Exercices d'entrainement chapitres 6 à 10 - Enoncés

Chapitre 6

1) Donner le rang de la matrice $A=(a_{i,j})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j}=\sin(i+j)$ pour tous $i,j\in [\![1,n]\!]$.

2) Soient *f* et *g* deux endomorphismes d'un espace vectoriel *E* de dimension finie, tels que :

$$E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=\ker f+\ker g\ .$$

Montrer que ces sommes sont directes.

3) Existe-t-il une matrice *B* telle que $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$?

4) Soit *E* un espace vectoriel, *f* et *g* deux endomorphismes de *E* tel que $f\circ g=id_E$.
   a. Montrer que $\ker g\circ f=\ker f$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im} g\circ f=\operatorname{Im} g$.
   c. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans *E*.
   d. Déterminer un espace vectoriel *E* et deux endomorphismes *f* et *g* de *E* tel que $f\circ g=id_E$ et $g\circ f\neq id_E$.

5) Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, et $H=\{P\in\mathbb{R}_n[X], P'(1)=P(1)=0\}$.
   a. Justifier que *H* est un sous-espace vectoriel de *E*.
   b. Soit $P_n=X^n-nX-1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par P_2.
   c. Montrer que $E=H\oplus\mathbb{R}_1[X]$. En déduire la dimension de *H*.

6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On suppose *M*, *A* et *D* inversibles.

   Exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

7) Soient *E* un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u=\operatorname{Im} u$.
   a. Montrer que $\dim E=2p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.
   b. Montrer qu'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* est de la forme $\begin{pmatrix}0_p&I_p\\0_p&0_p\end{pmatrix}$.

Chapitre 7

1) Calculer $\Delta_n=\begin{vmatrix}1+x^2&-x&0&\cdots&0\\-x&1+x^2&-x&&\vdots\\0&-x&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&-x\\0&\cdots&0&-x&1+x^2\end{vmatrix}_n$.

2) Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}=1+\delta_{i,j}a_i$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

   Montrer que $\det A=\prod_{i=1}^n a_i+\sum_{k=1}^n\prod_{i=1,i\neq k}^n a_i$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det X \quad \Leftrightarrow \quad A = 0_n .$$

☺ *Pour le sens direct, on pourra supposer que A a une colonne non nulle,* C_j *(la* $j^{\text{ième}}$ *colonne).*

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n, b_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que les a_i sont deux à deux distincts.

Donner une relation entre L_n et L_{n+1} les polynômes interpolateurs de Lagrange associé aux scalaires a_i et b_i pour $1 \le i \le n$ et $1 \le i \le n+1$ respectivement.

5) Donner les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2a & b & c & d \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$.

6) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Chapitre 8

1) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \neq 0$.

A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

3) On veut résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.

Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1,0,1\}$.

Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants. Montrer que 0 est valeur propre de M.

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, solutions de $M^2 = A$.

4) Soit A de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_6$ et $tr(A) = 8$.

Justifier que A est diagonalisable.

Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

Donner une matrice D diagonale, semblable à A.

Donner tous les polynômes annulateurs de A.

5) Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

6) Montrer que l'application f donnée par $f(P) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Donner son noyau et son image. Déterminer ses valeurs propres.

7) A quelle condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a,b,c,d,e,f la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

8) On note $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\phi(M)=MP$.

Donner, si possible sans calcul, la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis son noyau et son image. Le diagonaliser, toujours sans calcul.

9) Montrer que *f*, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M)=M+2M^{\mathsf{T}}$ est un endomorphisme.

Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Chapitre 9

1) Dans chacun des cas suivants, montrer que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}_n[X]$; $t\mapsto P(tX)$ où *P* est un polynôme fixé de $\mathbb{K}_n[X]$.

   b. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B$ où *A* est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et *B* est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   c. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B(t)$ où *A* et *B* sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$; $t\mapsto Tr\left(A(t)\right)$ où *A* est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

☺ *Utiliser les applications composantes de f suivant la base canonique de l'espace considéré.*

2) Etudier la dérivabilité de la fonction *F*, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x)=\int_0^x \ln(1+xt)\,dt$. ☺ *Poser* $u=xt$.

3) Donner le développement en série entière de la fonction *sh*.

   Trouver une solution développable en série entière de $tx''+2x'-tx=0$, puis une autre solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Résoudre (E): $x(x^2-1)y'+2y=x^2$ sur des intervalles où les solutions existent.

   Existe-t-il une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E) ?

5) Résoudre $xy'-(1+\lambda)y=0$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

   En déduire les éléments propres de $\phi\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}[X]\right)$, défini par $\phi(P)=XP'-P$.

6) Développer $\sin(x-t)$, puis montrer que si *g* est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $f:x\mapsto\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

   Montrer que *f* est solution de $y''+y=g$, puis résoudre cette équation différentielle pour $g(t)=e^t$.

7) Résoudre (S): $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=2y(t) \\ z'(t)=2x(t)-3y(t)+4z(t) \end{cases}$.

8) Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie et $f:\mathbb{R}\to E$ dérivable en 0 et telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=2f(x)$. Montrer que *f* est linéaire.

9) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

a. $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\sin^2 y}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b. $g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

10) Déterminer les extrema de $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$.

11) Montrer que $f:(x,y)\mapsto x^2y+\ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A=[-1,1]^2$.

Montrer que *f* possède un point critique sur $B=]-1,1[^2$.

La valeur $f(0,0)$ est-elle un extremum de f ? ☺ *On pourra calculer* $f(x,x^3)$.

Trouver le minimum et le maximum de *f* sur *A*.

12) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

en effectuant le changement de variables $\varphi(x,y)=(x,x^2+y)$.

Chapitre 10

1) Pour quels réels *a* et *b*, l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt$ converge-t-elle ?

En cas de convergence, calculer *I*.

2) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty}\left(1-t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$, puis la calculer à l'aide du calcul de $\int_0^x t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

3) Nature selon $a\in\mathbb{R}$ de $\int_0^{+\infty}x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$.

4) Montrer que $f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Déterminer ses limites en 0 et $+\infty$. La fonction *f* est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

5) Déterminer l'ensemble de définition *D* de $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}dt$. Calculer $F(1)$ (*on pourra poser* $u=\frac{1}{t}$) et en déduire $F(x)$.

Exercices d'entrainement chapitres 6 à 10 - Corrigés

Chapitre 6

1) Si $n=1$, $A=(\sin 1)$ et $rg(A)=1$. On suppose maintenant que $n\geq 2$.

Pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,j}=\sin(i+j)=\sin i\cos j+\cos i\sin j$.

Si on note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A, on a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$C_j=(\cos j)X+(\sin j)Y \text{ avec } X=\begin{pmatrix}\sin 1\\ \sin 2\\ \vdots\\ \sin n\end{pmatrix} \text{ et } Y=\begin{pmatrix}\cos 1\\ \cos 2\\ \vdots\\ \cos n\end{pmatrix}.$$

Donc, $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n)\subset\operatorname{Vect}(X,Y)$ et $rg(A)\leq 2$.

De plus, $C_1=\begin{pmatrix}\sin 2\\ \sin 3\\ \vdots\\ \sin(n+1)\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}\sin 3\\ \sin 4\\ \vdots\\ \sin(n+2)\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}\sin 2 & \sin 3\\ \sin 3 & \sin 4\end{vmatrix}=\sin 2\sin 4-\sin^2 3\approx -0{,}71\neq 0$, donc C_1 et C_2 sont non colinéaires, donc $rg(A)\geq 2$ et finalement, $rg(A)=2$.

Ainsi :

$$\boxed{rg(A)=\begin{cases}1 \text{ quand } n=1\\ 2 \text{ quand } n\geq 2\end{cases}}$$

2) On a $E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=\ker f+\ker g$.

Comme E est de dimension finie, on peut utiliser la formule de Grassmann, qui donne :

$$\dim E=rg(f)+rg(g)-\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g) \qquad (1)$$
$$\dim E=\dim(\ker f)+\dim(\ker g)-\dim(\ker f\cap\ker g) \qquad (2)$$

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$2\dim E=rg(f)+rg(g)+\dim(\ker f)+\dim(\ker g)-\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g)-\dim(\ker f\cap\ker g)$$

Or, le théorème du rang donne aussi :

$$\dim E=rg(f)+\dim(\ker f)=rg(g)+\dim(\ker g).$$

Donc, $2\dim E=2\dim E-\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g)-\dim(\ker f\cap\ker g)$, soit :

$$\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g)+\dim(\ker f\cap\ker g)=0.$$

Enfin, comme $\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g)$ et $\dim(\ker f\cap\ker g)$ sont des entiers positifs, la relation ci-dessus donne :

$$\dim(\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g)=\dim(\ker f\cap\ker g)=0.$$

Alors, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \ker f \cap \ker g = \{0\}$ et donc :

$$\boxed{E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g = \ker f \oplus \ker g}$$

3) Supposons qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $B^4 = (B^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^8 = (B^4)^2 = 0_3$.

