Exercices d'entrainement chapitres 16 à 18 - Enoncés

Chapitre 16

1) Soient E un espace euclidien, k un réel et a un vecteur unitaire de E.

   Montrer que $u : x \mapsto k(a \mid x)a + x$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

   En écrivant sa matrice dans une base bien choisie de E, déterminer la ou les valeur(s) de k pour la(les)quelle(s) u est un automorphisme orthogonal. Caractériser cette isométrie.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = A^\top$.

   a. Trouver un polynôme annulateur de A.

   b. On suppose que $0 \in Sp(A)$. Déterminer $Sp(A)$.

   c. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

3) Montrer que $f : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2). En donner les valeurs propres.

   Montrer que f est autoadjoint pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$.

4) Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau et son image, une base orthogonale du noyau et de l'image, puis montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

   Diagonaliser M. De quel endomorphisme s'agit-il ?

   Montrer que $A = I_4 + M$ est inversible, que $\left(A^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'un endomorphisme que l'on déterminera.

   Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de s, la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Im} M$.

5) Déterminer $\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ A \text{ orthogonale} \right\}$.

6) Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note s la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

   Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

7) Soient un entier $n \geq 2$ et $u : M \mapsto -M + tr(M) I_n$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Prouver que – 1 est valeur propre de u. Trouver une base de $E_{-1}(u)$, le sous-espace propre associé.

   Montrer que u est diagonalisable. Déterminer $\det u$ et $tr(u)$.

   Donner un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme autoadjoint.

   Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

8) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^{\mathsf{T}}A = AA^{\mathsf{T}}$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = 0_n$.

Montrer que $A^{\mathsf{T}}A = AA^{\mathsf{T}} = 0_n$, puis que $A = 0_n$.

9) On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $|s| = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.

10) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. A quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, M est-elle positive ? définie positive ?

Chapitre 17

1) Montrer que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est une rotation. Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $X_m \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel $\inf\limits_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ est atteint.

3) Montrer que $P : x + y + z = 0$ et $D : x = y = z$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

4) Montrer que f, de matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un endomorphisme orthogonal indirect. Quelle est la nature de cette isométrie ? En donner les caractéristiques.

On note g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $(1,1,0)$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer l'image du plan $P : x + y + z = 0$ par $g \circ f$.

Chapitre 18

Dans ce qui suit, l'espace affine est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Etudier les arcs paramétrés suivants (asymptotes, points stationnaires, points multiples) :

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases} \qquad g : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad c : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ avec } a > 0.$$

Quelle est la longueur d'une arche de c ?

2) (*St Cyr PSI*) Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x,y,z) \mapsto \dfrac{\arctan(xyz)}{1+(xyz)^2} - \dfrac{\pi}{8}$.

Donner une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$.

3) Donner la représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection *f*, sur le plan *P* d'équation $z=0$, parallèlement à *D*, dirigée par $\overrightarrow{OS}$ avec $S(1,-1,1)$.

On note $\mathscr{E}$ l'image par *f* du cercle $\mathscr{C}$ d'équations $\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Montrer que $\mathscr{E}$ a pour équation $x^2+2y^2+2xy=1$ dans le plan *P* rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soient l'application $f:(x,y) \mapsto x^2+y^2-2x^2y^2$ et *S* la surface de l'espace d'équation $z=f(x,y)$.

Montrer que *S* est invariante par quatre réflexions que l'on donnera.

Trouver les points critiques de *f* et déterminer les extremums locaux ou globaux de *f* sur $\mathbb{R}^2$.

5) Soit la surface *S* de l'espace d'équation cartésienne $x^2+2y^2+z^2=1$.

Déterminer tous les plans tangents à *S* passant par le point *A* de coordonnées $(1,1,0)$.

Déterminer tous les plans tangents à *S* contenant la droite *D* d'équations $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$.

6) Reconnaitre la surface *S* de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2+y^2+z^2=1$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $D(\lambda)$ (si elle existe) la droite horizontale passant par le point $A(\lambda)$, de coordonnées $(0,0,\lambda)$ et qui coupe *S* une seule fois.

Que dire des droites $D(\lambda)$? En existe-t-il pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$?

Donner une équation cartésienne de la réunion de ces droites quand λ décrit $\mathbb{R}$.

7) Après avoir justifié qu'elles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice hessienne de *f* en $a \in \mathbb{R}^2$, puis rechercher les extremums éventuels de *f* sur $\mathbb{R}^2$ pour :

a. $f:(x,y) \mapsto x^2+x^{19}-y^2$ b. $f:(x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$

Exercices d'entrainement chapitres 16 à 18 - Corrigés

Chapitre 16

1) On pose $u : x \mapsto k(a \mid x)a + x$ avec E un espace euclidien, $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$.

Par bilinéarité du produit scalaire, $x \mapsto (a \mid x)a$ est linéaire, donc un endomorphisme de *E*. Comme *u* est une combinaison linéaire de cet endomorphisme est de id_E, *u* est un endomorphisme de *E*.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$\big(u(x) \mid y\big) = \big(k(a \mid x)a + x \mid y\big) = k(a \mid x)(a \mid y) + (x \mid y) = k(a \mid y)(x \mid a) + (x \mid y) = \big(x \mid k(a \mid y)a + y\big) = \big(x \mid u(y)\big)$.

Ainsi, *u* est autoadjoint et donc :

$$\boxed{\text{L'application } u \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } E.}$$

Posons $a = e_1$ et $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\{a\}^{\perp}$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base orthonormée de *E*. On a alors :

- $u(e_1) = k(a \mid e_1)a + e_1 = k(e_1 \mid e_1)e_1 + e_1 = (k+1)e_1$;
- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = k(a \mid e_j)a + e_j = k(e_1 \mid e_j)e_1 + e_j = e_j$.

Donc, $M_{\mathcal{B}}(u) = diag\big(k+1, 1, \dots, 1\big)$. Cette matrice est orthogonale si et seulement si $|k+1| = 1$, donc si seulement si $k = 0$ ou -2.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ est un automorphisme orthogonal si seulement si } k = 0 \text{ ou } -2 \text{, et } u = id_E \\ \text{dans le premier cas, et } u \text{ est la réflexion par rapport à } \{a\}^{\perp} \text{ dans le second.} \end{array}}$$

2) a. On a $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0_2$ et $A^2 = A^{\top}$. Alors :

$$A = (A^2)^{\top} = (A^{\top})^2 = (A^2)^2 = A^4.$$

Donc :

$$\boxed{X^4 - X \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

b. Si $0 \in Sp(A)$, χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ (car *A* est une matrice 2×2) avec $\chi_A = X(X - \lambda)$.
Or, $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-\overline{j})$ un polynôme annulateur de *A* scindé à racines simples, donc *A* est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses seules valeurs propres (réelles) possibles sont 0 et 1. Or, si 0 était sa seule valeur propre, *A* serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi, 0 et 1 sont les valeurs propres de *A*, soit :

$$\boxed{Sp(A) = \{0, 1\}}$$

c. D'après ce qui précède, $\chi_A = X(X-1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Avec $Sp(A)=\{0,1\}$, il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$ avec $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Remarquons que $B^2 = B = {}^tB$, donc :

$$A^\top = A^2 = (PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PBP^{-1} = A.$$

Ainsi, A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ avec une matrice de passage orthogonale.}}$$

3) Les applications $P\mapsto XP'$ et $P\mapsto (X^2-1)P''$ sont linéaires (par linéarité de la dérivation).

