(\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_1=(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et ω la suite réelle définie par $\omega_0=\omega_1=\omega_2=0$ et pour tout entier $n\geq 3$, $\omega_n=(n-2)!$, on peut conclure que :

$$\boxed{E=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall\, n\in\mathbb{N},\ P(n)u_n=Q(n)u_{n+1}\right\} \text{ est un espace vectoriel de base } (\delta_0,\delta_1,\omega) \text{ et de dimension 3.}}$$

Q4. On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $P(n_0)=0$ et $Q(n)\neq 0$ pour tout entier $n\geq n_0$.

Prouvons par récurrence sur *n* que pour tout entier $n\geq n_0+1$, on a $u_n=0$.

- On a $P(n_0)u_{n_0}=0=Q(n_0)u_{n_0+1}$ et $Q(n_0)\neq 0$, donc $u_{n_0+1}=0$ et la propriété est vraie au rang $n=n_0+1$.
- Supposons la propriété vraie au rang $n\geq n_0+1$.

  Par hypothèse de récurrence, $u_n=0$. Or, $P(n)u_n=Q(n)u_{n+1}$ et comme $n\geq n_0+1$, $Q(n)\neq 0$, donc :

  $$u_{n+1}=\frac{P(n)}{Q(n)}u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}\times 0=0.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée au rang n_0+1 et héréditaire, donc vraie pour tout $n\geq n_0+1$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir du rang } n_0+1.}$$

II - Extension de la factorielle

Q5. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions.

De plus :

- $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge car $x-1>-1$, donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge ;
- $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=} o\,(e^{-t/2})$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Finalement, quel que soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge, donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q6. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que produit de telles fonctions).
- Pour tout $t\in J$, la fonction $x\mapsto t^{x-1}e^{-t}=t^{-1}e^{-t}e^{x\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car elle est proportionnelle à une fonction exponentielle).
- Soient $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $a<1<b$. Pour tout $(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|t^{x-1}e^{-t}\right|\le\varphi(t)=\begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{quand } t\le 1\\ t^{b-1}e^{-t} & \text{quand } t>1\end{cases}.$$

Et la fonction

Alors, $\Gamma: x\mapsto\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est continue sur $[a,b]$. Ceci est vrai pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $a<1<b$. Comme $\bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}_+^*\\ a<1<b}}[a,b]=\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que :

$$\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par positivité de l'intégrale, on a $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\ge 0$ et $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\ne 0$, sinon la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ serait nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt>0$, autrement dit :

$$\boxed{\Gamma \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q7. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ on peut procéder à l'intégration par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t}dt=\left[t^x(-e^{-t})\right]_a^b-\int_a^b xt^{x-1}(-e^{-t})dt=a^xe^{-a}-b^xe^{-b}+x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt\,.$$

Comme $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $x+1\in\mathbb{R}_+^*$, donc les intégrales $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt$ convergent et on a aussi $\lim\limits_{a\to 0} a^x e^{-a} = \lim\limits_{b\to+\infty} b^x e^{-b} = 0$ (la première car $x>0$, la seconde par croissances comparées). En passant aux limites que $a\to 0$ et $b\to+\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient alors $\int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, soit pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$$

Q8. On a $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, soit en divisant par $n!$:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n!}=\frac{n\Gamma(n)}{n!}=\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}=\frac{\Gamma(1)}{(1-1)!}=1.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(n)=(n-1)!}$$

On admet qu'on peut prolonger la fonction Γ *sur* $D=\mathbb{R}\setminus\{-n, n\in\mathbb{N}\}$ *en une fonction continue, toujours notée* Γ*, qui vérifie la relation* (II.1) *ci-dessus sur D tout entier.*

III - Fonctions hypergéométriques

III.A – Symbole de Pochhammer

Pour tous $a,n\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, on pose :

$$[a]_n=\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ a(a+1)...(a+n-1) & \text{sinon}\end{cases}$$

Q9. Posons $a=-p$ avec $p\in\mathbb{N}$. On alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n-1\geq p$:

$$[a]_n=a(a+1)...(a+p)...(a+n-1)=a(a+1)...(-p+p)...(a+n-1)=0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Si } a \text{ est un entier négatif ou nul, la suite } \left([a]_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir du rang } -a+1.}$$

Q10. Soit $a\in\mathbb{R}$. On a $a[a+1]_0=a=[a]_1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a[a+1]_n=a\prod_{k=0}^{n-1}\left((a+1)+k\right)=a\prod_{k=0}^{n-1}(a+k+1)=a\prod_{k=1}^{n}(a+k)=\prod_{k=0}^{n}(a+k)=[a]_{n+1}.$$

Donc, pour $a\in\mathbb{R}$ donné, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{[a]_{n+1}=a[a+1]_n}$$

Q11. Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$[a]_n=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)=\prod_{k=a}^{a+n-1}k=\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

Cette expression reste cohérente pour $n=0$ (avec $[a]_0=1$), donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{[a]_n=\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}\text{ quand }a\in\mathbb{N}^*.}$$

Comme $\Gamma(k)=(k-1)!$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, la relation ci-dessus se récrit $[a]_n=\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ quand $a\in\mathbb{N}^*$.

Ceci nous invite à calculer $\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ pour $a\in D$ (si cela est possible, autrement dit, si $\Gamma(a)\neq 0$).

Soit $a\in D$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a+n\in D$, sinon on aurait $-(a+n)\in\mathbb{N}$, d'où $-a=-(a+n)+n\in\mathbb{N}$: absurde.