Or, $\operatorname{Im} B^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset \operatorname{Im} B$, donc $rg\,(B^2) = 2 \leq rg\,(B)$ et comme B est nilpotente, elle n'est pas inversible donc $rg\,(B) \leq 2$, finalement $rg\,(B) = rg\,(B^2) = 2$ et donc $\operatorname{Im} B^2 = \operatorname{Im} B$.

Alors, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à B, on a $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{Im} B^{k+1} = \operatorname{Im} u^{k+1} = u^{k+1}(\mathbb{R}^3) = u^{k-1}\left(u^2(\mathbb{R}^3)\right) = u^{k-1}\left(\operatorname{Im} u^2\right) = u^{k-1}\left(\operatorname{Im} u\right) = u^k(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} B^k.$$

La suite $\left(\operatorname{Im} B^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc constante, soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} B^k = \operatorname{Im} B$.

En particulier, $\operatorname{Im} B^8 = \operatorname{Im} B$. Ceci est absurde car $B^8 = 0_3$ et $B \neq 0_3$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } B \text{ telle que } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4) a. On a toujours $\ker f \subset \ker g \circ f$.

Soit $x \in \ker g \circ f$. On a $g \circ f(x) = 0$ et comme $f \circ g = id_E$:

$$f(x) = (f \circ g)\left(f(x)\right) = (f \circ g \circ f)(x) = f\left((g \circ f)(x)\right) = f(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker f$ et ainsi, $\ker g \circ f \subset \ker f$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\ker g \circ f = \ker f}$$

b. On a toujours $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Soit $x \in \operatorname{Im} g$. Il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$ et comme $f \circ g = id_E$:

$$x = g\left((f \circ g)(z)\right) = (g \circ f \circ g)(z) = (g \circ f)\left(g(z)\right).$$

Donc $x \in \operatorname{Im} g \circ f$ et ainsi, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} g \circ f$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g}$$

c. On veut $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

Procédons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.

Analyse : Supposons qu'il existe $(x_1, z) \in \ker f \times E$ tel que $x = x_1 + g(z)$.

Alors, avec $f\left(g(z)\right) = (f \circ g)(z) = z$ $f(x_1) = 0$, on a :

$$f(x) = f(x_1) + f\left(g(z)\right) = z$$
$$x_1 = x - g(z) = x - (g \circ f)(x)$$

Ainsi, si x se décompose dans $\ker f + \operatorname{Im} g$, la décomposition est unique est la somme est directe.

Synthèse : Posons $z = f(x)$ et $x_1 = x - (g \circ f)(x)$. On a :

$$x_1 + g(z) = x_1 = x - (g \circ f)(x) + g\left(f(x)\right) = x.$$

Et $f(x_1) = f(x) - f\left((g \circ f)(x)\right) = f(x) - (f \circ g)\left(f(x)\right) = f(x) - f(x) = 0$, donc $x_1 \in \ker f$ et, comme bien entendu $g(z) \in \operatorname{Im} g$, on a $x \in \ker f + \operatorname{Im} g = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g}$$

d. Il est clair que si E est de dimension finie, alors $f \circ g = id_E$, implique que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre et donc $g \circ f = id_E$.

Pour tout trouver l'exemple demandé, il faut donc se placer en dimension infinie.

Prenons $E = C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$, $f : \varphi \mapsto \varphi'$ et $g : \varphi \mapsto \Phi$ où Φ est la primitive de φ qui s'annule en 0.

Les applications f et g sont des endomorphismes de E et pour tout $\varphi \in E$:

- $(f \circ g)(\varphi) = \Phi' = \varphi$ donc $\underline{f \circ g = id_E}$;
- $(g \circ f)(\varphi) = g(\varphi') = \Psi$ où Ψ s'annule en 0, alors que φ ne s'annule pas forcément en 0, donc $\underline{g \circ f \neq id_E}$.

5) a. On a :

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(1) = P(1) = 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], (X-1)^2 \mid P\right\} = \left\{(X-1)^2 Q,\ Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\right\}$$
$$= \left\{(X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k,\ \left(a_0, \ldots, a_{n-2}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} = \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \ldots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$$

Donc :

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Remarque : La famille $\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \ldots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$ est échelonnée en degrés donc libre donc, avec cette méthode, on a immédiatement $\dim H = n-1$.

b. $P_n = X^n - nX - 1$ et $P_2 = X^2 - 2X - 1$.

Comme $\deg P_2 = 2$, le reste R de la division euclidienne de P_n par P_2 est de degré au plus 1, donc $R = aX + b$ avec a et b réels. Si Q est le quotient, on a :

$$P_n = X^n - nX - 1 = (X^2 - 2X - 1)Q + aX + b.$$

Les racines de $P_2 = X^2 - 2X - 1 = (X-1)^2 - 2$ sont $1 \pm \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{cases} P_n(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 = a(1-\sqrt{2}) + b \\ P_n(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) - 1 = a(1+\sqrt{2}) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) + n(1-\sqrt{2}) = a(1+\sqrt{2}) - a(1-\sqrt{2}) \\ b = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 - a(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \\ b = (1-\sqrt{2})^n - \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) - 1 \\ \quad = \dfrac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$$

Donc, le reste de la division euclidienne de P_n par P_2 est :

$$\boxed{R = \left(\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \right) X + \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1}$$

c. On a vu que $H = \text{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2}\big)$ avec $\deg\big((X-1)^2 X^k\big) = k+2$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. Alors, la famille $\big(1, X, (X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2}\big)$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$), donc c'est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Et comme $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$, on a :

$$\boxed{E = H \oplus \mathbb{R}_1[X]}$$

On a alors immédiatement $\dim E = n+1 = \dim H + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim H + 2$, donc :

$$\boxed{\dim H = n-1}$$

6) On a $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{K})$ avec $A, D \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ (comme M est inversible, M^{-1}, donc A', B', C', D' existent). On a alors :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix} = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AA'+BC' = I_n \\ AB'+BD' = 0_n \\ CA'+DC' = 0_n \\ CB'+DD' = I_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ B' = -A^{-1}BD' \\ C' = -D^{-1}CA' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n \end{cases}$$

Ceci implique que $A-BD^{-1}C$ et $D-CA^{-1}B$ sont inversibles, et :

$$\begin{cases} A' = (A-BD^{-1}C)^{-1} \\ B' = -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ C' = -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} \\ D' = (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}}$$

7) a. Posons $\dim\ker u = \dim \operatorname{Im} u = p$. D'après le théorème du rang, $\dim\ker u + \dim\operatorname{Im} u = \dim E$, donc :

$$\boxed{\dim E = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*}$$

(p est non nul car $\dim E$ est non nulle).

b. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker u = \operatorname{Im} u$.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \operatorname{Im} u$, donc il existe $e_{p+k} \in E$ tel que $e_k = u(e_{p+k})$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbb{K}^{2p}$ tel que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_{2p} e_{2p} = 0.$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \ker u$, donc $u(e_k) = 0$ et, en appliquant u à la relation ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_p u(e_p) + \lambda_{p+1} u(e_{p+1}) + \dots + \lambda_{2p} u(e_{2p}) = \lambda_{p+1} e_1 + \dots + \lambda_{2p} e_p = 0.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{2p} = 0$. La relation initiale se récrit alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ et, toujours par liberté de $(e_1, \dots, e_p)$, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Finalement, tous les λ_k sont nuls, donc $\mathcal{B}$ est libre et comme elle contient $2p = \dim E$ vecteurs, c'est une base de E.

Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u(e_k) = 0$ et $u(e_{p+k}) = e_k$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}}$$

Chapitre 7

1) En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} + x\begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Puis en redéveloppant le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+2} = (1+x^2)\Delta_{n+1} - x^2\Delta_n \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} = x^2(\Delta_{n+1} - \Delta_n).$$

La suite $\left(\Delta_{n+1} - \Delta_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison x^2 et

On a $\Delta_2 - \Delta_1 = (1+x^2+x^4) - (1+x^2) = x^4$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = (x^2)^{n-1}(\Delta_2 - \Delta_1) = x^{2(n+1)}.$$

Et pour $n \geq 2$:

$$\Delta_n - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\Delta_{k+1} - \Delta_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} x^{2(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} x^{2k} \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_n = \Delta_1 + \sum_{k=2}^{n} x^{2k}.$$

Soit avec $\Delta_1 = 1 + x^2 = \sum_{k=0}^{1} x^{2k}$:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}}$$

2) Si on note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_j = U + a_jE_j$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, avec $U = E_1 + \dots + E_n$ (vecteur colonne qui ne contient que des 1). Alors :

$$\begin{aligned}
\det A &= \det\left(C_1,\dots,C_n\right) = \det\left(U + a_1E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \det\left(U, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) + \det\left(a_1E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \det\left(U, a_2E_2,\dots, a_nE_n\right) + \det\left(a_1E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2\dots a_n \det\left(U, E_2,\dots, E_n\right) + a_1\det\left(E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2\dots a_n \det\left(U - E_2 \dots - E_n, E_2,\dots, E_n\right) + a_1\det\left(E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2\dots a_n \det\left(E_1, E_2,\dots, E_n\right) + a_1\det\left(E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + a_1\det\left(E_1, U + a_2E_2,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + a_1\det\left(E_1, U, U + a_3E_3,\dots, U + a_nE_n\right) + a_1\det\left(E_1, a_2E_2, U + a_3E_3,\dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} a_i + a_1a_2\det\left(E_1, E_2, U + a_3E_3,\dots, U + a_nE_n\right)
\end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient :

$$\det A = \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, U + a_n E_n\right)$$

$$= \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, U\right) + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, a_n E_n\right)$$

$$= \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq n}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Et ainsi :

$$\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1,i\neq k}^{n} a_i}$$

3) Le sens réciproque est immédiat.

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det X$.

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et supposons aussi que A est non nulle, donc qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_j \neq 0$. On peut alors compléter $-C_j$ en une base $\left(U_1, \ldots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \ldots, U_n\right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons X la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \ldots, U_n$.

On a alors $X \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $\det X \neq 0$ et la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A+X$ est $C_j - C_j = 0$, donc $\det(A+X) = 0$. Ainsi, $\det(A+X) \neq \det X$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, toutes les colonnes de A sont nulles, donc A est nulle.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det X \iff A = 0_n}$$

4) On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2a & -b & -c & -d \\ -b & X & 0 & 0 \\ -c & 0 & X & 0 \\ -d & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X-2a & -b & -c \\ -b & X & 0 \\ -c & 0 & X \end{vmatrix} = X^2\left(X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2\right).$$

Et $X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2 = (X-a-s)(X-a+s)$ avec $s = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Ainsi :

$$\chi_A = X^2 (X-a-s)(X-a+s).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0, $a+s$ et $a-s$. Reste à voir si elles sont distinctes.

Comme $\left(a,b,c,d\right) \neq \left(0,0,0,0\right)$, on a $s > 0$, donc $a+s \neq a-s$.

Si $a-s=0$, alors $a^2 = s^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, donc $b^2+c^2+d^2=0$, soit $b=c=d=0$ (donc $a \neq 0$) et $s = |a|$. Enfin, comme $a = s$, on $a > 0$. Réciproquement, si $b=c=d=0$ et $a>0$, alors $a-s=0$, et $a+s=2a$.

De même, $a+s=0$ si et seulement si $b=c=d=0$ et $a<0$, et $a-s=2a$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } b=c=d=0 \text{ et } a\neq 0,\ \text{alors } Sp(A)=\{0,2a\},\ \text{sinon } Sp(A)=\{0,a-s,a+s\} \text{ avec } s=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.}$$

5) On a $\chi_A = \det\left(X I_n - A\right)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det\left(xI_n - A^{-1}\right) = \det\left(xA^{-1}\left(A - \frac{1}{x} I_n\right)\right) = x^n \det A^{-1} \det\left(A - \frac{1}{x} I_n\right) = \frac{(-x)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$\boxed{\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)}$$

Chapitre 8

1) Remarquons que :

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac&ad\\ab&b^2&bc&bd\\ac&bc&c^2&cd\\ad&bd&cd&d^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

Comme $a\neq 0$, $\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2$ est une valeur propre non nulle de A. La dimension du sous-espace propre E_λ associé est de dimension au moins 1.

Si on note C_1,C_2,C_3,C_4 les colonnes de A et $C=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$, on a $C\neq 0$ et $C_1=aC, C_2=bC, C_3=cC, C_4=dC$ donc $\operatorname{Im}A=\operatorname{Vect}(C)$ et $rg(A)=1$, donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre $E_0=\ker A$ associé est de dimension 3.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus 4, on a :

$$Sp(A)=\{0,\lambda\},\ \dim E_0=3 \text{ et } \dim E_\lambda=1 \text{ avec } E_\lambda=\operatorname{Vect}(C).$$

On a $\dim E_0+\dim E_\lambda=4=\dim\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

Enfin, si (E_1,E_2,E_3,E_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases}AE_1=C_1=aC\\AE_2=C_2=bC\\AE_3=C_3=cC\\AE_4=C_4=dC\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}A(aE_2-bE_1)=0\\A(aE_3-cE_1)=0\\A(aE_4-dE_1)=0\end{cases}$$

Comme $a\neq 0$, la famille $(aE_2-bE_1, aE_3-cE_1, aE_4-dE_1)$ est une famille libre de trois vecteurs de $E_0=\ker A$, qui est de dimension 3. C'en est donc une base et ainsi, avec $\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2$:

$$\boxed{Sp(A)=\{0,\lambda\},\ E_0=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-b\\a\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-c\\0\\a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-d\\0\\0\\a\end{pmatrix}\right),\ E_\lambda=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right)\text{ et } A \text{ est diagonalisable.}}$$

2) En développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X-2&0&-2\\a&X-1&0\\-1&-1&X\end{vmatrix}=(X-2)\begin{vmatrix}X-1&0\\-1&X\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a&X-1\\-1&-1\end{vmatrix}$$
$$=(X-2)(X-1)X-2\left(X-1-a\right)=X^3-3X^2+2(a+1)$$

On pose $f(x)=x^3-3x^2+2(a+1)$. Après une étude rapide de f, on obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2(a+1)$	$\searrow$	$2(a-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Alors, avec le théorème de la bijection continue, on peut conclure que :

- si $2(a+1)<0$ ou $2(a-1)>0$, soit $a<-1$ ou $a>1$, f admet une unique racine réelle (simple) et deux racines complexes conjuguées (distinctes) ;
- si $2(a+1)=0$ ou $2(a-1)=0$, soit $a=-1$ ou 1, f admet et deux racines réelles, dont une double (2 quand $a=1$, 0 quand $a=-1$) ;
- si $2(a-1)<0<2(a+1)$, soit $-1<a<1$, f admet deux racines réelles distinctes.

Dans le premier cas, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$; dans le troisième cas, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Quand $a=-1$, $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ donne $x+y=x+z=0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite : A n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

Quand $a=1$, $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donne $x+y=z=0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est une droite : A n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

Finalement :

- Si $a<-1$ ou $a>1$, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$.
- Si $a=-1$ ou 1, A n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.
- Si $-1<a<1$, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (et donc dans $\mathbb{C}$).

3) En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&0&-1\\-2&X-1&0\\0&0&X-1\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}X&0\\-2&X-1\end{vmatrix}=X(X-1)^2.$$

Alors, $Sp(A)=\{0,1\}$ et on trouve $E_0=\ker A=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right)$ et $E_1=\ker(A-I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas 3, A n'est pas diagonalisable.

La famille $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on a :

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=0\qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de f, l'endomorphisme canoniquement associé à A est $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Ainsi :

A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, semblable à $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Si $\lambda \in Sp(M)$ et X est un vecteur propre associé, alors $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2X = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$. Ainsi, $\lambda^2 \in Sp(A) = \{0,1\}$, donc $\lambda^2 = 0$ ou 1, soit $\lambda = -1$ ou 0 ou 1. Donc :

$$\boxed{Sp(M) \subset \{-1,0,1\}}$$

Remarquons déjà que si M est diagonalisable, alors son carré, A, l'est aussi, ce qui est absurde. Donc, M n'est pas diagonalisable. Ainsi, on ne peut avoir $Sp(M) = \{-1,0,1\}$ (car M est 3×3).