De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg P'\leq n-1$ et $\deg P''\leq n-2$, donc $\deg\left(XP'\right)=1+\deg P'\leq n$ et $\deg\left((X^2-1)P''\right)=2+\deg P''\leq n$. Ainsi, $P\mapsto XP'$ et $P\mapsto (X^2-1)P''$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ et finalement, comme f est une combinaison linéaire de ces deux endomorphismes :

$$\boxed{f : P\mapsto 2XP'+(X^2-1)P'' \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On a $f(1)=0$, $f(X)=2X$ et pour tout $k\in[\![2,n]\!]$:

$$f(X^k)=2X\left(kX^{k-1}\right)+(X^2-1)\left(k(k-1)X^{k-2}\right)=k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi, si on note $\mathcal{B}_c=\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & & & & & \vdots\\
0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 12 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & & 0\\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & -n(n-1)\\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & n(n+1)
\end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux (tous distincts car l'application $x\mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc injective). Ainsi :

$$\boxed{Sp(f)=\{0, 2, 6, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\}=\left\{k(k+1), k\in[\![0,n]\!]\right\}}$$

Pour tout $(P,Q)\in\left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$, on a :

$$\left\langle f(P),Q\right\rangle=\left\langle 2XP'+(X^2-1)P'',Q\right\rangle=2\left\langle XP',Q\right\rangle+\left\langle (X^2-1)P'',Q\right\rangle=2\int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt+\int_{-1}^1(t^2-1)P''(t)Q(t)dt.$$

Toutes les applications en jeu sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut réaliser des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt &= \left[tP(t)Q(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 P(t)\left(Q(t)+tQ'(t)\right)dt\\ &= Q(1)P(1)+Q(-1)P(-1)-\int_{-1}^1 P(t)\left(Q(t)+tQ'(t)\right)dt\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(t^2-1)P''(t)Q(t)dt &= \left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}P'(t)\left(2tQ(t)+(t^2-1)Q'(t)\right)dt \\ &= -\left[P(t)\left(2tQ(t)+(t^2-1)Q'(t)\right)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}P(t)\left(2Q(t)+4tQ'(t)+(t^2-1)Q''(t)\right)dt \\ &= -2Q(1)P(1)-2Q(-1)P(-1)+2\int_{-1}^{1}P(t)\left(Q(t)+tQ'(t)\right)dt \\ &\qquad + \int_{-1}^{1}P(t)\left(2tQ'(t)+(t^2-1)Q''(t)\right)dt \\ &= -2\int_{-1}^{1}tP'(t)Q(t)dt + \left\langle P, f(Q)\right\rangle\end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-1}^{1}(t^2-1)P''(t)Q(t)dt + 2\int_{-1}^{1}tP'(t)Q(t)dt = \left\langle P, f(Q)\right\rangle.$$

Ainsi $\left\langle f(P), Q\right\rangle = \left\langle f(P), Q\right\rangle$ et ceci pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est autoadjoint pour le produit scalaire } (P,Q) \mapsto \left\langle P,Q\right\rangle = \int_{-1}^{1}PQ.}$$

4) Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de *M*. On a $C_3 = -C_1$ et $C_4 = -C_2$. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires :

$$\boxed{rg\,(M) = 2}$$

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à *M*.

D'après ce qui précède $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$. Et $C_1 = e_1 - e_3$, et $C_2 = e_2 - e_4$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)}$$

Remarquons que $(e_1 - e_3 \mid e_2 - e_4) = 0$, donc $(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est une base orthogonale de l'image de *M*.

Le théorème du rang donne $\dim(\ker M) = 2$ et comme $C_1 + C_3 = u(e_1 + e_3) = 0$, $C_2 + C_4 = u(e_2 + e_4) = 0$ et les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$ ne sont pas colinéaires, on a :

$$\boxed{\ker M = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)}$$

Remarquons que $(e_1 - e_3 \mid e_2 - e_4) = 0$, donc $(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est une base orthogonale du noyau de *M*.

On a :

$$(e_1 - e_3 \mid e_1 + e_3) = (e_2 - e_4 \mid e_2 + e_4) = 1 - 1 = 0$$
$$(e_1 - e_3 \mid e_2 + e_4) = (e_2 - e_4 \mid e_1 + e_3) = 0$$

Donc, les vecteurs d'une base de $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de $\ker M$, donc :

$$\boxed{\ker M \perp \operatorname{Im} M}$$

Comme $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux et $\dim(\ker M)+\dim(\operatorname{Im} M)=4$, on a $\ker M=(\operatorname{Im} M)^{\perp}$, $\mathbb{R}^4=\ker M\oplus\operatorname{Im} M$ et $\mathcal{B}=(e_1+e_3, e_2+e_4, e_1-e_3, e_2-e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition.

Or, $u(e_1)=-u(e_3)=e_1-e_3$ et $u(e_2)=-u(e_4)=e_2-e_4$, donc :

$$\begin{aligned}
&u(e_1-e_3)=2u(e_1)=2(e_1-e_3)\\
&u(e_2-e_4)=2u(e_2)=2(e_2-e_4)\\
&u(e_1+e_3)=0\\
&u(e_2+e_4)=0
\end{aligned}$$

Et ainsi, on a $M_{\mathcal{B}}(u)=diag(0,0,2,2)$. Finalement :

$$\boxed{Sp(M)=\{0;2\},\ \ker M=\operatorname{Vect}(e_1+e_3, e_2+e_4)\text{ et }\ker(M-2I_4)=\operatorname{Im} M=\operatorname{Vect}(e_1-e_3, e_2-e_4).}$$

On a $M_{\mathcal{B}}(u)=diag(0,0,2,2)=2\,diag(0,0,1,1)$ et $diag(0,0,1,1)$ est la matrice de la projection orthogonale p sur $\operatorname{Im} M$ (parallèlement à $\ker M=(\operatorname{Im} M)^{\perp}$). Ainsi :

> *M* est la matrice de la composée de $2id_{\mathbb{R}^4}$, l'homothétie de rapport 2, par la projection orthogonale *p* sur $\operatorname{Vect}(e_1-e_3, e_2-e_4)$.