On a de même $a+n+1\in D$ et on peut alors écrire :

$$\Gamma(a+n+1)=(a+n)\Gamma(a+n).$$

Or, comme $-a\notin\mathbb{N}$, on a $a+k\neq 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $[a]_n=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)\neq 0$ et aussi $[a]_0=1\neq 0$. De même $[a]_{n+1}\neq 0$ et on peut alors écrire :

$$\frac{\Gamma(a+n+1)}{[a]_{n+1}}=\frac{(a+n)\Gamma(a+n)}{(a+n)[a]_n}=\frac{\Gamma(a+n)}{[a]_n}.$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{\Gamma(a+n)}{[a]_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\Gamma(a+n)}{[a]_n}=\frac{\Gamma(a)}{[a]_0}=\Gamma(a).$$

Si $\Gamma(a)=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(a+n)=[a]_n\Gamma(a)=0$.

En particulier pour $N=\lfloor |a|\rfloor+1\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(a+N)=0$. Or, on a $-a\leq|a|<\lfloor |a|\rfloor+1=N$, donc $a+N>0$ et d'après la question **Q6**, $\Gamma(a+N)>0$.

Ainsi, $\Gamma(a)=0$ mène à une absurdité, donc $\Gamma(a)\neq 0$.

Finalement, on peut écrire pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{[a]_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\text{ quand }a\in D.}$$

III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

Q12. Soient trois réels a, b et c, et un entier naturel n.

Les nombres $[a]_n$, $[b]_n$ et $[c]_n$ sont toujours bien définis et si $c \in D$, on a vu dans la question précédente que $[c]_n \neq 0$, donc :

$$\boxed{\text{Si } c \in D\,,\ \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \text{ est bien défini pour tout entier naturel } n.}$$

Dans les questions suivantes, a, b et c sont trois réels tels que $c \in D$.

Q13. Par définition, la série entière $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n!}$ est hypergéométrique si la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(a+n)[a]_n (b+n)[b]_n}{(c+n)[c]_n} \frac{1}{n!(n+1)} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}.$$

Donc :

$$P(n) \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} = Q(n) \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}.$$

avec $P = (X+a)(X+b)$ et $Q = (X+c)(X+1)$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique et finalement :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n!} \text{ est hypergéométrique avec } P = (X+a)(X+b) \text{ et } Q = (X+c)(X+1).}$$

Q14. Pour $P = (X+a)(X+b)$ et $Q = (X+c)(X+1)$, notons $E = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n)u_n = Q(n)u_{n+1} \right\}$ et $F = \left\{ \sum u_n x^n \setminus u \in E \right\}$.

Soit $u \in E$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(c+n)(n+1) \neq 0$ car $-c \notin \mathbb{N}$:

$$P(n)u_n = Q(n)u_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+n)(b+n)u_n = (c+n)(n+1)u_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} u_n.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} u_0$.

- On a $\frac{[a]_0 [b]_0}{[c]_0} \frac{1}{0!} u_0 = \frac{1 \times 1}{1} \frac{1}{1} u_0 = u_0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

  Avec la relation de récurrence ci-dessus et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} u_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} u_0 \\ &= \frac{(a+n)[a]_n (b+n)[b]_n}{(c+n)[c]_n} \frac{1}{n!(n+1)} u_0 = \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} u_0 \end{aligned}$$

  La relation est donc vérifiée au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, pour tout $f = \sum u_n x^n \in F$ (avec $u \in E$), on a :

$$f = \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} u_0 x^n = u_0 \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n = u_0 F_{a,b,c}.$$

Ainsi, $f \in \operatorname{Vect}\left(F_{a,b,c}\right)$ et donc $F \subset \operatorname{Vect}\left(F_{a,b,c}\right)$.

Réciproquement, on a $F_{a,b,c} \in F$ d'après la question précédente et on vérifie facilement que $\lambda F_{a,b,c} \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Vect}\left(F_{a,b,c}\right) \subset F$.

On a alors :

$$F = \operatorname{Vect}\left(F_{a,b,c}\right).$$

Comme $F_{a,b,c}(0) = \dfrac{[a]_0 [b]_0}{[c]_0} \dfrac{1}{0!} = 1 \neq 0$, on a $F_{a,b,c} \neq 0$ et finalement :

L'ensemble des séries hypergéométriques associées aux polynômes obtenus à la question précédente est la droite vectorielle dirigée par $F_{a,b,c}$.

Q15. Commençons par remarquer que $[a]_0 = 1 \neq 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a]_n = a(a+1)...(a+n-1) = 0$ si et seulement s'il existe $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a + p = 0$, soit $a = -p$. Remarquons qu'alors, on a $[a]_n = 0$ pour tout $n > p$. Ainsi, la suite $\left([a]_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule si et seulement si $a \notin D$, et dans ce cas, $\left([a]_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Alors, si $a \notin D$ ou $b \notin D$, la suite $\left(\dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, donc le rayon de convergence de $\sum \dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{1}{n!} x^n$ est infini.