Si $Sp(M)$ contient deux valeurs, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1 (sinon M serait diagonalisable) et si $Sp(M)$ ne contient qu'une seule valeur, alors le sous-espace propre associé est de dimension au plus 2 (sinon M serait diagonalisable, donc scalaire).

Les sous-espaces propres sont de dimension 1 si M possède 2 vap et au plus 2 si M possède une seule vap.

Si 0 n'est pas valeur propre de M, alors M est inversible et son carré aussi. Comme $M^2 = A$ n'est pas inversible, M ne l'est pas non plus, et donc :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M.}$$

On a finalement pour l'instant trois cas : $Sp(M) = \{-1,0\}$ ou $\{0,1\}$ ou $\{0\}$.

Remarquons qu'il s'agit du spectre réel au complexe, donc si $Sp(M) = \{0\}$, on a $\chi_M = X^3$, donc $M^3 = 0_3$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi, M est nilpotente, donc $M^2 = A$ aussi et 0 est la seule valeur propre de A. Ceci est absurde, donc $Sp(M) \neq \{0\}$.

Ainsi, $Sp(M) = \{-1,0\}$ ou $\{0,1\}$.

Remarquons encore que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est solution du problème si et seulement si $-M$ l'est. Or :

$$Sp(M) = \{-1,0\} \quad \Leftrightarrow \quad Sp(-M) = \{0,1\}.$$

Donc, il suffit de déterminer les solutions M telles que $Sp(M) = \{0,1\}$.

D'après ce qui précède, on a alors : $\dim\ker M = \dim\ker(M - I_3) = 1$.

Or, si $X \in \ker(M - \lambda I_3)$, on a $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2X = \lambda^2 X = \lambda X$ (car $\lambda = 0$ ou 1, donc $\lambda^2 = \lambda$) et ainsi, $X \in \ker(A - \lambda I_3)$. Comme on a vu que $\dim\ker A = \dim\ker(A - I_3) = 1$, on a :

$$\ker M = \ker A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(M - I_3) = \ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

En reprenant ce que l'on a vu plus haut on a $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à M, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (avec les sous-espaces propres de M vus ci-dessus).

Comme $f = u^2$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 1 & b+bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 1 \\ b(1+c) = 2 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 .$$

(La troisième équation du système donne $c = \pm 1$, mais $c = -1$ est impossible du fait de la deuxième équation.)

Ainsi, $M_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$M = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ telles que } M^2 = A \text{ sont } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

4) Le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. Comme il est scindé à racines simples :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et } Sp(A) \subset \{0,1,2\}.}$$

Or, A est inversible donc $0 \notin Sp(A)$ et $Sp(A) \subset \{1,2\}$.

Si on note n_1 et n_2 les multiplicités de 1 et 2 respectivement dans le polynôme caractéristique de A (égales ici aux dimensions des sous-espaces propres correspondants), on a :

$$\begin{cases} tr(A) = n_1 + 2n_2 = 8 \\ n_1 + n_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, A est semblable à $D = diag(1,1,1,1,2,2)$.

Réciproquement, toute matrice semblable à cette matrice diagonale D vérifie les hypothèses, donc les matrices $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_6$ et $tr(A) = 8$ sont les matrices :

$$\boxed{A = P^{-1}DP \text{ avec } D = diag(1,1,1,1,2,2) \text{ et } P \in GL_6(\mathbb{R}).}$$

On a vu que $A(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$. Comme A est inversible, on a plus simplement $(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$ et donc $(X-1)(X-2)$ est annulateur de A.

Soit R un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A (1 et 2) sont racines de R donc $R = (X-1)(X-2)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Réciproquement, si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(A - I_6)(A - 2I_6)Q(A) = 0_6 Q(A) = 0_6$, donc $(X-1)(X-2)Q$ est annulateur de A.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les polynômes annulateurs de } A \text{ sont les polynômes de la forme } (X-1)(X-2)Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X].}$$

5) On a $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Notons C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de A et $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$, identifié à $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Les première et dernière colonnes de A étant identiques, on a :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5, e_2, e_3, e_4) = \operatorname{Vect}(e_1+e_5, e_2, e_3, e_4).$$

Comme la famille (e_1+e_5, e_2, e_3, e_4) est libre, on a $rg(A)=4$. Alors, $\dim\ker A = 1$ d'après le théorème du rang.

Comme $\dim\ker A = 1$, 0 est valeur propre de A, de multiplicité 1. On a $Ae_1 = C_1 = C_5 = Ae_5$, donc $A(e_1-e_5)=0$ et ainsi, $\ker A = \operatorname{Vect}(e_1-e_5)$.

De plus, pour tout $j \in [\![2,4]\!]$, $Ae_j = C_j = e_j$, donc 1 est valeur propre de A, de multiplicité au moins 3.

Comme on a 4 racines réelles de χ_A (comptées avec multiplicité) qui est de degré 5, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et si λ est la cinquième racine réelle de χ_A, on a :

$$tr(A) = 5 = 0+1+1+1+\lambda.$$

Donc, $\lambda = 2$ et :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-x+u=0\\x-y+u=0\\x-z+u=0\\x-t+u=0\\x-u=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=z=t=2x\\u=x\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Finalement, si $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^5$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} rg(A)=4\\ \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(e_1+e_5, e_2, e_3, e_4)\\ \ker A = \operatorname{Vect}(e_1-e_5)\\ Sp(A)=\{0,1,2\}\\ \ker(A-I_5) = \operatorname{Vect}(e_2, e_3, e_4)\\ \ker(A-2I_5) = \operatorname{Vect}(e_1+2e_2+2e_3+2e_4+e_5)\end{array}}$$

6) Il est clair que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $f(P) = P(1)X - P(3)(25-X^2) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, les applications évaluations $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(3)$ sont linéaires, donc f est linéaire et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)X + P(3)(X^2-25) \in \operatorname{Vect}(X, X^2-25)$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X, X^2-25)$. Or :

$$f\left(\frac{1}{2}(3-X)\right) = X \qquad f\left(\frac{1}{2}(X-1)\right) = X^2-25.$$

Donc, $\mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right) \subset \mathrm{Im}\, f$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right)}$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme la famille $\left(X, X^2-25\right)$ est libre (échelonnée en degrés), on a :

$$f(P) = P(1)X + P(3)\left(X^2-25\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(1) = P(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-1)(X-3) \mid P.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker f = \left\{(X-1)(X-3)Q \setminus Q \in \mathbb{R}[X]\right\}}$$

D'après ce qui précède, 0 est valeur propre de *f*.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une éventuelle valeur propre non nulle de *f* et *P* un vecteur propre associé.

On a $f(P) = \lambda P$, donc $P = \dfrac{1}{\lambda} f(P) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right)$, soit :

$$P = aX + b(X^2-25).$$

Alors, $P(1) = a - 24b$ et $P(3) = 3a - 16b$, et :

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P \quad &\Leftrightarrow \quad (a-24b)X + (3a-16b)\left(X^2-25\right) = \lambda a X + \lambda b\left(X^2-25\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 24b = \lambda a \\ 3a - 16b = \lambda b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme *P* est non nul, $(a,b) \neq (0,0)$, donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, soit :

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+16) - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 15\lambda + 56 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -8 \text{ ou } -7.$$

On a alors :

$$f(P) = -8P \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 8b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{a}{8}\left[8X + 3(X^2-25)\right]$$

$$f(P) = -7P \quad \Leftrightarrow \quad a - 3b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{a}{3}\left[3X + (X^2-25)\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} Sp(f) = \left\{-8, -7, 0\right\} \\ \ker\left(f + 8id\right) = \mathrm{Vect}\left(8X + 3(X^2-25)\right) \\ \ker\left(f + 7id\right) = \mathrm{Vect}\left(3X + (X^2-25)\right) \\ \ker f = \left\{(X-1)(X-3)Q \setminus Q \in \mathbb{R}[X]\right\} \end{array}}$$

7) Comme *A* est triangulaire supérieure, on a immédiatement $Sp(A) = \left\{a, g\right\}$.

Si $a = g$, alors *A* est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_4, donc égale à aI_4 et donc si et seulement si $b = c = d = e = f = h = 0$.

Si $a \neq g$, alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker\left(A-aI_4\right)=\dim\ker\left(A-gI_4\right)=2$, soit :

$$rg\left(A-aI_4\right)=rg\left(A-gI_4\right)=2.$$

On a $A-aI_4=\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g-a & h \\ 0 & 0 & 0 & g-a \end{pmatrix}$ et, comme $g-a\neq 0$, les vecteurs $\begin{pmatrix} c \\ e \\ g-a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d \\ f \\ h \\ g-a \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

Alors, $rg\left(A-aI_4\right)=2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} c \\ e \\ g-a \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} d \\ f \\ h \\ g-a \end{pmatrix}\right)$, soit $b=0$.