Comme – 1 n'est pas valeur propre de *M*, $\ker(M+I_4)=\{0\}$ et donc :

$$\boxed{A=I_4+M\text{ est inversible.}}$$

Si on note $P=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, on a $P^{-1}MP=M_{\mathcal{B}}(u)=2D$ avec $D=diag(0,0,1,1)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D^n=D$. Alors :

$$M=2PDP^{-1}\text{ et }M^2=4PD^2P^{-1}=2\left(2PDP^{-1}\right)=2M\,.$$

On a alors $M^3=2M^2=4M=2^2M$ et on prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $M^n=2^{n-1}M$ (*le faire*).

Comme *M* et I_4 commutent, on peut écrire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
A^n=(I_4+M)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^k=I_4+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k-1\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^{-n}=(A^n)^{-1}$ et comme $M^2=2M$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(A^n\right)^2&=\left(I_4+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M\right)^2=I_4+\left(3^n-1\right)M+\frac{1}{4}\left(3^n-1\right)^2M^2=I_4+\left(3^n-1\right)M+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)^2M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left[2\left(3^n-1\right)+\left(3^n-1\right)^2\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left[\left(3^n-1+1\right)^2-1\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left((3^n)^2-1\right)M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)\left(3^n-1\right)M=I_4+\left(3^n+1\right)\left(A^n-I_4\right)=\left(3^n+1\right)A^n-3^nI_4
\end{aligned}$$

Donc, $I_4 = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)A^n - \left(A^n\right)^2\right] = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - A^n\right]A^n$ et ainsi, avec $A^n = I_4 + \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M$:

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - A^n\right] = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - \left(I_4 + \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M\right)\right] = I_4 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)M .$$

Finalement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M = I_4 - PDP^{-1} = P(I_4-D)P^{-1}.$$

Ainsi, $I_4 - \frac{1}{2}M$ est la matrice de $id_{\mathbb{R}^4} - p$ le projecteur associé à p, donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(A^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } I_4 - \frac{1}{2}M \text{, qui est la matrice de la projection sur } \mathrm{Vect}\left(e_1+e_3, e_2+e_4\right) \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\left(e_1-e_3, e_2-e_4\right).}$$

On note s, la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Im} M$.

Comme $p = \frac{1}{2}u$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} M$, on a $s = 2p - id_{\mathbb{R}^4} = u - id_{\mathbb{R}^4}$, donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } s \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^4 \text{ est } M - I_4.}$$

5) On cherche les matrices $n\times n$ à coefficients entiers et orthogonales.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une telle matrice.

On a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. Ceci implique que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $0\le a_{i,j}^2 \le 1$, donc que $a_{i,j}^2 = 0$ ou 1, car $a_{i,j}^2$ est un entier. De plus, pour avoir $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, il faut alors qu'exactement l'un des $a_{i,j}^2$ soit égal à 1 et tous les autres nuls. Ainsi, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, il existe $i_0 = \varphi(j)\in[\![1,n]\!]$ tel que $a_{i_0,j}^2 = 1$, soit $a_{i_0,j} = a_{\varphi(j),j} = \pm 1$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]\setminus\{\varphi(j)\}$.

Ceci peut se résumer en $a_{i,j} = \pm\,\delta_{i,\varphi(j)}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Enfin, on a doit avoir pour tous $j,j'\in[\![1,n]\!]$ tels que $j\ne j'$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = 0$, soit $a_{\varphi(j),j}a_{\varphi(j),j'} = 0$ et comme $a_{\varphi(j),j} = \pm 1$, ceci donne $a_{\varphi(j),j'} = 0$ et donc $\varphi(j)\ne\varphi(j')$.

Ainsi, φ est une injection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, autrement dit une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Ainsi, $A = (\pm\,\delta_{i,\varphi(j)})_{1\le i,j\le n}$ où φ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Réciproquement, si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ a la forme ci-dessus, A est à coefficients entiers et pour tous $j,j'\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = \sum_{i=1}^{n} (\pm\,\delta_{i,\varphi(j)})(\pm\,\delta_{i,\varphi(j')}) = \begin{cases} (\pm\,\delta_{\varphi(j),\varphi(j)})(\pm\,\delta_{\varphi(j),\varphi(j')}) = 0 & \text{quand } j\ne j' \\ (\pm\,\delta_{\varphi(j),\varphi(j)})^2 = 1 & \text{quand } j = j' \end{cases}$$

Donc, A est orthogonale.

Finalement :

Les matrices $n\times n$ à coefficients entiers et orthogonales sont les matrices de la forme $(\pm\delta_{i,\varphi(j)})_{1\le i,j\le n}$ où φ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

6) On note $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire canonique).

On note s est la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P:\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Soit $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$X\in P \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} \iff X\in\text{Vect}(f_1,f_2).$$

avec $f_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_3)$ et $f_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_4)$.

On a donc $P=\text{Vect}(f_1,f_2)$.

Les vecteurs f_1 et f_2 sont unitaires et orthogonaux. On peut compléter (f_1,f_2) en une base orthonormée $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ de $\mathbb{R}^4$, en posant $f_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$ et $f_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2+e_4)$.

La symétrie orthogonale s est alors la symétrie par rapport à $P=\text{Vect}(f_1,f_2)$, parallèlement à $P^{\perp}=\text{Vect}(f_3,f_4)$. On a alors :

$$\begin{cases} s(f_1)=f_1 \\ s(f_2)=f_2 \\ s(f_3)=-f_3 \\ s(f_4)=-f_4 \end{cases} \iff \begin{cases} s(e_1-e_3)=s(e_1)-s(e_3)=e_1-e_3 \\ s(e_2-e_4)=s(e_2)-s(e_4)=e_2-e_4 \\ s(e_1+e_3)=s(e_1)+s(e_3)=-e_1-e_3 \\ s(e_2+e_4)=s(e_2)+s(e_4)=-e_2-e_4 \end{cases} \iff \begin{cases} s(e_1)=-e_3 \\ s(e_2)=-e_4 \\ s(e_3)=-e_1 \\ s(e_4)=-e_2 \end{cases}$$

Ainsi :

La matrice de s dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) On prend un entier $n\ge 2$ et $u:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;M\mapsto -M+tr(M)I_n$.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$u(M)=-M \iff tr(M)I_n=0_n \iff tr(M)=0.$$

Donc :

-1 est valeur propre de u et $E_{-1}(u)=\ker\left(u+id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M)=0\}$.

Remarquons que comme la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E_{-1}(u)=\ker(Tr)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de dimension n^2-1.

Remarquons de plus que, si $\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\ne j$, on a $tr(E_{i,j})=0$, donc $E_{i,j}\in E_{-1}(u)$. De plus, pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, on a $tr(E_{1,1}-E_{i,i})=1-1=0$, donc $E_{1,1}-E_{i,i}\in E_{-1}(u)$. La famille $\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}\cup\left(E_{1,1}-E_{i,i}\right)_{i\in[\![2,n]\!]}\right)$ contient $(n^2-n)+(n-1)=n^2-1$ matrices et est libre (*à prouver*), donc :

$$\boxed{\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}\cup\left(E_{1,1}-E_{i,i}\right)_{i\in[\![2,n]\!]}\right) \text{ est une base de } E_{-1}(u).}$$

On vient de voir que – 1 est valeur propre de *u* et que la dimension du sous-espace propre associé est n^2-1 (avec $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)=n^2$).