Supposons maintenant que $a, b \in D$. Alors, la suite $\left(\dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais et :

$$\left| \frac{\dfrac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{1}{n!}} \right| = \left| \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

D'après la règle de d'Alembert appliquée aux série entières, le rayon de convergence de $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est alors $\frac{1}{1}=1$, et finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n \text{ est } R = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in D \text{ et } b \in D \\ +\infty & \text{si } a \notin D \text{ ou } b \notin D \end{cases}}$$

Q16. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Comme ici, le rayon de convergence R de $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1, $]-1,1[$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, et donc la somme $F_{a,b,c}$ de la série entière $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est C^∞ sur $]-1,1[$, et entre autres :

$$\boxed{F_{a,b,c} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[.}$$

On peut de plus dériver terme à terme, soit pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F_{a,b,c}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{n!} x^n .$$

Or, on a vu plus haut (question **Q10**) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$, donc :

$$F_{a,b,c}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a[a+1]_n\, b[b+1]_n}{c[c+1]_n} \frac{1}{n!} x^n = \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a+1]_n [b+1]_n}{[c+1]_n} \frac{1}{n!} x^n = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}(x) .$$

Finalement :

$$\boxed{F_{a,b,c}' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}}$$

Q17. On a justifié ci-dessus que :

$$\boxed{F_{a,b,c} \text{ est } C^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

On a $F_{a,b,c}' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}$, donc $F_{a,b,c}'' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}' = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} F_{a+2,b+2,c+2}$, …

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{a,b,c}^{(k)} = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \cdots \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)} F_{a+k,b+k,c+k} .$$

- On vient de voir que la propriété est vraie au rang $k=1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$.

  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$F_{a,b,c}{}^{(k+1)}=F_{a,b,c}{}^{(k)}{}'=\frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}\cdots\frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)}F_{a+k,b+k,c+k}{}'$$

  Et d'après la question précédente, $F_{a+k,b+k,c+k}{}'=\dfrac{(a+k)(b+k)}{c+k}F_{a+k+1,b+k+1,c+k+1}$, donc :

$$F_{a,b,c}{}^{(k+1)}=F_{a,b,c}{}^{(k)}{}'=\frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}\cdots\frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)}\frac{(a+k)(b+k)}{c+k}F_{a+k+1,b+k+1,c+k+1}.$$

  La formule est donc validée au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Remarquons que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}\cdots\frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)}=\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)\,b(b+1)\ldots(b+k-1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)}=\frac{[a]_k\,[b]_k}{[c]_k}.$$

Et finalement, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{F_{a,b,c}{}^{(k)}=\frac{[a]_k\,[b]_k}{[c]_k}F_{a+k,b+k,c+k}}$$

Q18. On a $\left[\frac{1}{2}\right]_0=[1]_0=\left[\frac{3}{2}\right]_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left[\frac{1}{2}\right]_n=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}=\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n}=\frac{(2n)!}{2^n\times2\times4\times\ldots\times2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

$$[1]_n=n!$$

$$\left[\frac{3}{2}\right]_n=\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}=\frac{3\times\ldots\times(2n+1)}{2^n}=\frac{(2n+1)!}{2^n\times2\times4\times\ldots\times2n}=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!}$$

Les formules ci-dessus restent valables pour $n=0$. Alors, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n[1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}n!}{\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!}}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}.$$

Et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $-x^2\in\,]-1,0]\subset\,]-1,1[$ et :

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}.$$

Or, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, donc pour tout $x\in\,]-1,1[\,\setminus\{0\}$:

$$\boxed{F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(x)=\frac{\arctan x}{x}}$$

Q19. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$:

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!} \frac{1}{n!} x^n .$$

Remarquons que $[1]_n = n!$ et $[2]_n = (n+1)!$, donc pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$:

$$\frac{\ln(1-x)}{-x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n [1]_n}{[2]_n} \frac{1}{n!} x^n = F_{1,1,2}(x) .$$

Alors, pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = F_{1,1,2}(-x) .$$

Et comme $F_{1,1,2}(0) = \frac{[1]_0 [1]_0}{[2]_0} \frac{1}{0!} = 1$, on a pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\boxed{F_{1,1,2}(-x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{quand } x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{quand } x = 0 \end{cases}}$$

Q20. Comme $N \in \mathbb{N}$, on a $-N \notin D$ et le rayon de convergence de $\sum \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est infini d'après la question **Q15**. Ainsi :

$$\boxed{F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n n!} \text{ existe.}}$$

On a de plus :

$$[-N]_n = -N(-N+1)...(-N+n-1) = (-1)^n N(N-1)...(N-n+1) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{N!}{(N-n)!} & \text{quand } n \le N \\ 0 & \text{quand } n \ge N+1 \end{cases}$$

Donc :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{[a]_n (-1)^n \dfrac{N!}{(N-n)!}}{[c]_n n!} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{[a]_n}{[c]_n} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[a]_n}{[c]_n} .$$

Si $c \in D$ et $c-a \in D$, on a $c+N \in D$ et $c-a+N \in D$, et d'après le résultat admis :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+N)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+N)} \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)} .$$

Or, d'après la question **Q11**, on a $[c]_N = \frac{\Gamma(c+N)}{\Gamma(c)}$ et $[c-a]_N = \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)}$, donc :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{1}{[c]_N} [c-a]_N .$$

Et finalement :

$$\boxed{F_{a,-N,c}(1)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\binom{N}{n}\frac{[a]_n}{[c]_n}=\frac{[c-a]_N}{[c]_N}}$$

Q21. Soient $u,v\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $N\le\min(u,v)$.