De même (en raisonnant sur les lignes de $A-gI_4$), $rg\left(A-gI_4\right)=2$ si et seulement si $h=0$.

Finalement :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable si et seulement si } \begin{cases} a=g \\ b=c=d=e=f=h=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a\neq g \\ b=h=0 \end{cases}.}$$

8) On note $\mathcal{B}_c=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a immédiatement :

$$\boxed{\operatorname{Im}\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}+E_{1,2},E_{2,1}+E_{2,2}\right)}$$

Avec le théorème du rang, on obtient $\dim\ker\phi=2$. Comme $\phi(E_{1,1})=\phi(E_{1,2})$ et $\phi(E_{2,1})=\phi(E_{2,2})$, on obtient :

$$\boxed{\ker\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}-E_{1,2},E_{2,1}-E_{2,2}\right)}$$

On a déjà $0\in Sp(\phi)$ avec $\dim\ker\phi=2$.

De plus, $\phi(E_{1,1})=\phi(E_{1,2})=E_{1,1}+E_{1,2}$ et $\phi(E_{2,1})=\phi(E_{2,2})=E_{2,1}+E_{2,2}$, donc :

$$\phi(E_{1,1}+E_{1,2})=2(E_{1,1}+E_{1,2}) \text{ et } \phi(E_{2,1}+E_{2,2})=2(E_{2,1}+E_{2,2}).$$

Donc, $2\in Sp(\phi)$ avec $\dim\ker\left(\phi-2id\right)=2$.

Comme $\dim\ker\phi=\dim\ker\left(\phi-2id\right)=4=\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\phi \text{ est diagonalisable avec } Sp(\phi)=\{0,2\} \text{ et } \begin{cases} \ker\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}-E_{1,2},E_{2,1}-E_{2,2}\right) \\ \ker\left(\phi-2id\right)=\text{Vect}\left(E_{1,1}+E_{1,2},E_{2,1}+E_{2,2}\right) \end{cases}}$$

9) La linéarité de la transposition assure que $f : M \mapsto M + 2M^{\mathsf{T}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une éventuelle valeur propre de *f* et *M* un vecteur propre associé. On a $f(M) = M + 2M^{\mathsf{T}} = \lambda M$, donc :

$$M^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}(\lambda - 1)M \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{2}(\lambda - 1)M^{\mathsf{T}} \quad \text{(en transposant).}$$

Donc, $M = \frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 M$ et comme $M \neq 0$, on obtient $\frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 = 1$, soit :

$$\lambda = -1 \text{ ou } 3\,.$$

Les potentielles valeurs propres de *f* sont donc – 1 et 3.

Pour $\lambda = -1$, on obtient $M^{\mathsf{T}} = -M$, donc le sous-espace propre associé à – 1 est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrice antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient $M^{\mathsf{T}} = M$, donc le sous-espace propre associé à – 1 est $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrice symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\boxed{Sp(f) = \{-1, 3\}}$$

Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

On a $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} tr(f) = -\dfrac{n(n-1)}{2} + 3\dfrac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \\ \det f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}}$$

Chapitre 9

1) a. Posons $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. On a alors $f:t\mapsto\sum_{k=0}^{n}a_kt^kX^k$ et comme toutes les applications polynomiales $t\mapsto a_kt^k$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f':t\mapsto\sum_{k=1}^{n}ka_kt^{k-1}X^k=X\sum_{k=1}^{n}ka_k(tX)^{k-1}=X\,P'(tX)$.
Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f':t\mapsto X\,P'(tX).}$$

b. L'application $L:M\mapsto MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on a $f=L\circ A$. Comme $A:t\mapsto A(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $L\circ A'$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f':t\mapsto A'(t)B.}$$

c. Notons $A(t)=\left(a_{i,j}(t)\right)_{1\le i,j\le n}$ et $B(t)=\left(b_{i,j}(t)\right)_{1\le i,j\le n}$. On a alors $A(t)B(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(t)b_{k,j}(t)\right)_{1\le i,j\le n}$.

Comme A et B sont dérivables sur $\mathbb{R}$, toutes les applications $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ le sont aussi. Alors, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de produits de telles fonctions, de dérivé :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a'_{i,k}\,b_{k,j}+a_{i,k}b'_{k,j}\right).$$

Ainsi, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a'_{i,k}\,b_{k,j}+a_{i,k}b'_{k,j}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f':t\mapsto A'(t)B(t)+A(t)B'(t).}$$

d. En conservant les notations précédentes, on a $f:t\mapsto Tr\left(A(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions, de dérivé $f':t\mapsto\sum_{i=1}^{n}a'_{i,i}(t)$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f':t\mapsto Tr\left(A'(t)\right).}$$

Remarque : On pouvait aussi dire que $f=Tr\circ A$ et, comme la trace est linéaire, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivé $f'=Tr\circ A'$.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto\ln(1+xt)$ est bien définie et continue sur $[0,x]$, donc $F(x)=\int_0^x\ln(1+xt)\,dt$ est bien défini et $F(0)=0$. Soit alors $x\in\mathbb{R}_+^*$.
Tel qu'indiqué posons $u=xt$ ($t\mapsto xt$ est bijective et C^1 de $[0,x]$ dans $[0,x^2]$). On obtient :

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x^2}\ln(1+u)\,du=\frac{1}{x}\left[(1+u)\ln(1+u)-u\right]_0^1=\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2}{x}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} + x\ln(1+x^2) - x.$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de telles fonctions et on a $F(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$. Alors, comme la fonction F admet un DL d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. Finalement :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

3) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une éventuelle solution de (E): $tx'' + 2x' - tx = 0$, développable en série entière sur $I =]-R; R[$ avec $R > 0$. On a alors, pour tout $t \in I$:

$$t f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} t^n$$

$$t f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n\, a_{n+1} t^n$$

Donc :

$$t f''(t) + 2 f'(t) - t f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n\, a_{n+1} t^n + 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(n+1)\, a_{n+1} t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n$$

$$= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+1} - a_{n-1}\right] t^n$$

Alors, f est solution de (E) sur I si et seulement si pour tout $t \in I$, $t f''(t) + 2 f'(t) - t f(t) = 0$, ce qui donne par unicité du développement en série entière, $a_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+1} = a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad n!(n+2)(n+1)\, a_{n+1} = n!\, a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+2)!\, a_{n+1} = n!\, a_{n-1}.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)!\, a_{n+2} = (n+1)!\, a_n$.

En remplaçant successivement n par $2p$, puis $2p+1$, ceci donne pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\big(2(p+1)+1\big)!\, a_{2(p+1)} = (2p+3)!\, a_{2p+2} = (2p+1)!\, a_{2p}$$

$$\big([2(p+1)+1]+1\big)!\, a_{2(p+1)+1} = (2p+4)!\, a_{2p+4} = \big((2p+1)+1\big)!\, a_{2p+1}$$

Donc, les suites $\big((2p+1)!\, a_{2p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\big(((2p+1)+1)!\, a_{2p+1}\big)\, p \in \mathbb{N}$ sont constantes, soit pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(2p+1)!\, a_{2p} = a_0$$

$$(2p+2)!\, a_{2p+1} = a_1$$

Avec $a_1 = 0$ et $a_0 \in \mathbb{R}$, on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{a_0}{(2p+1)!}$ et $a_{2p+1} = 0$, et donc :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{(2n+1)!} t^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $f(t)=a_0\dfrac{\operatorname{sh}t}{t}$ et $R=+\infty$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Une solution de } (E) \text{ développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ est } f:t\mapsto\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}t}{t} & \text{quand } t\neq 0\\ 1 & \text{quand } t=0\end{cases}.}$$

Cherchons une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $g=\varphi f$ avec φ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de telles fonctions : f étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}t\,g''(t)+2g'(t)-t\,g(t)&=t\varphi''(t)f(t)+2t\varphi'(t)f'(t)+t\varphi(t)f''(t)+2\varphi'(t)f(t)+2\varphi(t)f'(t)-t\varphi(t)f(t)\\&=t\,f(t)\varphi''(t)+2\left[t\,f'(t)+f(t)\right]\varphi'(t)+\varphi(t)\left[t\,f''(t)+2f'(t)-t\,f(t)\right]\\&=t\,f(t)\varphi''(t)+2\left[t\,f'(t)+f(t)\right]\varphi'(t)\end{aligned}$$

Or, $t\,f(t)=\operatorname{sh}t$ et $t\,f'(t)+f(t)=\operatorname{ch}t$, donc $t\,g''(t)+2g'(t)-t\,g(t)=\operatorname{sh}t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\,\varphi'(t)$ et ainsi, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\operatorname{sh}t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\,\varphi'(t)=0.$$

Remarquons alors que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}t\neq 0$, donc l'équation ci-dessus équivaut à pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\operatorname{sh}^2t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\,\varphi'(t)=\Phi'(t)=0$$

avec $\Phi(t)=\operatorname{sh}^2t\,\varphi'(t)$.