Soit maintenant $\lambda\in\mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de *u* différente de – 1 et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a alors $u(M)=-M+tr(M)I_n=\lambda M$, soit :

$$(\lambda+1)M=tr(M)I_n.$$

Comme $(\lambda+1)M\ne 0_n$, on a $tr(M)\ne 0$ et, en passant à la trace dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$(\lambda+1)\times tr(M)=tr(M)\times tr(I_n)=tr(M)\times n.$$

Avec $tr(M)\ne 0$, on a $\lambda+1=n$, soit $\lambda=n-1$ et :

$$M=\frac{tr(M)}{\lambda+1}I_n=\frac{tr(M)}{n}I_n.$$

Ainsi, tout vecteur propre associé à $n-1$ est proportionnelle à I_n.

Réciproquement, on a :

$$u(I_n)=-I_n+tr(I_n)I_n=-I_n+nI_n=(n-1)I_n.$$

Donc $n-1$ est bien valeur propre de *u* et I_n est un vecteur propre associé.

On a alors $E_{n-1}(u)=\ker\left(u-(n-1)id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)=\mathrm{Vect}\left(I_n\right)$ et $\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=1$.

Finalement, $\dim\left(E_{-1}(u)\right)+\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=(n^2-1)+1=n^2=\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$, donc :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

On a vu que *u* est diagonalisable avec $Sp(u)=\{-1,n-1\}$, $\dim\left(E_{-1}(u)\right)=n^2-1$ et $\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=1$, donc – 1 est de multiplicité n^2-1 et $n-1$ de multiplicité 1, d'où :

- $\det u=(-1)^{n^2-1}(n-1)=(-1)^{n-1}(n-1)$ (car n et n^2 ont la même parité) :
- $tr(u)=(n^2-1)(-1)+(n-1)=n-n^2$.

Finalement :

$$\boxed{\det u=(-1)^{n-1}(n-1) \text{ et } tr(u)=n-n^2.}$$

Soit $(\cdot|\cdot)$ un éventuel produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme autoadjoint.

On a alors pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(u(M)\,|\,N) = (M\,|\,u(N)) \quad &\Leftrightarrow \quad (-M + tr(M)I_n\,|\,N) = (M\,|-N + tr(N)I_n) \\ &\Leftrightarrow \quad -(M\,|\,N) + tr(M)(I_n\,|\,N) = -(M\,|\,N) + tr(N)(M\,|\,I_n) \\ &\Leftrightarrow \quad tr(M)(I_n\,|\,N) = tr(N)(I_n\,|\,M)\end{aligned}$$

En considérant (à tout hasard !) le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto (A\,|\,B) = tr(A^\top B)$, on a, pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(I_n\,|\,M) = tr(I_n{}^\top M) = tr(M)$ et de la même façon $(I_n\,|\,N) = tr(N)$, donc $tr(M)(I_n\,|\,N) = tr(N)(I_n\,|\,M)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

La base canonique $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par définition), donc la famille extraite $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}$ l'est aussi.

De plus, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \ne j$ et tout $k \in [\![2,n]\!]$, on a :

$$(E_{i,j}\,|\,E_{1,1} - E_{k,k}) = (E_{i,j}\,|\,E_{1,1}) - (E_{i,j}\,|\,E_{k,k}) = 0 - 0 = 0.$$

Donc, la base $\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j} \cup (E_{1,1} - E_{i,i})_{i\in[\![2,n]\!]}\right)$ de $E_{-1}(u)$ est orthogonale et comme pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, on a $\|E_{1,1} - E_{k,k}\| = \sqrt{2}$, on en déduit que la famille $\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1} - E_{k,k})\right)_{2\le k\le n}\right)$ est une base orthonormale de $E_{-1}(u)$.

Par ailleurs, pour tout $M \in E_{-1}(u) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M) = 0\}$, on a $(I_n\,|\,M) = tr(M) = 0$, donc :

$$E_{-1}(u) \perp E_{n-1}(u).$$

Enfin, $\|I_n\| = \sqrt{n}$, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right)$ est une base orthonormale de $E_{n-1}(u)$ et finalement, pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1} - E_{k,k})\right)_{2\le k\le n} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right)\right) \text{ est une base orthonormée de de vecteurs propres de } u.}$$

8) Posons $B = A^\top A = AA^\top$. Comme A et $A^\top$ commutent, on a $B^k = (A^\top)^k A^k = A^k (A^\top)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en particulier $B^p = (A^\top)^p A^p = (A^\top)^p 0_n = 0_n$. Donc, B est nilpotente.

On a $(\det B)^p = \det(B^p) = \det 0_n = 0$, donc $\det B = 0$ et B n'est pas inversible. Ainsi, 0 est valeur propre de B.

Or, X^p est annulateur de B, donc le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, donc 0 est la seule valeur propre de B.

Par ailleurs, on a $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = B$, donc B est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Or, si une matrice est diagonalisable et n'admet que 0 pour valeur propre, alors elle est semblable à 0_n, donc égale à 0_n. Ainsi :

$$\boxed{B = A^\top A = AA^\top = 0_n}$$

Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque.

En utilisant le produit scalaire et la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top (AX) = X^\top A^\top AX = X^\top 0_n X = 0 .$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| = 0$, soit $AX = 0$ et donc :

$$\boxed{A = 0_n}$$

9) On a $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$.

La matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes sont orthonormées, soit :

$$\begin{cases} ab + bc + ca = \sigma = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Or, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = s^2 - 2\sigma$, donc M est orthogonale si et seulement si :

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 - 2\sigma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{M \text{ est orthogonale si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } |s| = 1.}$$

La matrice M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elle appartient à $O_3(\mathbb{R})$ et son déterminant vaut 1.

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} s & b & c \\ s & a & b \\ s & c & a \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det M = s \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = s\left[(a-b)(a-c) - (c-b)(b-c)\right] = s(s^2 - 3\sigma) .$$

Alors :

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} M \in O_3(\mathbb{R}) \\ \det M = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \\ s(s^2 - 3\sigma) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

On a donc bien :

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } s = 1.}$$

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a, avec les notations ci-dessus :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - sX^2 + \sigma X - abc .$$

Donc, pour $k \in \mathbb{R}$, si trois réels *a*, *b* et *c* sont racines de $X^3 - X^2 + k$, alors $s = 1$, $\sigma = 0$ et $k = -abc$.

Enfin, pour avoir l'équivalence souhaitée : *a*, *b* et *c* racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $s = 1$ et $\sigma = 0$ (avec $k = -abc$), il faut que le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admette trois racines réelles (distinctes ou pas).

Pour $k \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = x^3 - x^2 + k$. La fonction polynomiale *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = (3x-2)x.$$

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$f(2/3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = k - \dfrac{4}{27}$.