En posant $a=-u$ et $c=v-N+1$, on a $c\in\mathbb{N}^*$ et $c-a=v+u-N+1\in\mathbb{N}^*$ (car u, v et N sont des entiers naturels tels que $v\ge N$). Donc, $N\in\mathbb{N}$, $c\in D$ et $c-a\in D$. On peut utiliser la relation de la question précédente, qui donne :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\binom{N}{n}\frac{[-u]_n}{[v-N+1]_n}=\frac{[v+u-N+1]_N}{[v-N+1]_N}\qquad\textbf{(*)}$$

Comme $c=v-N+1\in\mathbb{N}^*$ et $v+u-N+1\in\mathbb{N}^*$, on a, d'après la question **Q11**, pour tout $n\in[\![0,N]\!]$:

$$[v-N+1]_n=\frac{(v-N+n)!}{(v-N)!}$$

$$[v-N+1]_N=\frac{v!}{(v-N)!}$$

$$[v+u-N+1]_N=\frac{(u+v)!}{(u+v-N)!}$$

De plus, si $N\in\mathbb{N}^*$, on a pour tout $n\in[\![1,N]\!]$, $n\le u$ et :

$$[-u]_n=\prod_{k=0}^{n-1}(-u+k)=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}(u-k)=(-1)^n\frac{u!}{(u-n)!}.$$

Remarquons que comme $[-u]_0=1$, la relation reste vraie quand $n=0$ et donc valide pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $n\in[\![0,N]\!]$.

La relation **(*)** se récrit alors :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{(-1)^n\dfrac{u!}{(u-n)!}}{\dfrac{(v-N+n)!}{(v-N)!}}=\frac{\dfrac{(u+v)!}{(u+v-N)!}}{\dfrac{v!}{(v-N)!}}\iff\sum_{n=0}^{N}\frac{N!u!(v-N)!}{n!(N-n)!(u-n)!(v-N+n)!}=\frac{(u+v)!(v-N)!}{v!(u+v-N)!}$$

$$\iff\sum_{n=0}^{N}\frac{u!}{n!(u-n)!}\frac{v!}{(N-n)!\big(v-(N-n)\big)!}=\frac{(u+v)!}{N!(u+v-N)!}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}\binom{u}{n}\binom{v}{N-n}=\binom{u+v}{N}}$$

Q22. Soit un groupe de $u+v$ personnes avec $u,v\in\mathbb{N}$ contenant u personnes de type 1 et v personnes de type 2. On choisit simultanément N personnes distinctes dans le groupe avec $N\in\mathbb{N}$ tel que $N\le\min(u,v)$.

C'est une combinaison, il y a donc $A=\binom{u+v}{N}$ choix possibles.

Si, parmi les N personnes choisies, on veut exactement n personnes de type 1 (donc exactement $N-n$ personnes de type 2), avec $n\in[\![0,N]\!]$, il y a $\binom{u}{n}$ façons de choisir ces n personnes (parmi toutes les u personnes de type 1) et pour chacun de ces choix, il y a $\binom{v}{N-n}$ façons de choisir les $N-n$ personnes de type 2 (parmi toutes les v personnes de ce type). Ainsi, il y a $\binom{u}{n}\binom{v}{N-n}$ façons d'obtenir un groupe de N personnes distinctes contenant exactement n personnes de type 1.

Comme le groupe final de N personnes peut contenir entre 0 (car $N\leq v$) et u (car $N\leq u$) personnes de type 1, le nombre total de groupes de N personnes distinctes est $\sum_{n=0}^{N}\binom{u}{n}\binom{v}{N-n}=A$.

Ainsi, on retrouve bien l'identité de Vandermonde :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}\binom{u}{n}\binom{v}{N-n}=\binom{u+v}{N}}$$

III. C – Fonction hypergéométrique confluente

Q23. Soit $f:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R>0$.

On a alors pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$\begin{cases} f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,a_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n \\ f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)\,a_{n+1}x^{n-1}\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases} xf'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,a_nx^n \\ xf''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)\,a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n+1)\,a_{n+1}x^n\end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} xf''(x)+(c-x)f'(x)-af(x)&=xf''(x)-xf'(x)+cf'(x)-af(x)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n+1)\,a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}n\,a_nx^n+c\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n-a\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(c+n)(n+1)\,a_{n+1}-(a+n)\,a_n\right]x^n\end{aligned}$$

La fonction f est solution de l'équation différentielle (III.1) sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$xf''(x)+(c-x)f'(x)-af(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(c+n)(n+1)\,a_{n+1}-(a+n)\,a_n\right]x^n=0.$$

Ceci donne par unicité du développement en série entière, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(c+n)(n+1)\,a_{n+1}-(a+n)\,a_n=0\quad\Leftrightarrow\quad(c+n)(n+1)\,a_{n+1}=(a+n)\,a_n.$$

Avec $[a]_{n+1}=(a+n)[a]_n$ et $[c]_{n+1}=(c+n)[c]_n$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$[a]_n\,[c]_{n+1}\,(n+1)!a_{n+1}=[a]_n\,[c]_n\,n!(n+c)(n+1)\,a_{n+1}=[a]_n\,[c]_n\,n!(a+n)\,a_n=[c]_n\,n![a]_{n+1}\,a_n.$$

Si $a\in D$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a+k\neq 0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $[a]_n\neq 0$ et :

$$\frac{[c]_{n+1}(n+1)!}{[a]_{n+1}}a_{n+1}=\frac{[c]_n\,n!}{[a]_n}a_n.$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{[c]_n\,n!}{[a]_n}a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{[c]_n\,n!}{[a]_n}a_n=\frac{[c]_0\,0!}{[a]_0}a_0=a_0 \quad\Leftrightarrow\quad a_n=a_0\frac{[a]_n}{[c]_n}\frac{1}{n!}.$$

Remarquons que si $a\notin D$, alors en posant $p=-a\in\mathbb{N}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c+n\neq 0$ (car $c\in D$) et :

$$a_{n+1}=\frac{a+n}{(c+n)(n+1)}a_n.$$

Ceci implique que $a_{p+1}=0$ et que tous les a_n sont nuls partir du rang $p+1$. Comme il en va de même pour les $[a]_n=a(a+1)...(a+p)...(a+n-1)$, la relation obtenue ci-dessus pour $a\in D$ reste varie pour $a\notin D$.