Ainsi, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi'=\dfrac{\lambda}{\operatorname{sh}^2}=-\lambda\left(\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}\right)'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\varphi=-\lambda\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}+\mu$ et comme on cherche une solution, on peut prendre ici $\lambda=-1$ et $\mu=0$, ce qui donne $\varphi=\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$, soit $g=\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}f$ et finalement :

Une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{t\mapsto\frac{\operatorname{ch}t}{t}}$$

4) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, avec second membre.

Soit $I=\left]-\infty;-1\right[$ ou $\left]-1;0\right[$ ou $\left]0;1\right[$ ou $\left]1;+\infty\right[$. Sur I, l'équation (E) se récrit :

$$y'+\frac{2}{x(x^2-1)}y=\frac{x}{x^2-1}.$$

L'équation homogène (H) est $y'+\dfrac{2}{x(x^2-1)}y=0$, de solutions $x\mapsto k\exp\left(-\displaystyle\int^x\frac{2}{t(t^2-1)}dt\right)$. Or :

$$-\int^x\frac{2}{t(t^2-1)}dt=\int^x\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln|x|-\ln\left|x^2-1\right|=\ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|.$$

Donc, les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x \mapsto k\left|\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|$ et comme $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}$ est de signe constant sur I (fonction continue ne s'annulant pas), les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x \mapsto \lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \lambda(x)\dfrac{x^2}{x^2-1}$ avec λ dérivable sur I (variation de la constante). En remplaçant dans (E), on obtient $\lambda'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc on peut prendre $\lambda : x \mapsto \ln|x|$.

Ainsi, si $I =]-\infty;-1[$ ou $]-1;0[$ ou $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$:

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \left(\lambda + \ln|x|\right)\frac{x^2}{x^2-1} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Remarquons que $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ est symétrique par rapport à 0 et que la fonction $x \mapsto \left(\lambda + \ln|x|\right)\dfrac{x^2}{x^2-1}$ est paire sur cet ensemble quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Or :

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln|x|\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln x\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+1}\frac{\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln|x|\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2\ln|x|}{x^2-1}\right) = 0$$

Donc, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x|$, qui est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, comme produit de telles fonctions, admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ entier.

Ainsi (avec $\lambda = 0$), la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x| & \text{quand } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{quand } x = 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{quand } x = \pm 1 \end{cases}$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E), et donc :

$$\boxed{\text{Il existe une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de } (E).}$$

Par contre, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to -1}\left(\left|\lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\left|\lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|\right) = +\infty$, donc la fonction ci-dessus est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E).

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation (E): $xy' - (1+\lambda)y = 0$ est une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 1.

Cette équation se récrit sur I :

$$y' - \frac{1+\lambda}{x}y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto k\exp\left(\int^x \frac{1+\lambda}{t}\,dt\right) = k|x|^{1+\lambda}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions de } xy' - (1+\lambda)y = 0 \text{ sur } I = \mathbb{R}_-^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x \mapsto k|x|^{1+\lambda} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$; $P \mapsto XP' - P$. On a bien $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ par linéarité de la dérivation.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de ϕ et P un vecteur propre associé. On a alors $\phi(P) = XP' - P = \lambda P$, soit $XP' - (1+\lambda)P = 0$. Ainsi, la fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$ est solution de $xy' - (1+\lambda)y = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = kx^{1+\lambda}$. Comme la fonction $x \mapsto P(x)$ est polynômiale, il faut que $1+\lambda \in \mathbb{N}$, donc que $\lambda \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$. Alors, on a $P = kX^n$ avec $n = 1+\lambda \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, on a $X^{1+\lambda} \in \mathbb{R}[X]$ et :

- si $\lambda \in \mathbb{N}$, $\phi(X^{1+\lambda}) = X(1+\lambda)X^{\lambda} - X^{1+\lambda} = \lambda X^{1+\lambda}$;
- si $\lambda = -1$, $\phi(1) = -1 = \lambda 1$.

Dans tous les cas, on a $\phi(X^{1+\lambda}) = \lambda X^{1+\lambda}$ et, comme $X^{1+\lambda}$ est non nul, ceci permet de conclure que λ est valeur propre de ϕ et que $X^{1+\lambda}$ est un vecteur propre associé.
Finalement :

$$\boxed{Sp(\phi) = \{-1\} \cup \mathbb{N} \text{ et pour tout } \lambda \in Sp(\phi), \text{ le sous-espace propre associé à } \lambda \text{ est } \mathrm{Vect}\left(X^{1+\lambda}\right).}$$

6) Pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t)\sin(x-t)$, $t \mapsto g(t)\sin t$ et $t \mapsto g(t)\cos t$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme produits de telles fonctions, donc $f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ est bien défini et :

$$f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt = \int_0^x g(t)\left[\sin x \cos t - \cos x \sin t\right]dt = \sin x \int_0^x g(t)\cos t\,dt - \cos x \int_0^x g(t)\sin t\,dt.$$

Les fonctions sin, cos, $x \mapsto \int_0^x g(t)\cos t\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x g(t)\sin t\,dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc *f* l'est aussi en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \int_0^x g(t)\cos t\,dt + \sin x \cos x\, g(x) + \sin x \int_0^x g(t)\sin t\,dt - \cos x \sin x\, g(x) \\ &= \int_0^x g(t)\left[\cos x \cos t + \sin x \sin t\right]dt = \int_0^x g(t)\cos(x-t)\,dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable (et même } C^1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x g(t)\cos(x-t)\,dt.}$$

Comme pour *f*, f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x \int_0^x g(t)\cos t\,dt + g(x)\cos^2 x + \cos x \int_0^x g(t)\sin t\,dt + g(x)\sin^2 x \\ &= -\int_0^x g(t)\left[\sin x \cos t - \cos x \sin t\right]dt + g(x) \\ &= -\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt + g(x) = -f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $f''+f=g$, donc :

$$\boxed{f \text{ est solution de } y''+y=g\,.}$$

On pose maintenant $g(t)=e^t$ et on veut résoudre $y''+y=e^x$, qui est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants et avec second membre.

L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$, de racines $-i$ et i, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Le second membre est de la forme $e^{\alpha x}$ où $\alpha=1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On peut donc chercher une solution particulière de la forme $x\mapsto Ae^x$ avec $A\in\mathbb{R}$ et en remplaçant dans l'équation on trouve $A=\frac{1}{2}$, donc une solution particulière de $y''+y=e^x$ est $x\mapsto \frac{1}{2}e^x$.

Avec ce qui précède, on aurait pu prendre $x\mapsto \int_0^x e^t\sin(x-t)\,dt$ comme solution particulière, mais le calcul de l'intégrale est finalement plus long. Penser à $\int_0^x e^t\sin(x-t)\,dt=\operatorname{Im}\left(\int_0^x e^t e^{i(x-t)}dt\right)=\operatorname{Im}\left(e^{ix}\int_0^x e^{(1-i)t}dt\right)=\dots$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } y''+y=e^x \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x+\frac{1}{2}e^x,\text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

7) On veut résoudre $(S):\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t)\\ y'(t)=2y(t)\\ z'(t)=2x(t)-3y(t)+4z(t)\end{cases}$.