Alors :

- Si $f(0) = k < 0$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle inférieure à $\dfrac{2}{3}$ et une unique racine réelle supérieure à $\dfrac{2}{3}$ (assurée par le théorème de la bijection continue à appliqué à *f* sur $\left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$).
- Si $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = k - \dfrac{4}{27} > 0$, soit $k > \dfrac{4}{27}$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle positive et une unique racine réelle négative (assurée par le théorème de la bijection continue à appliqué à *f* sur $]-\infty, 0]$).
- Si $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$, alors $f(0) \geq 0$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) \leq 0$, et le théorème de la bijection continue assure l'existence de trois racines réelles (pas forcément distinctes) : l'une négative, l'autre comprise entre 0 et $\dfrac{2}{3}$, et la dernière supérieure à $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles (distinctes ou pas) si et seulement si $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$.

Finalement, trois réels *a*, *b* et *c* sont racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $k = -abc \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$, $s = 1$ et $\sigma = 0$. Avec la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement s'il existe } k = -abc \in \left[0, \frac{4}{27}\right], \text{ tel que } a, b \text{ et } c \text{ sont les racines de } X^3 - X^2 + k.}$$

10) On a $M \in S_2(\mathbb{R})$ et si $Sp(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{cases} tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 = a + c \\ \det M = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 \end{cases}$$

Alors :

$$Sp(M) \subset \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + c \geq 0 \\ ac \geq b^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M \text{ est positive si et seulement si } \begin{cases} a + c \geq 0 \\ ac \geq b^2 \end{cases}}$$

De même :

$$Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + c > 0 \\ ac > b^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M \text{ est définie positive si et seulement si } \begin{cases} a + c > 0 \\ ac > b^2 \end{cases}}$$

Chapitre 17

Dans tous les exercices de ce chapitre, on note $\mathcal{B}_c=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Les colonnes de A sont orthonormées, donc A est orthogonale. Cherchons les vecteurs invariants par u.

Soit $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in\mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v})=\vec{v}$ si et seulement si :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&6&-3\\-6&3&2\\3&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x+6y-3z=7x\\-6x+3y+2z=7y\\3x+2y+6z=7z\end{cases}\iff\begin{cases}5x-6y+3z=0\\6x+4y-2z=0\\3x+2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\z=2y\end{cases}$$

Donc, $\ker\left(u-id_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)$ est une droite et ainsi :

$$\boxed{u \text{ est une rotation d'axe } \mathrm{Vect}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right).}$$

Si α est l'angle de u, on a $1+2\cos\alpha=Tr(A)=\frac{11}{7}$, donc $\cos\alpha=\frac{2}{7}$ et $\alpha=\pm\arccos\left(\frac{2}{7}\right)\ [2\pi]$.

Le vecteur $\vec{i}$ est orthogonale à l'axe et $\vec{i}\wedge u(\vec{i})=\vec{i}\wedge\left(\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{6}{7}\vec{j}+\frac{3}{7}\vec{k}\right)=-\frac{6}{7}\vec{k}-\frac{3}{7}\vec{j}=-\frac{3}{7}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)$, donc si l'axe $\mathrm{Vect}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)$ est orienté par $\vec{j}+2\vec{k}$, on a $\alpha=-\arccos\left(\frac{2}{7}\right)\ [2\pi]$.

Finalement :

$$\boxed{u \text{ est une rotation d'axe dirigé et orienté par } \vec{j}+2\vec{k} \text{ et d'angle } -\arccos\left(\frac{2}{7}\right).}$$

2) On a $\inf\limits_{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\|AX-B\|=\inf\limits_{Y\in\mathrm{Im}\,A}\|Y-B\|$. Or, $\det A=6\neq0$, donc A est inversible et $\mathrm{Im}\,A=\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors, on a $\|AX-B\|=0$ pour $X=A^{-1}B$, donc $\inf\limits_{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\|AX-B\|=0$, atteint pour $X=A^{-1}B$.

Enfin :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B\iff\begin{cases}-2x+y-z=1\\x-y+2z=1\\-x+2y+z=1\end{cases}\iff\begin{cases}x=-\frac{7}{6}\\y=-\frac{1}{2}\\z=\frac{5}{6}\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\|AX-B\|=0,\text{ atteint pour } X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-7\\-3\\5\end{pmatrix}.}$$

3) Un vecteur normal à *P* est $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, qui dirige *D*, donc :

$$\boxed{P \perp D}$$

Notons *p* la projection orthogonale sur *P*.

Les vecteurs $\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{i}-\vec{k}$ sont orthogonaux à $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (les deux produits scalaires sont nuls), donc appartiennent à $P=\ker\left(p-id_{\mathbb{R}^3}\right)$. Et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ dirige $D=P^{\perp}=\ker\left(p+id_{\mathbb{R}^3}\right)$, donc :

$$\begin{cases} p(\vec{i}-\vec{j})=p(\vec{i})-p(\vec{j})=\vec{i}-\vec{j} \\ p(\vec{i}-\vec{k})=p(\vec{i})-p(\vec{k})=\vec{i}-\vec{k} \\ p(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=p(\vec{i})+p(\vec{j})+p(\vec{k})=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\vec{i})=\frac{1}{3}\left(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right) \\ p(\vec{j})=\frac{1}{3}\left(-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right) \\ p(\vec{k})=\frac{1}{3}\left(-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(p)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) Les colonnes de *M* sont orthonormées, donc *M* est orthogonale. De plus :

$$\det M=\frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+2C_3}{=} \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & 4 \\ -18 & 4 & -7 \end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3+4C_2}{=} \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 36 \\ -18 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Et, en développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\det M=-\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme orthogonal indirect.}}$$

Cherchons les vecteurs invariants par *f*.

Soit $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in\mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v})=\vec{v}$ si et seulement si :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y-4z=9x \\ x+8y+4z=9y \\ -4x+4y-7z=9z \end{cases} \Leftrightarrow x-y+4z=0.$$

L'ensemble des vecteurs invariants par *f* donc le plan d'équation $x-y+4z=0$, donc :

$$\boxed{f \text{ est le réflexion par rapport au plan d'équation } x-y+4z=0.}$$

On note g la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $\vec{i}+\vec{j}$.