Finalement, $f:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est une solution de l'équation différentielle (III.1) développable en série entière sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=a_0\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}$, donc si et seulement si $f=a_0M_{a,c}$, soit $f\in\operatorname{Vect}(M_{a,c})$, en appelant $M_{a,c}$ la fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}x^n$.

Remarquons que $M_{a,c}(0)=\dfrac{[a]_0}{[c]_0}\dfrac{1}{0!}=1$, donc $M_{a,c}$ n'est pas nulle et $\dim\operatorname{Vect}(M_{a,c})=1$.

Quand $a\notin D$, $M_{a,c}$ est polynômiale et quand $a\in D$, on a $\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et :

$$\left|\frac{\dfrac{[a]_{n+1}}{[c]_{n+1}}\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}}\right|=\left|\frac{n+a}{(n+c)(n+1)}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Donc, le rayon de convergence de $\sum\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}x^n$ est infini d'après la règle de d'Alembert appliquée aux série entières. Ainsi, dans tous les cas, $M_{a,c}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

> L'ensemble des solutions de (III.1) développable en série entière sur $\mathbb{R}$ est la droite $\operatorname{Vect}(h)$ avec $M_{a,c}:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{[a]_n}{[c]_n}\dfrac{1}{n!}x^n$.

IV - Les polynômes de Laguerre

Q24. On a pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $\Phi_n(x)=e^{-x}x^n$ et $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

- $\Phi_0(x)=e^{-x}$ et :

$$L_0(x)=\frac{e^x}{0!}\Phi_0(x)=1$$

- $\Phi_1(x)=e^{-x}x$ et :

$$L_1(x)=\frac{e^x}{1!}\Phi_1'(x)=e^x\left(e^{-x}-e^{-x}x\right)=1-x.$$

- $\Phi_2(x)=e^{-x}x^2$, $\Phi_2'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$ et :

$$L_2(x)=\frac{e^x}{2!}\Phi_2''(x)=\frac{1}{2}e^x\left(e^{-x}(2-2x)-e^{-x}(2x-x^2)\right)=1-2x+\frac{1}{2}x^2.$$

- $\Phi_3(x)=e^{-x}x^3$, $\Phi_3'(x)=e^{-x}(3x^2-x^3)$, $\Phi_3''(x)=e^{-x}(6x-6x^2+x^3)$ et :

$$L_3(x)=\frac{e^x}{3!}\Phi_3^{(3)}(x)=\frac{1}{6}e^x\left(e^{-x}(6-12x+3x^2)-e^{-x}(6x-6x^2+x^3)\right)=1-\frac{5}{2}x+x^2-\frac{1}{6}x^3.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} L_0:x\mapsto 1 & L_1:x\mapsto 1-x \\ L_2:x\mapsto 1-2x+\frac{1}{2}x^2 & L_3:x\mapsto 1-\frac{5}{2}x+x^2-\frac{1}{6}x^3 \end{array}}$$

Q25. Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $f:x\mapsto e^{-x}$ et $g:x\mapsto x^n$. Ces deux fonctions sont de classe C^n sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $f^{(k)}:x\mapsto(-1)^k e^{-x}$ et $g^{(k)}:x\mapsto\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On peut donc utiliser la formule de Leibniz pour écrire $\Phi_n^{(n)}=(fg)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$, soit pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\Phi_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-x}\frac{n!}{k!}x^k=n!\,e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)=\frac{e^x}{n!}n!\,e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi :

$$\boxed{L_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ avec } L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}x^k \text{ et } c_{n,k}=(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!} \text{ pour tout } k\in[\![0,n]\!].}$$

Q26. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)=(\Phi_n^{(n)})'(x)$, donc :

$$\boxed{\Phi_n^{(n)}(x)=n!\,e^{-x}L_n(x) \quad\text{et}\quad \Phi_n^{(n+1)}(x)=n!\,e^{-x}\left(L_n'(x)-L_n(x)\right)}$$

Q27. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $\Phi_{n+1}(x)=e^{-x}x^{n+1}=x(e^{-x}x^n)=x\Phi_n(x)$, donc :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x\Phi_n(x)\right).$$

Comme Φ_n et $x\mapsto x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la formule de Leibniz :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x\Phi_n(x)\right)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x)\Phi_n^{(n+1-k)}(x)=x\Phi_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\Phi_n^{(n)}(x).$$

Avec la question précédente, on obtient :

$$(n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x)=xn!e^{-x}\left(L_n'(x)-L_n(x)\right)+(n+1)n!e^{-x}L_n(x).$$

Soit :

$$L_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}x\left(L_n'(x)-L_n(x)\right)+L_n(x).$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{L_{n+1}(x)=\left(1-\frac{x}{n+1}\right)L_n(x)+\frac{x}{n+1}L_n'(x)}$$

Q28. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $\Phi_{n+1}'(x)=(n+1)e^{-x}x^n-e^{-x}x^{n+1}=(n+1)\Phi_n(x)-\Phi_{n+1}(x)$, donc :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\Phi_{n+1}'(x)\right)=(n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x)-\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

