DM de Mathématiques n° 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $A^2 = 0_n$.

L'objectif du problème est déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n et A pour qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

On pose :

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on appelle f et u les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et N_n.

Enfin, on pose $r = rg(A)$.

1) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $u^k(\varepsilon_i)$ (on justifiera rigoureusement).

   En déduire les puissances de N_n.

2) Montrer que $1 \leq r \leq \dfrac{n}{2}$.

3) Soient $e_1, \dots, e_r$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ tels que $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ soit une base de $\operatorname{Im} f$.

   Justifier qu'il existe $q = n - 2r$ vecteurs $e'_1, \dots, e'_q$ de $\mathbb{K}^n$ tels que $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de $\ker f$.

4) Montrer que $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et donner la matrice de f dans cette base. Justifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PN_n^{n-r}P^{-1}$.

5) Prouver que si $n - r$ est pair, alors il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

Dans les deux questions suivantes, on suppose que $n - r$ est impair et on pose $M_n = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$.

6) On suppose que $2r < n$. Montrer que A est semblable à M_n^{n-1-r} et conclure dans ce cas.

7) On suppose que $2r = n$.

   a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2(2p+1)$, $r = 2p+1$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix}$.

   b. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

   ☺ *On pourra remarquer que si B existe, A et B commutent.*

8) Conclure.