Exercices d'entrainement chapitres 1 à 5 - Enoncés

Chapitre 1

1) Nature de la série $\sum\left(\arctan(n+\alpha)-\arctan n\right)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
   ☺ *On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.*

2) Nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+\cos n}$.

3) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n=\prod_{k=2}^{n}\left(2-\sqrt[k]{3}\right)$.

4) Calculer $\int_0^1 x^{3n+1}dx$. En déduire la nature de $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ et calculer sa somme.

Chapitre 2

1) Montrer que l'application N qui, à tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, associe $N\left((x,y)\right)=|x|+|x+2y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la sphère unité pour cette norme.

2) On pose $E=C^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur E l'application N par $N(f)=|f(0)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|$ et on note N_∞ la norme infinie sur E ($N_\infty(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que N est une norme sur E.
   b. Montrer que $\overline{B}_N(0,1)\subset\overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   c. Existe-t-il $f\in\overline{B}_N(0,1)$ telle que $N_\infty(f)=1$ (soit $f\in S_{N_\infty}(0,1)$) ?

3) On pose $E=C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur E l'application N par $N(f)=\int_0^1(1+t^2)|f(t)|dt$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur E ($\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que N est une norme sur E.
   b. Trouver le plus petit réel β tel que pour toute $f\in E$, $N(f)\le\beta\|f\|_\infty$.
   c. Montrer qu'il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f\in E$, $\alpha\|f\|_\infty\le N(f)$.

4) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices carrées d'ordre n, inversibles et qui converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Montrer que A est inversible et $A^{-1}=B$.

Chapitre 3

1) Soient $\left(E,\|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et a un vecteur non nul de E. On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\|x-a\| & \text{si } \|x\|\le\|a\|\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
   a. Montrer que f est continue en a.
   b. Montrer que f n'est pas continue en $-a$.

2) Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et a un vecteur de E.

Montrer que l'application définie sur E par : $x \mapsto \|x\| a$, est lipschitzienne.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^2 = M\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La partie P est-elle bornée ? ☺ *On pourra considérer les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

b. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.

☺ *On pourra considérer la restriction de f à la parabole d'équation* $y = x^2$.

Chapitre 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin x \cos^n x$ et $f_n(x) = x g_n(x)$.

Etudier les variations de g_n sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Etudier la convergence simple, uniforme sur I de la suite de terme général f_n puis la convergence simple, uniforme, normale sur I de la série $\sum f_n$.

2) Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Etudier la continuité, puis le caractère C^1 de f.

3) On pose $I =]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} \right)$.

a. Montrer la fonction S est définie sur I.

b. Montrer la fonction S est continue sur tout segment inclus dans I. Est-elle continue sur I ?

c. La série S converge-t-elle normalement sur I ?

d. Calculer $S(x+1) - S(x)$. Donner un équivalent de $S(x)$ en -1^+ .

4) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$.

a. Donner le domaine D sur lequel la série $\sum u_n$ converge simplement.

b. Montrer $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que pour $x \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. En déduire que la fonction $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est continue sur D.

Chapitre 5

1) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$.

2) Montrer que si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de de l'équation différentielle $(E) : 4xy''+2y'+y=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Que peut-on conclure ?

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. A l'aide des développements en série entière connus, on donnera une expression compacte de ces solutions sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Donner le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Montrer que *f* vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ et en déduire *f* à l'aide des fonctions usuelles.

4) Etudier la parité de $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Montrer que *f* est développable en série entière et donner son développement.

☺ *On pourra montrer que* $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ *et on donne* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u \, du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercices d'entrainement chapitres 1 à 5 - Corrigés

Chapitre 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\arctan(n+\alpha)-\arctan n}{(n+\alpha)-n} = \arctan' c_n = \dfrac{1}{1+c_n^2}$ avec $n \le c_n \le n+\alpha$, donc :

$$0 \le \arctan(n+\alpha)-\arctan n \le \frac{\alpha}{n^2}.$$

Et $\sum\left(\arctan(n+\alpha)-\arctan n\right)$ converge par comparaison à $\sum \dfrac{\alpha}{n^2}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+\cos n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{\cos n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\cos n}{n}+o\left(\frac{\cos n}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergent donc $\sum u_n$.