En multipliant par $\dfrac{e^x}{(n+1)!}$, on obtient :

$$\frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x)=\frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x)-\frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)\qquad\textbf{(1)}$$

Or :

- $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)$, donc $L_n'(x)=\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)+\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x)$, soit $\dfrac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x)=L_n'(x)-L_n(x)$;
- $L_{n+1}(x)=\dfrac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$, donc $L_{n+1}'(x)=\dfrac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x)+\dfrac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

Ainsi, **(1)** devient, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{L_{n+1}'(x)=L_n'(x)-L_n(x)}$$

Q29. Enfin, en dérivant la relation de la question **Q27**, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}L_{n+1}'(x)&=\left(1-\frac{x}{n+1}\right)L_n'(x)-\frac{1}{n+1}L_n(x)+\frac{1}{n+1}L_n'(x)+\frac{x}{n+1}L_n''(x)\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}-\frac{x}{n+1}\right)L_n'(x)+\frac{x}{n+1}L_n''(x)-\frac{1}{n+1}L_n(x)\end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation de la question **Q28**, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}-\frac{x}{n+1}\right)L_n'(x)+\frac{x}{n+1}L_n''(x)-\frac{1}{n+1}L_n(x)=L_n'(x)-L_n(x).$$

Soit :

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{L_n \text{ est solution de l'équation différentielle (IV.1) : } xy''+(1-x)y'+ny=0.}$$

Q30. Rappelons que, par définition (donnée dans la question **Q23**), les fonctions hypergéométriques confluentes sont les solutions développables en série entière de l'équation différentielle de la forme $xy''+(c-x)y'-ay=0$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $c\in D$.

Or, on vient de voir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, L_n est solution d'une équation différentielle de ce type avec $a=-n$ et $c=1\in D$. De plus, L_n est polynômiale, donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ L_n \text{ est une fonction hypergéométrique confluente.}}$$

V - Loi hypergéométrique

V.A – Premiers résultats

Q31. Vérifier que $\mathbb{P}$ définit bien une loi de probabilité, revient à vérifier que :

(1) pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)\geq 0$;

(2) $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

Comme les coefficients binomiaux sont toujours positifs ou nuls, le premier point est acquis et :

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}=\frac{1}{\binom{A}{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}$$

Or, $pA+qA=A$, donc d'après l'identité de Vandermonde établie dans la question **Q21** (avec $u=pA$, $v=qA$ et $N=n$), on peut écrire $\sum_{k=0}^{n}\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}=\binom{pA+qA}{n}=\binom{A}{n}$ et donc $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$. Le second point est vérifié et ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P} \text{ définit bien une loi de probabilité.}}$$

Q32. On considère $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n,p,A)$ ou $X \sim \mathcal{H}(n,p,A)$. Comme $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ est fini, X admet bien une espérance. Si $n=0$, alors $X(\Omega)=\{0\}$ et $E(X)=0$, sinon, $n\geq 1$ et :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}=\frac{1}{\binom{A}{n}}\sum_{k=0}^{n} k\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}$$

$$=\frac{1}{\binom{A}{n}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}=\frac{1}{\binom{A}{n}}\sum_{k=1}^{n} pA\binom{pA-1}{k-1}\binom{qA}{n-k}$$

En réindexant ($k-1$ devient k) et à nouveau avec la formule de Vandermonde (avec cette fois-ci $u=pA-1$, $v=qA$ et $N=n-1$), on obtient :

$$E(X)=\frac{1}{\binom{A}{n}}\sum_{k=0}^{n-1} pA\binom{pA-1}{k}\binom{qA}{n-1-k}=pA\frac{\binom{pA-1+qA}{n-1}}{\binom{A}{n}}=pA\frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}}=pA\frac{A\binom{A-1}{n-1}}{A\binom{A}{n}}=pA\frac{n\binom{A}{n}}{A\binom{A}{n}}.$$

Soit :

$$\boxed{E(X)=np}$$

Q33. Soit $k\in\mathbb{N}$.

- Si $k<pA$, on a $k+1\leq pA$ et $\binom{pA}{k+1}=\frac{(pA)!}{(k+1)!(pA-k-1)!}=\frac{pA-k}{k+1}\frac{(pA)!}{k!(pA-k)!}=\frac{pA-k}{k+1}\binom{pA}{k}$, donc :

$$(k+1)\binom{pA}{k+1}=(pA-k)\binom{pA}{k}.$$

- Si $k=pA$, on a $\binom{pA}{k+1}=pA-k=0$, donc la relation ci-dessus reste vraie.

- Si $k>pA$, on a $\binom{pA}{k+1}=\binom{pA}{k}=0$, donc la relation ci-dessus est encore vraie.

Ainsi, la formule $(k+1)\binom{pA}{k+1}=(pA-k)\binom{pA}{k}$ est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

De la même façon, on obtient aussi pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$(k+qA-n+1)\binom{qA}{n-(k+1)}=(n-k)\binom{qA}{n-k}.$$

Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$(pA-k)(n-k)\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}=(k+1)(k+qA-n+1)\frac{\binom{pA}{k+1}\binom{qA}{n-(k+1)}}{\binom{A}{n}}.$$

Soit, avec $P=(X-pA)(X-n)$ et $Q=(X+1)(X+qA-n+1)$, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(k)\,\mathbb{P}(X=k)=Q(k)\,\mathbb{P}(X=k+1).$$

Donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\mathbb{P}\left(X=k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est hypergéométrique.}}$$

On a pour tout $t\in[-1,1]$:

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)t^k .$$

Les nombres n, A et qA sont des entiers naturels tels que $n\leq A$ et $qA\leq A$, donc $qA-n+1$ est un entier.