On a $D=\mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{k}\in D^{\perp}$. Alors :

$$\begin{cases} g(\vec{u})=\vec{u} \\ g(\vec{k})=\vec{u}\wedge\vec{k}=\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}) \\ g(\vec{v})=\vec{v}\wedge\vec{k}=-\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i}+\vec{j})=g(\vec{i})+g(\vec{j})=\vec{i}+\vec{j} \\ g(\vec{k})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \\ g(\vec{i}-\vec{j})=g(\vec{i})-g(\vec{j})=-\sqrt{2}\,\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i})=\dfrac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\,\vec{k}\right) \\ g(\vec{j})=\dfrac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}\right) \\ g(\vec{k})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}-\vec{j}\right) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ est } N=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.}$$

Un vecteur normal à P est $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, donc $P=\left(\mathrm{Vect}(\vec{n})\right)^{\perp}$. Comme f et g sont des isométries $g\circ f$ en est une aussi, donc conserve l'orthogonalité et ainsi, l'image de P par $g\circ f$ est un plan de vecteur normal $g\circ f(\vec{n})=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ avec :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=NM\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 8\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, si $g\circ f(\vec{n})=\dfrac{1}{18}\left(11\vec{i}+25\vec{j}+8\sqrt{2}\,\vec{k}\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'image du plan } P: x+y+z=0 \text{ par } g\circ f \text{ est le plan } P': 11\,x+25\,y+8\sqrt{2}\,z=0.}$$

Chapitre 18

1) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de *f*. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

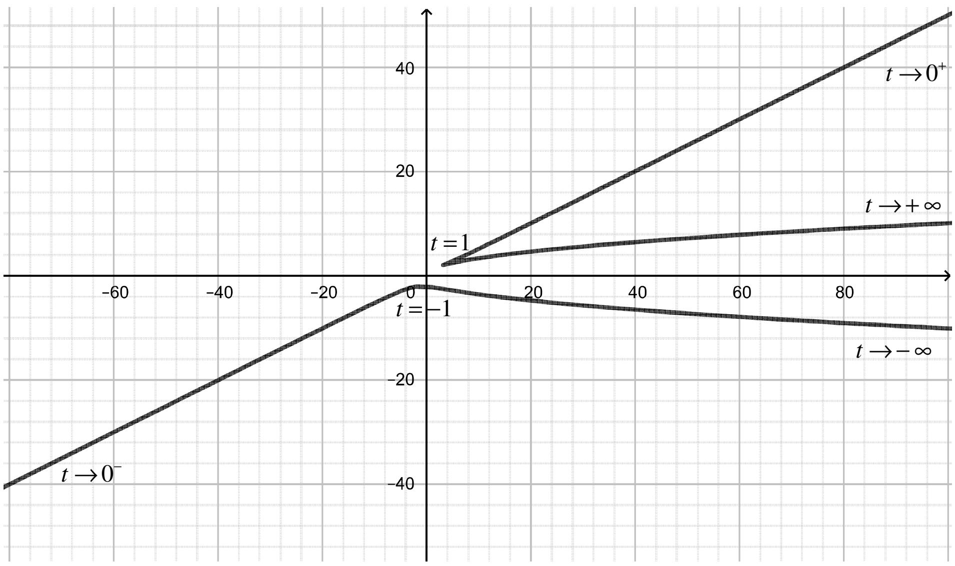
$$f':t\mapsto\begin{cases}x'(t)=2t-\dfrac{2}{t^2}=2\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2}\\[2mm] y(t)=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}\end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	-4	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$, donc $\mathscr{C}_f$ admet une direction asymptotique horizontale quand $t\to\pm\infty$.
- On a $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to0}\left[y(t)-\dfrac{1}{2}x(t)\right]=0$, donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$ en $t\to0$.
- On a $f(1+h)-f(1)=h^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-h^3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\underset{h\to0}{o}(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_f$ est un point de rebroussement de 1ère espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe :



On note $\mathscr{C}_g$ la courbe de *g*. Les fonctions *x* et *y* sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques (toute la courbe est obtenue quand *t* décrit un segment de longueur 2π), respectivement paire et impaire (la courbe est symétrique par rapport à (O*x*)) et vérifient $x(\pi-t)=-x(t)$ et $y(\pi-t)=-y(t)$ pour tout *t* (la courbe est symétrique par rapport à (O*y*)). On étudie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

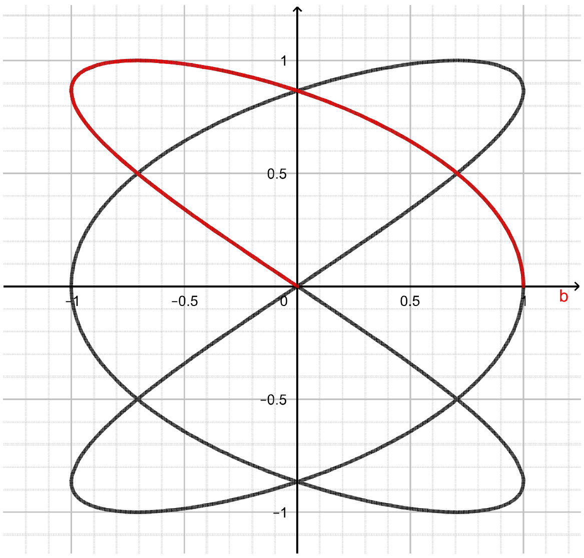
$$g':t\mapsto\begin{cases}x'(t)=-3\sin(3t)\\ y'(t)=2\cos(2t)\end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-$	0	$+$	3
x	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2

On a $f(1+h)-f(1)=h^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-h^3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\underset{h\to 0}{o}(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_g$ est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe (la partie en rouge est celle correspondant à $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) :



On note $\mathscr{C}_c$ la courbe de c. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout t, $x(t+2\pi)=2\pi a+x(t)$ et $y(t+2\pi)=y(t)$, donc la courbe entière est obtenue par translation de vecteur $(2\pi ak,0)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ de la partie obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$). De plus, les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire : la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et on peut étudier sur $[0,\pi]$.

La fonction c est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

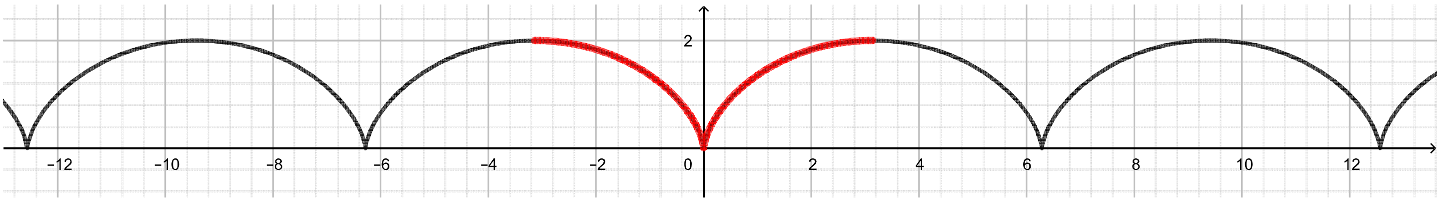
$$c':t\mapsto\begin{cases}x'(t)=a(1-\cos t)\\ y'(t)=a\sin t\end{cases}\quad c:t\mapsto\begin{cases}x(t)=a(t-\sin t)\\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	$2a$
x	0	$\nearrow$	πa
y	0	$\nearrow$	$2a$
$y'(t)$	0	$+$	0

On a $c(t)-c(0)=\frac{a}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{a}{6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\underset{t\to 0}{o}(t^3)$, et comme $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_c$ est un point de rebroussement de 1ère espèce ($p=2,\ q=3$).