3) Pour tout entier $k \ge 2$, $\sqrt[k]{3} = e^{\frac{\ln 3}{k}} \le e^{\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} < 2$, donc $u_n > 0$ et pour tout entier $n \ge 2$:

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right).$$

Or, $\ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right) = \ln\left(2-e^{\frac{\ln 3}{k}}\right) = \ln\left[2-\left(1+\dfrac{\ln 3}{k}+o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\right] = \ln\left[1-\dfrac{\ln 3}{k}+o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right]$, donc $\ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right) \sim -\dfrac{\ln 3}{k}$.

Comme $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\ln 3\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = -\infty$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{3n+1}dx = \dfrac{1}{3n+2}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+2} &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3n+1}dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n+1}\right)dx = \int_0^1\left(x\sum_{n=0}^{N}(-x^3)^n\right)dx = \int_0^1\left(x\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1-(-x^3)}\right)dx \\ &= \int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx+(-1)^N\int_0^1\frac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx\end{aligned}.$$

Et $0 \le \int_0^1 \dfrac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx \le \int_0^1 x^{3N+4}dx = \dfrac{1}{3N+5}$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx = 0$. Alors, $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{3}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{\pi-\ln 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Chapitre 2

1) L'application N est définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N\big((x,y)\big)=N_1\big((x,x+2y)\big)$ où $N_1\big((x,y)\big)=|x|+|y|$.

Soient (x,y), (x',y') de $\mathbb{R}^2$ et λ de $\mathbb{R}$.

- $N\big(\lambda(x,y)\big)=N\big((\lambda x,\lambda y)\big)=|\lambda x|+|\lambda x+2\lambda y|=|\lambda||x|+|\lambda||x+2y|=|\lambda|\big(|x|+|x+2y|\big)=|\lambda|N\big((x,y)\big)$.

  Donc, N est homogène.
- $N\big((x,y)\big)=0 \iff N_1\big((x,x+2y)\big)=0 \iff (x,x+2y)=(0,0) \iff x=x+2y=0 \iff x=y=0$.

  Donc, N est séparée.
- $N\big((x,y)+(x',y')\big)=N\big((x+x',y+y')\big)=|x+x'|+|x+x'+2(y+y')|=|x+x'|+|x+2y+x'+2y'|$

  $\leq |x|+|x'|+|x+2y|+|x'+2y'|=|x|+|x+2y|+|x'|+|x'+2y'|=N\big((x,y)\big)+N\big((x',y')\big)$

  Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

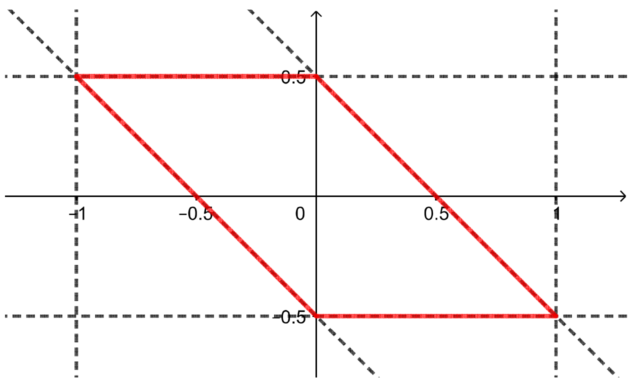
On a $S\big((0,0),1\big)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, N\big((x,y)\big)=1\big\}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|+|x+2y|=1\big\}$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$|x|+|x+2y|=1 \iff \begin{cases}x\geq 0\\ x+2y\geq 0\\ x+x+2y=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\geq 0\\ x+2y\leq 0\\ x-x-2y=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\leq 0\\ x+2y\geq 0\\ -x+x+2y=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\leq 0\\ x+2y\leq 0\\ -x-x-2y=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x\geq 0\\ y\geq -\dfrac{1}{2}x\\ x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\geq 0\\ y\leq -\dfrac{1}{2}x\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\leq 0\\ y\geq -\dfrac{1}{2}x\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\leq 0\\ y\leq -\dfrac{1}{2}x\\ x+y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}0\leq x\leq 1\\ y=\dfrac{1}{2}-x\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}0\leq x\leq 1\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}-1\leq x\leq 0\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}-1\leq x\leq 0\\ y=-\dfrac{1}{2}-x\end{cases}$$

On obtient la partie rouge du plan :



2) a. L'application N est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N(f) = |f(0)| + N_\infty(f')$.

Soient f et g de E, et λ de $\mathbb{R}$.

- $N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \left(|f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| \right) = |\lambda| N(f)$.

  Donc, N est homogène.

- $N(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(0)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0$

  $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f = cste \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

  Donc, N est séparée.