Si $qA-n+1>0$, alors $qA-n+1\in D$ et la suite $\left(\mathbb{P}\left(X=k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique, associée aux polynômes $P=(X-pA)(X-n)$ et $Q=(X+1)(X+qA-n+1)$. D'après la question **Q14**, on a alors :

$$G_X=G_X(0)F_{-pA,-n,qA-n+1}=\frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}}F_{-pA,-n,qA-n+1}.$$

Si $qA-n+1\leq 0$, soit $n>qA$, alors $qA-n+1\notin D$.

Dans ce cas, on a $\mathbb{P}\left(X=k\right)=0$ quand $k<n-qA$ et pour $k\in[\![n-qA,n]\!]$, si on pose $k'=k-(n-qA)$, on a pour tout $t\in[-1,1]$:

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)t^k=\sum_{k=n-qA}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k+n-qA\right)t^{k+n-qA}=t^{n-qA}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k+n-qA\right)t^k .$$

Et, si on pose $u_k=\mathbb{P}\left(X=k+n-qA\right)$, on a pour tout pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\left(pA-(k+n-qA)\right)\left(n-(k+n-qA)\right)u_k=\left((k+n-qA)+1\right)\left((k+n-qA)+qA-n+1\right)u_{k+1}.$$

Soit :

$$(k+n-A)(k-qA)u_k=(k+n-qA+1)(k+1)u_{k+1}.$$

Ici, $n-qA+1>0$, donc $n-qA+1\in D$, et à nouveau d'après la question **Q14**, on peut écrire pour tout $t\in[-1,1]$:

$$G_X(t)=t^{n-qA}\mathbb{P}\left(X=n-qA\right)F_{n-A,-qA,n-qA+1}(t)=\frac{\binom{pA}{n-qA}}{\binom{A}{n}}t^{n-qA}F_{n-A,-qA,n-qA+1}(t).$$

Remarquons que $n\leq A=qA+pA$, donc $n-qA\leq pA$.

Finalement :

$$\boxed{G_X:t\mapsto\begin{cases}\dfrac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}}F_{-pA,-n,qA-n+1}(t) & \text{quand } n\leq qA\\[2ex] \dfrac{\binom{pA}{n-qA}}{\binom{A}{n}}t^{n-qA}F_{n-A,-qA,n-qA+1}(t) & \text{quand } n>qA\end{cases}}$$

V.B – Modélisation

Q34. Chaque tirage dans la seconde urne est une épreuve de Bernoulli. Les n tirages successifs sont effectués avec remise, ils sont indépendants (on a donc un schéma de Bernoulli) et la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'issue de chaque tirage est $\frac{pA}{A} = p$. Ainsi, le nombre de boules blanches après les n tirages dans la seconde urne suit une loi binomiale de paramètres n et p, soit :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$$

On a alors immédiatement :

$$\boxed{E(Z) = np \quad \text{et} \quad V(Z) = np(1-p).}$$

Q35. Dans la première urne, on tire les n boules simultanément et de manière équiprobable.

Le nombre boules blanches obtenues est compris entre $\max(0, n-qA)$ et $\min(n, pA)$, soit :

$$Y(\Omega) = \llbracket \max(0, n-qA), \min(n, pA) \rrbracket.$$

Comme les boules sont équiprobables, pour tout $k \in Y(\Omega)$, la probabilité d'obtenir k boules blanches à l'issue des n tirages est :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches et } n-k \text{ boules noires}}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Comme il y a pA boules blanches dans l'urne, il y a $\binom{pA}{k}$ possibilités de choisir k boules blanches et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{A-pA}{n-k} = \binom{qA}{n-k}$ possibilités que les $n-k$ autres boules soient noires.

Ainsi, le nombre de tirages contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires est $\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}$.

On tire en tout n boules parmi A, il y a donc $\binom{A}{n}$ tirages possibles et finalement, pour tout $k \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)}$$

V.C – Calcul de la variance

Q36. Pour tout $i \in \llbracket 1, pA \rrbracket$, Y_i vaut 1 si la boule blanche n° i est tirée, et 0 sinon. Comme Y représente le nombre de boules blanches obtenues, les Y_i sont des variables compteur et on a :

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{pA} Y_i}$$

Chaque boule (blanche ou pas) a une chance sur A d'être choisie. Les Y_i suivent donc toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_i=1)$ et donc d'espérance $E(Y_i)=\mathbb{P}(Y_i=1)$ avec :

$$\mathbb{P}(Y_i=1)=\frac{\text{Nombre de tirages contenant la boule blanche n° } i}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Or, pour construire un tirage contenant la boule n° i, il faut choisir les $n-1$ autres boules parmi toutes les boules sauf la n° i ($A-1$ boules). Ainsi, le nombre de tirages contenant la boule n° i est $\binom{A-1}{n-1}$. Le nombre total de tirage étant toujours $\binom{A}{n}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y_i=1)=\frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}}=\frac{\frac{(A-1)!}{(n-1)!(A-n)!}}{\frac{A!}{n!(A-n)!}}=\frac{n}{A}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{pA}E(Y_i)=\sum_{i=1}^{pA}\frac{n}{A}=pA\frac{n}{A}=np.$$