On obtient la courbe pour $a=1$ (la partie en rouge est celle correspondant à $t\in[-\pi,\pi]$) :



La longueur L d'une arche de $\mathscr{C}_c$ est donnée par :

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\|c'(t)\|dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt$$
$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a$$

Donc :

$$\boxed{\text{La longueur d'une arche de } \mathscr{C}_c \text{ est } 8a.}$$

2) La fonction f est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme différence d'un quotient de telles fonctions et d'une constante. Si on pose $g(t)=\frac{\arctan t}{1+t^2}$, on a $f(x,y,z)=g(xyz)-\frac{\pi}{8}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,x)=yz\,g'(xyz)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,x)=xz\,g'(xyz)\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,x)=xy\,g'(xyz).$$

De plus, $g(1)=\frac{\arctan 1}{2}=\frac{\pi}{8}$, donc $f(1,1,1)=0$ et le point $(1,1,1)$ appartient bien à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$. Une équation du plan tangent à cette surface en $(1,1,1)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)(y-1)+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)(z-1)=0.$$

Et $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=g'(1)=\frac{1-2\arctan 1}{4}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$, donc l'équation ci-dessus équivaut à :

$$x-1+y-1+z-1=0.$$

Ainsi, une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ est :

$$\boxed{x+y+z=3}$$

3) Notons $\vec{f}$ le projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$ associé à *f*. Alors, $\vec{f}$ est le projecteur sur $\vec{P} = \mathrm{Vect}\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, parallèlement $\vec{D} = \mathrm{Vect}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ et on a :

$$\begin{cases} \vec{f}(\vec{i}) = \vec{i} \\ \vec{f}(\vec{j}) = \vec{j} \\ \vec{f}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{f}(\vec{i}) - \vec{f}(\vec{j}) + \vec{f}(\vec{k}) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{f}(\vec{i}) = \vec{i} \\ \vec{f}(\vec{j}) = \vec{j} \\ (\vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x', y', z') = f(M)$.

Comme O appartient à P, on a $\overrightarrow{OM'} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$, donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases}.$$

Soit $M'(x', y', z')$. On a :

$$\begin{aligned} M' \in \mathscr{E} = f(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \exists M(x, y, z) \in \mathscr{C}, M' = f(M) \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 = 1, y = 0, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + z^2 = 1, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + z^2 = 1, \begin{cases} x = x' + y' \\ z = y' \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x' + y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x' + y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 + 2x'y' + 2y'^2 = 1 \\ M' \in P \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ a bien pour équation } x^2 + 2y^2 + 2xy = 1 \text{ dans le plan } P \text{ rapporté au repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).}$$

4) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(y, x) = f(-y, -x).$$

Donc, si $M(x, y, z) \in S$, alors :

$$\begin{aligned} &M_1(-x, y, z) \in S \\ &M_2(x, -y, z) \in S \\ &M_3(y, x, z) \in S \\ &M_4(-y, -x, z) \in S \end{aligned}$$

Or, M_1, M_2, M_3, M_4 sont les images respectives de M par les réflexions par rapport aux plans $P_1 = (yOz)$, $P_2 = (xOz)$, P_3 d'équation $y = x$ et P_4 d'équation $y = -x$. Donc :

La surface S est invariante par les réflexions par rapport aux plans $P_1 = (yOz)$, $P_2 = (xOz)$, P_3 d'équation $y = x$ et P_4 d'équation $y = -x$.

La fonction f est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4xy^2 = 2x(1 - 2y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4x^2 y = 2y(1 - 2x^2)$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - 2y^2) = 0 \\ 2y(1 - 2x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc :

Les points critiques de f sont $(0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On a $f(0,0) = 0$ et, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$f(at, bt) = (a^2 + b^2)t^2 - 2a^2 b^2 t^4 \underset{t \to 0}{\sim} (a^2 + b^2)t^2$$

Comme $(a^2 + b^2)t^2 \geq 0$ pour tout réel t, ceci prouve que :

0 est un minimum local en $(0,0,0)$.

Remarquons que $f(0,1) = -1 < 0$, donc 0 n'est pas un minimum global.

On a $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et les points $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont les images respectives du point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ par les réflexions par rapport aux plans P_1, P_2 et P_4. Donc, f est extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si et seulement si elle l'est aussi en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y)-\frac{1}{2}=x^2+y^2-2x^2y^2-\frac{1}{2}=-2\left(x^2y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}\right)=-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}\right).$$

Donc, si $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\geq 0$ et $f(x,y)-\frac{1}{2}$ change de signe que $y^2-\frac{1}{2}$ change de signe. Ainsi, f n'est pas extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et donc pas en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Finalement :

> La fonction f admet 0 pour unique extremum local (et non global).

5) S est la surface de l'espace d'équation cartésienne $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1=0$.

La fonction f est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^3$, car polynomiale, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=4y \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z.$$

Alors, si $M(a,b,c)$ est un point de S, on a $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ (car $a^2+2b^2+c^2=1$), donc le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$ est non nul et une équation cartésienne du plan tangent T_M à S en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c)=2a(x-a)+4b(y-b)+2c(z-c)=0.$$

Soit :

$$ax+2by+cz=a^2+2b^2+c^2=1.$$

Alors :

$$A(1,1,0)\in T_M \quad\Leftrightarrow\quad a+2b=1 \quad\Leftrightarrow\quad a=1-2b.$$

Et avec $a^2+2b^2+c^2=1$, on a $c^2=1-(1-2b)^2-2b^2=4b-6b^2=2b(2-3b)$. Ceci n'est possible que si $b(2-3b)\geq 0$, soit $0\leq b\leq\frac{2}{3}$.

Ainsi :

> Les plans tangents à S passant par le point A de coordonnées $(1,1,0)$ sont les plans d'équation $ax+2by+cz=1$ avec $\begin{cases} a=1-2b \\ b\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \\ c=\pm\sqrt{2b(2-3b)} \end{cases}$.

Soit T_M un éventuel plan tangent à S en $M(a,b,c)$ contenant D. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $N(x,x,0)$ appartient à T_M, donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax+2by+cz=1$ de T_M, soit :

$$ax+2bx=(a+2b)x=1.$$

Ceci doit être vrai pour tout réel x, ce qui est impossible, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de plan tangent à } S \text{ contenant la droite } D.}$$

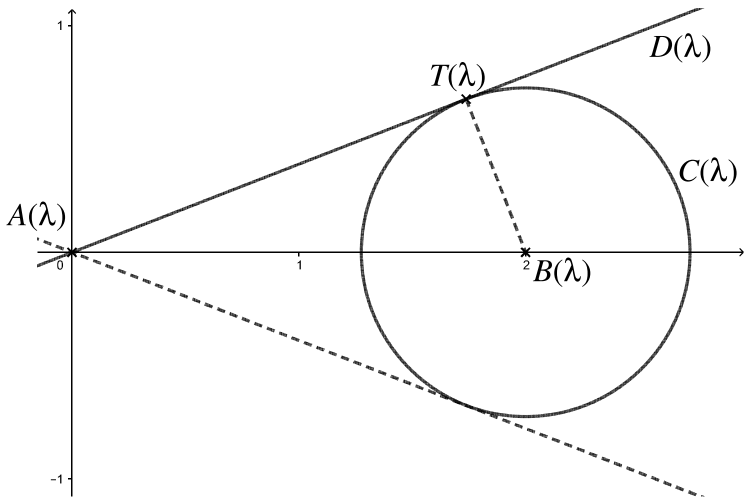
6) La surface S de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2+y^2+z^2=1$ est la sphère de centre $\Omega(2,0,0)$ et de rayon 1.