- $N(f+g) = |f(0) + g(0)| + N_\infty(f' + g') \le |f(0)| + |g(0)| + N_\infty(f') + N_\infty(g') = N(f) + N(g)$.

  Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur E.

b. Soit $f \in \overline{B}_N(0,1)$. On a alors $N(f) = |f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| \le 1$.

Posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = a$ donc pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)| \le a$ et, par croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^t f'(u)\,du \right| \le \int_0^t |f'(u)|\,du \le \int_0^t a\,du \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(0)| \le at.$$

Alors, avec $|f(t)| = |f(t)| - |f(0)| + |f(0)|$, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$|f(t)| \le \big||f(t)| - |f(0)|\big| + |f(0)| \le |f(t) - f(0)| + |f(0)| \le at + |f(0)| \le a + |f(0)| = N(f) \le 1.$$

Donc $N_\infty(f) \le 1$ et $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. Finalement, on a bien :

$$\underline{\overline{B}_N(0,1) \subset \overline{B}_{N_\infty}(0,1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto t^n$ appartient à E et :

- $N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$;
- $N(f) = n$ donc quand $n \ge 2$, $f \notin \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$.

Ainsi, l'inclusion réciproque est fausse.

c. Il suffit de considérer $f : t \mapsto t$. On a $N(f) = N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_N(0,1)$ et $N_\infty(f) = 1$.

3) a. L'application N est définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N(f) = N_1(f_1)$ où $f_1 : t \mapsto (1+t^2) f(t)$ et $N_1(f_1) = \int_0^1 |f_1(t)|\,dt$.

Soient f et g de E, et λ de $\mathbb{R}$.

- $N(\lambda f) = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda f(t)|\,dt = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda| |f(t)|\,dt = |\lambda| N(f)$.

  Donc, N est homogène.

- $N(f)=0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1(f_1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1=0 \quad \Leftrightarrow \quad f=0$ (car $f_1=hf$ où $h:t\mapsto 1+t^2$ ne s'annule pas).

  Donc, *N* est séparée.
- $N(f+g)=N_1(f_1+g_1)\leq N_1(f_1)+N_1(g_1)=N(f)+N(g)$.

  Donc, *N* vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, *N* est une norme sur *E*.

b. Soit $f\in E$. Pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)|\leq\|f\|_\infty$, donc :

$$N(f)=\int_0^1(1+t^2)|f(t)|dt\leq\int_0^1(1+t^2)\|f\|_\infty\,dt=\frac{4}{3}\|f\|_\infty.$$

De plus, pour $f:t\mapsto 1$, qui appartient à *E*, on a $N(f)=\int_0^1(1+t^2)dt=\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\|f\|_\infty$ (avec $\|f\|_\infty=1$), donc :

$$\underline{\beta=\frac{4}{3}}.$$

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:t\mapsto t^n$ appartient à *E*, $\|f_n\|_\infty=1$ et :

$$N(f_n)=\int_0^1(1+t^2)t^n dt=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}.$$

On a $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc la quantité $\dfrac{N(f)}{\|f\|_\infty}$ n'est pas minorée par un réel $\alpha>0$ quand *f* décrit $E\setminus\{0\}$.
Autrement dit, il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f\in E$, $\alpha\|f\|_\infty\leq N(f)$.

4) Notons pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k=(a_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, $A_k^{-1}=(b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Comme $A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ et $A_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}B$, on a $a_{i,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}a_{i,j}$ et $b_{i,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}b_{i,j}$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

De plus pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_kA_k^{-1}=\left(\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)}b_{\ell,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)}b_{\ell,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}b_{\ell,j}$, donc :

$$A_kA_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}AB.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_kA_k^{-1}=I_n$, donc $A_kA_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}I_n$ et ainsi $AB=I_n$, autrement dit :

$$\underline{A \text{ est inversible et } A^{-1}=B}.$$

Chapitre 3

1) a. On a $f(a)=0$ et pour tout $x\in E$, $f(x)\le\|x-a\|$, donc

$$|f(x)-f(a)|=f(x)\le\|x-a\|.$$

Comme $\lim_{x\to a}\|x-a\|=0$, on obtient par comparaison, $\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$, soit $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, autrement dit :

$$\underline{f \text{ est continue en } a.}$$

b. On a $\|-a\|=\|a\|$, donc :

$$f(-a)=\|-a-a\|=2\|a\|.$$

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lim_{\lambda\to 1^+}(-\lambda a)=-a$ et si $\lambda>1$, on a $\|-\lambda a\|=\lambda\|a\|>\|a\|$, donc $f(-\lambda a)=0$ et :

$$\lim_{\lambda\to 1^+}f(-\lambda a)=0\ne 2\|a\|=f(-a).$$

Ceci prouve que :

$$\underline{f \text{ n'est pas continue en } -a.}$$

2) On note $f: x\mapsto \|x\|a$. Pour tous $x, y\in E$:

$$\|f(x)-f(y)\|=\big\|\|x\|a-\|y\|a\big\|=\big|\|x\|-\|y\|\big|\|a\|\le\|a\|\|x-y\|.$$

