Concours divers option PC

Planche 220 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

II) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Planche 221 IMT

I) Résoudre $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1$ avec f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II) Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln \dfrac{n-1}{n}\right)$.

Planche 222 IMT, II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + \mathrm{e}^{ax})\mathrm{d}x$.

II) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer $X \in \mathbb{R}^3$ pour lequel $\inf\limits_{X\in\mathbb{R}^3} \| AX - B \|$ est atteint.

Planche 223 IMT

I) Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $X \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.
II) Étudier $\sum(\mathrm{Arc}\tan(n+\alpha) - \mathrm{Arc}\tan n)$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

Planche 224 IMT

I) $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Écrire $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{2}w_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - w_n \end{cases}$ sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$
et en déduire X_n en fonction de A^n et X_0.
Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0.
II) Donner un équivalent de $\ln(n!)$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Planche 225 IMT

I) Montrer que f défini par $f(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2-1)P''(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les valeurs propres.
Montrer que f est symétrique pour le produit scalaire $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
II) Si X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indédendantes suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$, que vaut $p(X_1 = X_2 = X_3)$?

Planche 226 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Montrer que, si $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs unitaires de E euclidien, tels que $\forall x \in E$, $\| x \|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^n < x, e_k >^2$, ils constituent une base orthonormale.

II) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^n (2 - \sqrt[k]{3})$.

Planche 227 IMT, III abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \cos n}$.

II) Suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$ discuter de l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(x+\mathrm{e}^{ax})\mathrm{d}x$.

III) Montrer que $\forall (A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $det(A+X) = \det X \Leftrightarrow A = 0$.

Planche 228 IMT

I) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{3n+1}\mathrm{d}x$.

Nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ et calcul de la somme.
II) Montrer que f donné par $f(P)(X) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.
Déterminer les valeurs propres de f.

Planche 229 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Énoncer le théorème du rang.
Montrer que, en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est surjectif.
$\phi(P) = P'$ est-il injectif sur $\mathbb{R}[X]$? Surjectif ?
II) Montrer que si $y(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est solution de $4y'' + 2y' + y = 0$, alors $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.
Trouver, sans utiliser le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $y(x)$; que peut-on conclure ?
Montrer que $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation sur $\mathbb{R}_+$, à l'aide des développements en série entière connus.
Montrer que $\sin\sqrt{x}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Concours divers option PSI

Planche 230 ICNA

I) Pour quels réels a et b, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?
Dans ce cas, calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$.
II) Que dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$?

Planche 231 Navale

I) Déterminer les solutions développables en série entière de $xy'' + 4y' - 3x^3y = 0$.
$f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{ch}\, x}$ est-elle solution sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_-^*$?
II) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; si $(AB)^2 = 0$, a-t-on nécessairement $(BA)^2 = 0$ (on pourra considérer différentes valeurs de n) ?

Planche 232 Navale, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Dérivable sur $\mathbb{R}$?
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f^{-1} est-elle continue ? Dérivable ?
II) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
Que dire de $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$?
Donner ses éléments propres.
Préciser l'ensemble des matrices vérifiant cette égalité.

Planche 233 Navale

I) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $(f^2 + \mathrm{Id}) \circ f = f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = f^3 + f = 0$.
Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
Montrer que si λ est valeur propre de f, $\lambda^3 + \lambda = 0$.
En déduire que f admet au moins une valeur propre réelle.
Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est le plus simple possible.
II) Nature que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$ en fonction de a et b réels.

Planche 234 IMT

I) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.
Touver la loi suivie par leur somme, d'abord en utilisant la somme des probabilités, puis en utilisant les fonctions génératrices.
Application : calculer $\dfrac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$ si $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
II) Montrer que u, défini par $u(x) = k(a|x)a + x$ où $a \in E$ est unitaire et $k \in \mathbb{R}$, est un endomorphisme symétrique de E euclidien.
Montrer que u est un automorphisme orthogonal en écrivant sa matrice dans une base bien choisie et le caractériser.

Planche 235 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin x \cos^n(x)$ et $f_n(x) = xg_n(x)$.
Étudier les variations de g_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Étudier la suite de terme général f_n puis $\sum f_n$.
II) n personnes lancent simultanément n pièces équilibrées.
Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres.
Déterminer l'espérance et la variance de X.

Planche 236 IMT, II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

La calculer à l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

II) Soient un espace E de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$; montrer que ces sommes sont directes.

Planche 237 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Donner le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \sin(i+j)$.
II) Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{Arc}\tan(nx)}{n^2}$.

Étudier la continuité puis le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Planche 238 IMT

I) Existe-t-il une matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

II) Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$.

Déterminer la limite de la suite de fonctions f_n définies par $f(x) = \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n\dfrac{\pi}{2}$ et $f_n(x) = 0$ si $n\dfrac{\pi}{2} < x$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Planche 239 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 52 ; chaque carte tirée rapporte sa valeur, le valet valant 11, la dame 12, le roi 13.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires représentant la carte de plus basse et plus haute valeur tirées.
Déterminer la loi conjointe de (X, Y), leur loi marginale et leur covariance.
II) Donner le développement en série entière de $\mathrm{sh}\, t$.
Trouver une solution développable en série entière de $tx'' + 2x' - x = 0$, puis une autre solution.