La droite $D(\lambda)$ est horizontale et passe par $A(\lambda)$, de coordonnées $(0,0,\lambda)$, si et seulement si elle est incluse dans le plan horizontal $P(\lambda)$ d'équation $z=\lambda$.

Notons $B(\lambda)$ le point de coordonnées $(2,0,\lambda)$.

L'intersection de $P(\lambda)$ et S est soit vide, quand $|\lambda|>1$, soit le point $B(\lambda)$ quand $|\lambda|=1$, soit un cercle $C(\lambda)$ de centre $B(\lambda)$ et de rayon $\sqrt{1-\lambda^2}$ quand $|\lambda|<1$.

Alors, si $|\lambda|>1$, $D(\lambda)$ n'existe pas, si $|\lambda|=1$, $D(\lambda)=\big(A(\lambda)B(\lambda)\big)$ et si $|\lambda|<1$, $D(\lambda)$ est tangente à $C(\lambda)$ en un point $T(\lambda)$ tel que sur la figure ci-dessous (en coupe dans le plan $P(\lambda)$ et il existe deux telles droites symétriques par rapport au plan (xOz).



Si $T(\lambda)$ a pour coordonnées (x,y,λ), on a :

$$\begin{cases} D(\lambda)=\big(A(\lambda)T(\lambda)\big)\perp\big(B(\lambda)T(\lambda)\big) \\ T(\lambda)\in C(\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)}\cdot\overrightarrow{B(\lambda)T(\lambda)}=0 \\ B(\lambda)T(\lambda)=\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)+y^2=0 \\ (x-2)^2+y^2=1-\lambda^2 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$(x,y,\lambda)=\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},\lambda\right)$$

Alors, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda)=\overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)}$, de coordonnées $\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},0\right)$ et passant par $A(\lambda)$. Remarquons que quand $|\lambda|=1$, on a $\lambda^2=1$, donc $\frac{3+\lambda^2}{2}=2$ et $\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}=0$, et on retrouve le cas vu plus haut.

Ainsi :

- si $|\lambda|>1$, $D(\lambda)$ n'existe pas ;
- si $|\lambda|\leq 1$, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda)\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},0\right)$ et passant par $A(\lambda)$.

D'après ce qui précède, $\Delta=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}}D(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in[-1,1]}D(\lambda)$ et, pour un point $M(x,y,z)$ de l'espace, on a :

$$\begin{aligned}
M\in\Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in[-1,1],\ M\in D(\lambda)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in[-1,1],\ \overrightarrow{A(\lambda)M} \text{ et } \vec{u}(\lambda) \text{ sont colinéaaires}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in[-1,1],\ \begin{vmatrix} x & \frac{3+\lambda^2}{2}\\ y & \pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}\end{vmatrix}=0 \text{ et } z=\lambda\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in[-1,1],\ y\frac{3+\lambda^2}{2}=\pm x\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2} \text{ et } z=\lambda\\
&\Leftrightarrow \quad z\in[-1,1],\ y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2=x^2\left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Et :

$$y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2=x^2\left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right) \quad\Leftrightarrow\quad y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2-x^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)\left(\frac{1-z^2}{2}\right)=0.$$

Et comme pour tout $z\in[-1,1]$, $\frac{3+z^2}{2}\neq 0$, ceci équivaut à :

$$y^2\left(1+\frac{1+z^2}{2}\right)-x^2\left(1-\frac{1+z^2}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2+y^2)z^2=x^2-3y^2.$$

Donc, une équation cartésienne de la réunion des droites $D(\lambda)$ quand λ décrit $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{(x^2+y^2)z^2=x^2-3y^2 \text{ avec } z\in[-1,1].}$$

7) a. $f:(x,y)\mapsto x^2+x^{19}-y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+19x^{18}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y\end{cases} \quad \text{et } H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2+(19\times 18)x^{17} & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2+19x^{18})x=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0 \text{ ou } x=-\sqrt[18]{\dfrac{2}{19}}\\ y=0\end{cases}$$

Donc, f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(-\sqrt[18]{\dfrac{2}{19}},0\right)$. Et on a :

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \text{ et } H_f\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}},0\right)=\begin{pmatrix}2-18\times 19^{\frac{1}{18}}2^{\frac{17}{18}} & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \text{ avec } 2-18\times 19^{\frac{1}{18}}2^{\frac{17}{18}}\approx -38{,}8.$$

Ainsi :

- $H_f(0,0)\notin S_2^+(\mathbb{R})$ et $-H_f(0,0)\notin S_2^+(\mathbb{R})$, donc f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$;
- $-H_f\left(-\sqrt[18]{\dfrac{2}{19}},0\right)\in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet un maximum local strict en $\left(-\sqrt[18]{\dfrac{2}{19}},0\right)$.

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0)=\lim_{x\to+\infty} x^{19}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x,0)=\lim_{x\to-\infty} x^{19}=-\infty.$$

Donc, f n'admet pas d'extremum global.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ admet un maximum local, non global, strict en } \left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}},0\right), \text{ qui vaut } f\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}},0\right)=\left(\frac{2}{19}\right)^{\frac{1}{9}}-\left(\frac{2}{19}\right)^{\frac{19}{18}}.}$$

b. $f:(x,y)\mapsto \sin(x^2+y^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée d'une fonction polynomiale de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par la fonction sinus de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\cos(x^2+y^2)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cos(x^2+y^2)\end{cases}$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2) & -4xy\sin(x^2+y^2)\\ -4xy\sin(x^2+y^2) & 2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)\end{pmatrix}.$$

Remarquons que quand $\cos(x^2+y^2)=0$, (x,y) est un point critique et :

- $f(x,y)$ est maximal, et vaut 1, quand $x^2+y^2=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$;
- $f(x,y)$ est minimal, et vaut – 1, quand $x^2+y^2=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*$.

Enfin, $(0,0)$ est le dernier point critique et $H_f(0,0)=2I_2\in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc *f* admet 0 pour minimum local (mais non global) strict en $(0,0)$.

Finalement :

f admet :

- 1 pour maximum global atteint en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$;
- – 1 pour minimum global atteint en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*$;
- 0 pour minimum local strict en $(0,0)$.