Ainsi :

$\boxed{\text{On retrouve bien } E(Y)=np\text{, le résultat trouvé dans la question } \mathbf{Q32}.}$

On constate alors que :

$$\boxed{E(Y)=E(Z)}$$

Q37. Comme $Y_i(\Omega)=Y_j(\Omega)=\{0,1\}$, on a $(Y_iY_j)(\Omega)=\{0,1\}$ ($0\times 0=0\times 1=1\times 0=0$ et $1\times 1=1$) et on a :

$$\mathbb{P}(Y_iY_j=1)=\mathbb{P}(Y_i=1,Y_j=1)=\frac{\text{Nombre de tirages contenant les boules blanches n° } i \text{ et n° } j}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Or, pour construire un tirage contenant les boules n° i et n° j, il faut choisir les $n-2$ autres boules parmi toutes les boules sauf les boules n° i et n° j ($A-2$ boules). Ainsi, le nombre de tirages contenant la boule n° i est $\binom{A-2}{n-2}$ (en supposant $n\geq 2$, sinon la situation est impossible).

Le nombre total de tirage est toujours $\binom{A}{n}$, donc :

$$\mathbb{P}(Y_iY_j=1)=\frac{\binom{A-2}{n-2}}{\binom{A}{n}}=\frac{\frac{(A-2)!}{(n-2)!(A-n)!}}{\frac{A!}{n!(A-n)!}}=\frac{n(n-1)}{A(A-1)}.$$

Finalement, pour tous $i,j\in[\![1,pA]\!]$ tels que $i<j$:

$\boxed{\text{La variable } Y_iY_j\text{, à valeurs dans } \{0,1\}\text{, suit une loi de Bernoulli de paramètre } \mathbb{P}(Y_iY_j=1)=\frac{n(n-1)}{A(A-1)}.}$

Q38. Comme pour tout $i \in [\![1, pA]\!]$, $Y_i(\Omega)=\{0,1\}$ et pour tout $x \in \{0,1\}$, $x^2 = x$, on a $Y_i^{\,2} = Y_i$ et :

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{pA} Y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{pA} Y_i^{\,2} + 2\sum_{1\le i<j\le pA} Y_iY_j = \sum_{i=1}^{pA} Y_i + 2\sum_{1\le i<j\le pA} Y_iY_j .$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{pA} E(Y_i) + 2\sum_{1\le i<j\le pA} E(Y_iY_j) = \sum_{i=1}^{pA} \mathbb{P}\left(Y_i=1\right) + 2\sum_{1\le i<j\le pA} \mathbb{P}\left(Y_iY_j=1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{pA} \frac{n}{A} + 2\sum_{1\le i<j\le pA} \frac{n(n-1)}{A(A-1)} = pA\frac{n}{A} + 2\frac{n(n-1)}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{pA-1}\sum_{j=i+1}^{pA} 1\\
&= np + 2\frac{n(n-1)}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{pA-1}(pA-i) = np + 2\frac{n(n-1)}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{pA-1} k \quad \text{(avec } k = pA-i\text{)}\\
&= np + 2\frac{n(n-1)}{A(A-1)}\frac{pA(pA-1)}{2} = np + n(n-1)p\frac{pA-1}{A-1}
\end{aligned}$$

Alors :

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = np + n(n-1)p\frac{pA-1}{A-1} - \left(np\right)^2 = np\frac{A-1+(n-1)(pA-1)-np(A-1)}{A-1}.$$

Soit :

$$\boxed{V(Y) = np(1-p)\frac{A-n}{A-1}}$$

On a alors $V(Y) = V(Z)\dfrac{A-n}{A-1}$, donc :

$$V(Z)-V(Y) = V(Z)\left(1-\frac{A-n}{A-1}\right) = V(Z)\frac{n-1}{A-1}.$$

Pour $A \ge 2$ et $n \ge 2$, on a $V(Z)-V(Y) > 0$, soit :

$$\boxed{V(Y) < V(Z)}$$

V.D – Résultats asymptotiques

Q39. Soit deux entiers naturels n et $k \in [\![0, n]\!]$ fixés, et A un entier assez grand tel que $pA \ge n$ et $qA \ge n$.

On a alors :

$$\binom{pA}{k} = \frac{pA(pA-1)...(pA-k+1)}{k!} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{(pA)^k}{k!}$$

$$\binom{qA}{n-k} = \frac{qA(qA-1)...(qA-n+k+1)}{k!} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{(qA)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\binom{A}{n} = \frac{A(A-1)...(A-n+1)}{n!} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{A^n}{n!}$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}\underset{A\to+\infty}{\sim}\frac{\frac{(pA)^k}{k!}\frac{(qA)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{A^n}{n!}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{p^kA^kq^{n-k}A^{n-k}}{A^n}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Q40. Avec les notations de la partie ***V.B***, on a :

$$\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)=\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(Y=k\right)=\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(Z=k\right).$$

Or, on a vu que $E(X)=E(Y)=E(Z)$ et $V(X)=V(Y)=V(Z)\dfrac{A-n}{A-1}$, donc avec $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A-n}{A-1}=1$, on a :

$$\boxed{\begin{cases}\displaystyle\lim_{A\to+\infty}E(X)=E(Z)\\ \displaystyle\lim_{A\to+\infty}V(X)=V(Z)\end{cases}}$$

Ainsi, la limite obtenu dans la question précédente est cohérente avec l'espérance et variance obtenues plus haut.