Donc :

$$\underline{x\mapsto\|x\|a \text{ est } \|a\|\text{-lipschitzienne}.}$$

3) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de P convergeant vers $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M\mapsto M^2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (les coefficients de M^2 sont polynomiaux en ceux de M), donc $M_k^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}M^2$. Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M_k^2=M_k$ car $M_k\in P$, donc $M_k^2=M_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}M$ et ainsi, $M^2=M$, donc $M\in P$. Ceci prouve que :

$$\underline{P \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$., $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in P$ pour $n=2$ (pour $n>2$, on peut prendre $M_a=\left(\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} & 0_{2,n-2}\\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2}\end{array}\right)$).

Or, $\|M_a\|_\infty=a$ quand $a\ge 1$, donc $\lim_{a\to+\infty}\|M_a\|_\infty=+\infty$, ce qui prouve que :

$$\underline{P \text{ n'est une pas partie bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4) a. Remarquons déjà que $x^2-2xy+3y^2=(x-y)^2+2y^2=0$ si et seulement si $x-y=y=0$, donc si et seulement si $(x,y)\neq(0,0)$. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de fonction polynomiales.

Soit $D: y=ax$ une droite non verticale passant par l'origine. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x,ax)=\frac{ax}{x^2-2ax+3a^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0=f(0,0).$$

Ainsi, la restriction de *f* à *D* est continue.

Remarquons que cela fonctionne si $a=0$*, car dans ce cas* $f(x,ax)=f(x,0)=0$.

La seule droite verticale passant par l'origine est l'axe des ordonnées (*Oy*), d'équation $x=0$ et, pour tout $y\in\mathbb{R}^*$:

$$f(0,y)=0\xrightarrow[y\to 0]{}0=f(0,0).$$

Donc, la restriction de *f* à (*Oy*) est continue.

Finalement, la restriction de *f* à toute droite passant par l'origine est continue.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

Donc, *f* n'est pas continue à l'origine.

Chapitre 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant que produit de telles fonctions et :

$$g_n'(x) = \cos x \cos^n x - n \sin^2 x \cos^{n-1} x = (n+1)\left[\frac{1}{n+1} - \sin^2 x\right]\cos^{n-1} x .$$

En posant $\alpha_n = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, on a $g_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)^n$ et on obtient le tableau :

x	0		α_n		$\dfrac{\pi}{2}$
g_n	0	$\nearrow$	$g_n(\alpha_n)$	$\searrow$	0

Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\cos x \in [0,1[$, donc $f_n(x) = x \sin x \cos^n x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

D'après le tableau ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$|f_n(x)| = |x g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} g_n(\alpha_n) .$$

Donc $\sup\limits_I |f_n| \leq \dfrac{\pi}{2} g_n(\alpha_n)$ et :

$$g_n(\alpha_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}} .$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_I |f_n| = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(0) = 0$ et pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \neq 1$, et :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} x \sin x \cos^k x = x \sin x \cos x \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x \sin x \cos x}{1 - \cos x} .$$

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur *I* vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \sin x \cos x}{1 - \cos x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Enfin, $x \sin x \cos x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$ et $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0)$. Ceci prouve que f n'est pas continue en 0, donc que la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur *I*, et donc pas normale non plus.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $f_n(x)=\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a $\left|f_n(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

De surcroit, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|f_n(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x)=\dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

La série $\sum f_n'(0)$ (qui est la série harmonique) diverge.

Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$, $\left|f_n'(x)\right|\leq\dfrac{1}{n^3a^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$. Ceci permet de conclure que $f=\sum\limits_{n\geq1}f_n$ est de classe C^1 sur $\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

On a $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}=\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{f_n(x)}{x}=\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}h(nx)$ avec $h(t)=\dfrac{\arctan t}{t}$.

On a $\lim\limits_{0}h=1$, donc il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $t\in\left[-\alpha,\alpha\right]\setminus\{0\}$, $h(t)\geq\dfrac{1}{2}$.