La deuxième équation donne immédiatement $y(t)=Be^{2t}$ avec $B\in\mathbb{R}$ et le système se récrit alors :

$$(S)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x'(t)-2x(t)=Be^{2t}\\ y(t)=Be^{2t}\\ z'(t)-4z(t)=2x(t)-3Be^{2t}\end{cases}\qquad \text{avec } B\in\mathbb{R}.$$

La première équation donne (en cherchant une solution particulière de la forme $t\mapsto kt\,e^{2t}$), $x(t)=Ae^{2t}+Bt\,e^{2t}$ avec $A\in\mathbb{R}$ et le système se récrit alors :

$$(S)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x(t)=Ae^{2t}+Bt\,e^{2t}\\ y(t)=Be^{2t}\\ z'(t)-4z(t)=\left(2Bt+2A-3B\right)e^{2t}\end{cases}\qquad \text{avec } A,B\in\mathbb{R}.$$

La troisième équation donne (en cherchant une solution particulière par la méthode de variation de la constante ou directement de la forme $t\mapsto(at+b)e^{2t}$), $z(t)=(-Bt+B-A)e^{2t}+Ce^{4t}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (S) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les triplets } (x,y,z) \text{ avec } \begin{cases} x:t\mapsto(Bt+A)e^{2t}\\ y:t\mapsto Be^{2t}\\ z:t\mapsto Ce^{4t}-(Bt+A-B)e^{2t}\end{cases} \text{ et } A,B,C\in\mathbb{R}.}$$

On aurait pu aussi écrire le système matriciellement : $X'=AX$ *avec* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\2&-3&4\end{pmatrix}$.

8) *Analyse-synthèse*.

Soit *f* une éventuelle solution.

On a $f(0)=f(2\times 0)=2f(0)$, donc $f(0)=0$ et, comme *f* est dérivable en 0, on a alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(h)-f(0)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(h)=f'(0)=a\,.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on prouve par récurrence sur *n* que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(x)=2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Comme $\frac{x}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\frac{1}{h}f(h)\xrightarrow[h\to 0]{}a$, donc, pour $x\neq 0$:

$$a=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{2^n}}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}f(x)=\frac{1}{x}f(x)\,.$$

Ainsi, pour tout réel $x\neq 0$, on a $f(x)=xa$ et $f(0)=0=0a$. Finalement, *f* est bien linéaire.

Réciproquement, si *f* est linaire, alors il existe $a\in E$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=xa$ et :

$$f(2x)=2xa=2f(x)\,.$$

De plus, $f(0)=0$ et $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(h)=\lim_{h\to 0}a=a$ donc *f* est dérivable en 0 et donc *f* est bien solution.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions du problème sont bien les fonctions linéaires.}}$$

9) a. $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\sin^2 y}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

Comme $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$; la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de telles fonctions. De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|\sin y|\leq|y|$ donc :

$$|f(x,y)|=\frac{|x\sin^2 y|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|\,y^2}{x^2+y^2}\leq|x|\,.$$

Or, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ et ainsi, *f* est continue en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

b. $g:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

Comme $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$; la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.

Remarquons que pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $a+b\geq 1$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|x^a y^b\right|=0$, donc s'il existe $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $a+b\geq 1$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|g(x,y)|\leq\left|x^a y^b\right|$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0=g(0,0)$ et g est continue en 0.

Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1,\ \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1 \text{ et } \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

car $2|x||y|-x^2-y^2=-\left(|x|-|y|\right)^2\leq 0$ pour la dernière inégalité. Alors :

- si $p+q-2\geq 1$, soit $p+q\geq 3$, alors soit $p\geq 2$ et $|g(x,y)|\leq\left|x^{p-2}y^q\right|$, soit $q\geq 2$ et $|g(x,y)|\leq\left|x^p y^{q-2}\right|$, et dans les deux cas, g est continue en 0 ;
- si $p+q-2\leq 0$, soit $p+q\leq 2$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g(x,x)=\dfrac{1}{2}x^{p+q-2}$ et :

$$\lim_{x\to 0}|g(x,x)|=\begin{cases} \tfrac{1}{2} & \text{quand } p+q=2 \\ +\infty & \text{quand } p+q<2 \end{cases}.$$

  Dans les deux cas, $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x)\neq 0=g(0,0)$ et g n'est pas continue en 0.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement si } p+q\geq 3.}$$

10) La fonction $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x^2+2yz \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y^2+2xz \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z^2+2xy.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x^2+2yz=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y^2+2xz=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z^2+2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-yz \\ y^2=-xz \\ z^2=-xy \end{cases}$$

Ceci entraine que $x^3=y^3=z^3=-xyz$, donc que $x=y=z$ et $x^3=y^3=z^3=-xyz=-x^3$, ce qui revient à $x=y=z=0$. L'origine est donc le seul point critique de *f*.

On a $f(0,0,0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,0,0)=x^2\geq 0$ donc $f(0,0,0)=0$ n'est pas un maximum (local ou global). Reste à voir si c'est un minimum (local ou global), autrement dit si on a $f(x,y,z)\geq 0$ (au voisinage de $(0,0,0)$ ou sur $\mathbb{R}^3$ entier).

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, on a $a^2+b^2+c^2>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(at,bt,ct)=(a^2+b^2+c^2)t^2+2abc\,t^3\underset{t\to 0}{\sim}(a^2+b^2+c^2)t^2.$$

Comme $(a^2+b^2+c^2)t^2\geq 0$, on a $f(at,bt,ct)\geq 0$ au voisinage de $t=0$, donc *f* est positive au voisinage de $(0,0,0)$ et $f(0,0,0)=0$ est un minimum local.

Par contre, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x,x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+2x^3\right)=-\infty$, donc *f* n'est pas positive sur $\mathbb{R}^3$ entier, donc $f(0,0,0)=0$ n'est pas un minimum global.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le seul extremum de } f \text{ est un minimum local : 0 atteint en } (0,0,0).}$$

Remarquons que 0 n'est pas attient seulement en $(0,0,0)$*, on a par exemple :* $f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=0$.

11) La fonction $f:(x,y)\mapsto x^2y+\ln(1+y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de telles fonctions. De plus, $A=[-1,1]^2$ est fermé et borné (donc compact) dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension finie.

Alors, *f* est bornée et atteint ses bornes sur *A*, autrement dit :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède un minimum et un maximum sur } A=[-1,1]^2.}$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de telles fonctions et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+\frac{2y}{1+y^2}.$$

Alors :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+\dfrac{2y}{1+y^2}=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\ \dfrac{2y}{1+y^2}=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}y=0\\ x^2=0\end{cases}\iff x=y=0.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ possède un unique point critique sur } B=\left]-1,1\right[^2\text{, qui est } (0,0).}$$

On a $f(0,0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,x^3)=x^5+\ln(1+x^6)$. Or, $\ln(1+x^6)\underset{x\to 0}{=}o(x^5)$, donc :

$$f(x,x^3)\underset{x\to 0}{\sim}x^5.$$

Comme x^5 change de signe en 0, il en va de même pour $f(x,x^3)$ et donc *f* n'est pas de signe constant au voisinage de 0, ce qui veut dire que :

$$\boxed{f(0,0)=0 \text{ n'est pas un extremum de } f.}$$

Si le minimum ou le maximum de f était atteint sur B, qui est ouvert, ce serait en un point critique de f, donc en $(0,0)$. Or, f n'est pas extrémale en $(0,0)$, donc le minimum et le maximum de f sur A sont atteints sur la frontière de A. Et, pour tout $(x,y)\in[-1,1]^2$, on a :

$$\begin{aligned} &f(-1,y)=f(1,y)=y+\ln(1+y^2)\\ &f(x,-1)=-x^2+\ln 2\\ &f(x,1)=x^2+\ln 2\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[-1,1]$, on a :

$$-1+\ln 2\le f(x,-1)\le f(x,1)\le 1+\ln 2.$$

Par ailleurs, la fonction $y\mapsto y+\ln(1+y^2)$ est dérivable sur $[-1,1]$ en tant que somme de telles fonctions, de dérivée $y\mapsto 1+\dfrac{2y}{1+y^2}$. Pour tout $y\in[-1,1]$, $1+\dfrac{2y}{1+y^2}=\dfrac{(1+y)^2}{1+y^2}\ge 0$, donc $y\mapsto y+\ln(1+y^2)$ est croissante sur $[-1,1]$ et ainsi, pour tout $y\in[-1,1]$, on a :

$$-1+\ln 2\le f(-1,y)=f(1,y)\le 1+\ln 2.$$

Ainsi, pour tout (x,y) appartenant à la frontière de A, on a :

$$-1+\ln 2\le f(x,y)\le 1+\ln 2.$$

Comme $f(1,1)=1+\ln 2$ et $f(1,-1)=-1+\ln 2$, on peut conclure que :

$$\boxed{\min_A f=-1+\ln 2 \text{ et } \max_A f=1+\ln 2.}$$

12) La fonction $\varphi:(x,y)\mapsto(x,x^2+y)$ est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, car chaque composante est polynomiale. Si on pose alors $u=x$, $v=x^2+y$ et $g(u,v)=f(x,y)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)-2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).$$

Et ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0 \iff g(u,v)=\Psi(v)$$

avec Ψ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les solutions de } \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ sont les fonctions}\\ \text{de la forme } (x,y)\mapsto\Psi(x^2+y) \text{ avec } \Psi \text{ dérivable sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

Chapitre 10

1) Pour tous réels a et b, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ de plus :

$$\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}=\sqrt{t}\left(1+a\sqrt{1+\frac{1}{t}}+b\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right)=\sqrt{t}\left(1+a\left(1+\frac{1}{2t}\right)+b\left(1+\frac{1}{t}\right)+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$=\sqrt{t}\left(1+a+b+\frac{a+2b}{2t}+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$$

Donc, $\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}-(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ et comme $\int^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t}}$ converge :

$$\int^{+\infty}\left[\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}-(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge.}$$

Alors :

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt \text{ converge} \iff \int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge}.$$

Or, si $1+a+b\neq 0$, on a $(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{\sim}(1+a+b)\sqrt{t}$ donc $\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt$ diverge et si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$, $\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt=\int^{+\infty}\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}dt$ diverge, donc :

$$\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge} \iff \begin{cases}1+a+b=0\\ a+2b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt \text{ converge} \iff \begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}}$$

Dans ce cas, on a :

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)dt=\frac{2}{3}\Big[t\sqrt{t}-2(t+1)\sqrt{t+1}+(t+2)\sqrt{t+2}\Big]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\lim_{t\to+\infty}\left[t\sqrt{t}-2(t+1)\sqrt{t+1}+(t+2)\sqrt{t+2}\right]-\left[-2+2\sqrt{2}\right]\right).$$

Et :

$$t\sqrt{t}-2(t+1)\sqrt{t+1}+(t+2)\sqrt{t+2}=t\sqrt{t}\left[1-2\left(1+\frac{1}{t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\left(1+\frac{2}{t}\right)\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right]$$

$$=t\sqrt{t}\left[1-2\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t}+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)+\left(1+\frac{2}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\right]$$

$$=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Donc, $\lim_{t\to+\infty}\left[t\sqrt{t}-2(t+1)\sqrt{t+1}+(t+2)\sqrt{t+2}\right]=0$ et ainsi :

$$\boxed{I=\frac{4(1-\sqrt{2})}{3}}$$

2) La fonction $t \mapsto 1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

- $\lim_{t\to 0^+}\left[1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 1$ donc $\int_0 \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ converge ;
- $\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)$, donc $1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ et comme $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\int^{+\infty}\left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ converge aussi.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty}\left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt \text{ converge.}}$$

Les fonctions $t \mapsto \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, on en intégrant par parties :

$$\int_a^x t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x - \int_a^x \frac{t^2}{2}\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}t - \arctan t\right]_a^x$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x - \frac{a^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}a + \arctan a$$

Quand $a \to 0^+$, on obtient :

$$\int_0^x t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^x\left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt = x - \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x + \arctan x = \frac{1}{2}x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \arctan x.$$

Or, on a vu que $1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$, donc $x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x}$ et $x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt = \frac{\pi}{2}}$$

3) Soit $a\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto x^a\ln(x+e^{ax})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ est impropre en 0 et $+\infty$.

- En 0, on a $x^a\ln(x+e^{ax})=x^a\ln\left(x+1+ax+\underset{x\to0}{o}(x)\right)=x^a\ln\left(1+(a+1)x+\underset{x\to0}{o}(x)\right)$.
  - Si $a+1\neq 0$, on a $x^a\ln(x+e^{ax})\underset{x\to0}{\sim}(a+1)x^{a+1}$ et $\int_0 x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a+2>0$.
  - Si $a+1=0$, on a $x^a\ln(x+e^{ax})=\dfrac{1}{x}\ln(x+e^{-x})=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\underset{x\to0}{o}(x)\right)=\dfrac{1}{x}\underset{x\to0}{o}(x)=\underset{x\to0}{o}(1)$, donc la fonction admet une limite finie en 0 et $\int_0 x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ converge.

  Ainsi, $\int_0 x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a>-2$.
- En $+\infty$, on a :
  - Si $a=0$, on a $x^a\ln(x+e^{ax})=\ln(x+1)$ et $\int^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ diverge.
  - Si $a>0$, on a $x^a\ln(x+e^{ax})\underset{x\to+\infty}{\sim}ax^{a+1}$ et $\int^{+\infty} x^{a+1}dx$ diverge, donc $\int^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ diverge.
  - Si $a<0$, on a $x^a\ln(x+e^{ax})\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln x}{x^{|a|}}$ et $\int^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{|a|}}dx$ converge si et seulement si $|a|>1$, car :
    - si $|a|>1$, alors $\dfrac{\ln x}{x^{|a|}}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}}\right)$ et $\dfrac{1+|a|}{2}>1$, donc $\int^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}}dx$;
    - si $|a|\leq 1$, alors $\dfrac{1}{x^{|a|}}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln x}{x^{|a|}}\right)$ et $|a|\leq 1$, donc $\int^{+\infty}\dfrac{1}{x^{|a|}}dx$.

  Ainsi, $\int^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a<-1$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx \text{ converge si et seulement si } -2<a<-1.}$$

4) Posons $g(t)=\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et si G est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=G(2x)-G(x).$$

Comme G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, f est une différence de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2g(2x)-g(x)=2\frac{e^{-\sqrt{2x}}}{2x}-\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}=\frac{e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}}{x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f: x\mapsto \int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de dérivée } f': x\mapsto \frac{e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}}{x}.}$$

Posons $h(t)=\dfrac{e^{-\sqrt{t}}-1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $h(t)\underset{t\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0\frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, donc :

$$\int_x^{2x}h(t)dt=\int_0^{2x}h(t)dt-\int_0^x h(t)dt\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt=\int_x^{2x}\left(h(t)+\frac{1}{t}\right)dt=\int_x^{2x}h(t)\,dt+\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\int_x^{2x}h(t)\,dt+\ln 2.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}f(x)=\ln 2}$$

On a $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$ converge. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt=\int_1^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt-\int_1^{x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt.$$

Et donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$, soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

Remarquons que g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $x<2x$, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ revient à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge.

Cette intégrale est impropre en 0 et + ∞, mais comme f admet une limite finie en 0, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Par ailleurs, les fonctions f et $x\mapsto x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et en intégrant par parties, on a pour tout réel $X\geq 1$:

$$\int_1^X f(x)\,dx=\left[x\,f(x)\right]_1^X-\int_1^X x\,f'(x)\,dx=X\,f(X)-f(1)-\int_1^X\left(e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)dx.$$

Or, $e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)dx$ converge.

Par ailleurs, $g(t)=\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, donc il existe un réel $A>0$ tel que pour tout réel $t\geq A$, on a $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\leq\dfrac{1}{t^3}$.

Alors, pour tout réel $X\geq A$, on a (avec $x<2x$) :

$$0\leq X\,f(X)=X\int_X^{2X}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt\leq X\int_X^{2X}\frac{1}{t^3}dt=X\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_X^{2X}=\frac{3}{8X}.$$

Avec le théorème des gendarmes, on obtient $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}X\,f(X)=0$ et ainsi $\displaystyle\int_1^X f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $X\to+\infty$, autrement dit $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout réel *x*. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{\ln t}{x^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1,5}}\right)$ et $\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{1,5}}$ converge, donc $\int^{+\infty} \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$ converge ;
- si $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\ln t}{x^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{x^2}$ et $\int_0 \ln t dt$ converge, donc $\int_0 \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$ converge ;
- $\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$ et $\int_0 \dfrac{dt}{t}$ diverge donc $\int_0 \dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt \text{ définie sur } D = \mathbb{R}^*.}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc dans $F(1) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{1+t^2}\,dt$, on peut poser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, ce qui donne :

$$F(1) = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\,du\right) = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -F(1).$$

Et donc :

$$\boxed{F(1) = 0}$$

Remarquons que *F* est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc dans $F(x)$, on peut poser le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$, ce qui donne :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+u^2x^2}\,x\,du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u + \ln x}{1+u^2}\,du.$$

Et comme les deux intégrales convergent, on a :

$$F(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du + \ln x \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\right] = \frac{1}{x}F(1) + \frac{\ln x}{x}\left[\arctan u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi, par imparité, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln|x|}{|x|}}$$