Or, $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}=+\infty$, donc pour tout réel $A>0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}\geq2A$.

Remarquons que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $h(x)>0$, donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}h(nx)$.

Alors, pour tout $x\in\left[-\dfrac{\alpha}{N},\dfrac{\alpha}{N}\right]\setminus\{0\}$, on a $nx\in\left[-\alpha,\alpha\right]\setminus\{0\}$ pour tout $n\in[\![1,N]\!]$ et :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}h(nx)\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\frac{1}{2}\geq A.$$

Finalement, pour tout réel $A>0$, il existe $a=\dfrac{\alpha}{N}>0$ tel que $x\in\left[-a,a\right]\setminus\{0\}$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq A$. Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ est définie sur $I = \left]-1, +\infty\right[$ et pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Donc, $f_n(0) = 0$ et pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$. Dans les deux cas, la série $\sum f_n(x)$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur } I.}$$

b. Pour tout $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a $n + x > n - 1 > 0$ et :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n|n+x|} \leq \frac{|x|}{n(n-1)}.$$

Soit $[a,b] \subset I$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $|x| \leq \mu = \max(|a|,|b|)$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{\mu}{n(n-1)}$.

Comme la série $\sum \frac{\mu}{n(n-1)}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et comme les f_n sont toutes continues sur *I*, la fonction *S* est continue sur $[a,b]$. Ainsi, *S* est continue sur tout segment inclus dans *I*.

Enfin, comme $\bigcup_{[a,b] \subset I} [a,b] = I$:

$$\boxed{S \text{ est continue sur } I.}$$

c. Pour que $\sum f_n$ converge normalement sur *I*, il faut que $\|f_n\|_\infty$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Or, pour tout entier $n \geq 2$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } S \text{ ne converge pas normalement sur } I.}$$

d. Pour tout $x \in I$, $x + 1 \in I$ et :

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right) = \frac{1}{x+1} \quad \text{(par télescopage)}$$

Comme *S* est continue sur *I*, elle l'est en 0, donc $\lim_{x \to -1^+} S(x+1) = \lim_{x \to 0} S(x) = S(0) = 0$.

Comme pour tout $x \in I$, $(x+1)S(x+1) - 1 = (x+1)S(x)$, on a $\lim_{x \to -1^+} (x+1)S(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1)S(x+1) - 1 = -1$ et donc :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to -1^+}{\sim} -\frac{1}{x+1}}$$

4) a. Pour tout entier $n\geq 2$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u_n(x)=\dfrac{\ln x}{x^n\ln n}=\ln x\dfrac{(1/x)^n}{\ln n}$.

- $u_n(1)=0$: $\sum u_n(1)$ converge ;
- si $0<x<1$, $\dfrac{1}{x}>1$ donc $u_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ par croissances comparées : $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement ;
- si $x>1$, on a $u_n(x)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$ et $0<\dfrac{1}{x}<1$, donc $\sum\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ converge, donc : $\sum u_n(x)$ converge.

Finalement :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge simplement sur } D=[1,+\infty[\,.}$$

b. Pour tout entier $n\geq 2$, u_n est dérivable sur *D* en tant que quotient de telles fonctions et :

$$u_n'(x)=\frac{n}{x^{n+1}\ln n}\left(\frac{1}{n}-\ln x\right).$$

Donc, u_n est croissante sur $\left]1,e^{1/n}\right]$ et croissante sur $\left[e^{1/n},+\infty\right[$. Comme u_n est positive sur *D*, on a :

$$\|u_n\|_\infty=u_n(e^{1/n})=\frac{1}{e\,n\ln n}.$$

Or, $t\mapsto\dfrac{1}{t\ln t}$ est continue, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$, et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t}=\left[\ln(\ln t)\right]_2^{+\infty}$ diverge, donc par comparaison série-intégrale $\sum\|u_n\|_\infty$ diverge et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } D.}$$

c. Soit $x\in D$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout entier $k\geq n+1$, on a : $0\leq u_k(x)=\dfrac{\ln x}{x^k\ln k}\leq\dfrac{\ln x}{\ln(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$.

Donc, pour $x>1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\ln x}{\ln(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\frac{\ln x}{\ln(n+1)}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\frac{\ln x}{\ln(n+1)}\frac{(1/x)^{n+1}}{1-1/x}=\frac{1}{\ln(n+1)}\frac{\ln x}{x-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Or, pour tout $x\in D$, $0\leq\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\leq 1$ et $0\leq\ln x\leq x-1$ (il suffit d'étudier $x\mapsto\ln x-x+1$, qui est décroissante sur $D=[1,+\infty[$ et nulle en 1, donc négative sur *D*). Ainsi, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leq\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ et comme $u_k(1)=0$ pour tout *k*, l'inégalité reste vraie pour tout $x\in D$, soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leq\frac{1}{\ln(n+1)}}$$

Comme $\dfrac{1}{\ln(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, l'inégalité ci-dessus prouve que $\sum u_n$ converge uniformément sur *D* et comme toutes les fonctions u_n sont continues sur *D* :

$$\boxed{\text{La fonction } \sum_{n\geq 2}u_n \text{ est continue sur } D.}$$

Chapitre 5

1) On a $\dfrac{n^2+4n-1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et le rayon de convergence de $\sum nx^n$ est 1, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n \text{ est 1.}}$$

Pour tout $x\in\,]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n+2-\frac{5}{n+2}\right)x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\,x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n - 5\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n+2} \text{ (les trois séries convergent).}$$

Et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\,x^n = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$x^2\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{n+1}}{n+1} - x = -\ln(1-x) - x$$

Donc, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}+5\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} & \text{quand } x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{quand } x=0 \end{cases}}$$

2) Posons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et notons R le rayon de convergence de cette série.

La fonction f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$4xf''(x)+2f'(x)+f(x) = 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2n+2)(2n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n$$

Donc, f est solution de (E) si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}}$$

Une récurrence simple permet alors de prouver que si $a_0\neq 0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ et si $a_0=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$. Dans le premier cas, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum a_n x^n$ converge d'après la règle de d'Alembert. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est infini et } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ et en multipliant par $(2n+2)!$, on obtient $\big(2(n+1)\big)!a_{n+1}=-(2n)!a_n$.
La suite $\big((2n)!a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison – 1 et de premier terme a_0, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2n)!a_n=a_0(-1)^n$, soit :

$$\boxed{a_n=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}}$$

Les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de (E), sont alors les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

On a $\cos t=\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\sqrt{x}^{2n}=\cos\sqrt{x}$ et ainsi, les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}_+$ de (E), sont les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\lambda\cos\sqrt{x} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

La fonction $g:x\mapsto\sin\sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$g':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$
$$g'':x\mapsto-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$4xg''(x)+2g'(x)+g(x)=4x\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}\right)+2\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto\sin\sqrt{x} \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

3) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}\right|=\frac{2(n+1)}{2n+3}x^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum a_nx^{2n+1}$ converge quand $|x|<1$ et diverge quand $|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ est 1.}}$$

La fonction *f* est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}$, donc :

$$\begin{aligned}(1-x^2)f'(x)-xf(x)&=(1-x^2)\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}-x\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n+2}-\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 0}(2n+2)\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2(n+1)}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}2n\frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-1)!}x^{2n}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}2n\frac{4^n(n!)^2}{4n^2(2n-1)!}x^{2n}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}\\&=1\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ vérifie l'équation différentielle } (1-x^2)y'-xy=1.}$$

Sur $]-1,1[$, l'équation $(1-x^2)y'-xy=0$ se récrit $y'-\frac{x}{1-x^2}y=\frac{1}{1-x^2}$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto \lambda\exp\left(\int_0^x\frac{t}{1-t^2}dt\right)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante, on trouve $x\mapsto\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ comme solution particulière.

Alors, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda=f(0)=0$ et finalement, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\boxed{f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4) Les fonctions $x\mapsto e^{x^2/2}$ et $x\mapsto e^{-x^2/2}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et paires, donc $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x\mapsto e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et impaire.}}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x^2/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$ et $e^{-x^2/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}$, puis, en intégrant terme à terme, on obtient :

$$\int_0^x e^{-t^2/2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Alors, *f* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right).$$

Les deux séries convergent absolument donc on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2n-2k}}{2^{n-k}(n-k)!}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\right)x^{2n+1}.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\right)dt = \int_0^1(1-t^2)^n dt$$

$$\underset{t=\sin u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 u)^n\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}u\,du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Donc, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

Remarque : On pouvait remarquer que *f* est la solution qui s'annule en 0 de $y' - xy = 1$ et chercher les solutions impaires et développables en série entière de cette équation : on arrive au même résultat. Ceci pourrait être une méthode (un peu tordue !) pour calculer l'intégrale de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}u\,du$.