# *TD du chapitre 18 : Applications géométriques des fonctions vectorielles*

*Dans tout ce qui suit, le plan (resp. l'espace) est rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *(resp.* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*).*

## *Exercice 1*

Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes. Calculer sa longueur totale s'il y a lieu.

a. $\begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ (*Néphroïde*)  b. $\begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t^2 - t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$  c. $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$

## *Exercice 2*

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $a > 0$ et $A$ un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre $H$ du triangle $OAM$ lorsque $M$ décrit $\mathscr{C}$. *La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.*

## *Exercice 3*

Déterminer un paramétrage de la courbe plane $C$ d'équation $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$ et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

## *Exercice 4*

Soit $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > 0$, $b > 0$ et $a > b$.

Trouver les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de $O$, l'origine du repère (et centre de symétrie de $\mathcal{E}$).

## *Exercice 5*

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$.

1) Tracer l'intersection de $\Sigma = f^{-1}(\{1\})$ et du plan $P$ d'équation $z = 0$. Dessiner l'allure de $\Sigma$.
2) Soit $M_0$ un point de $\Sigma$ de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$. Donner une équation du plan tangent à $\Sigma$ en $M_0$.
3) Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que la restriction de $g$ à $\Sigma$ admet un extremum local en $M_0$.

   Soient $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $t \mapsto g\left(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0\right)$ et $G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $t \mapsto g\left(x_0, y_0, z_0 + t\right)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

   a. Montrer que $G_1$ et $G_2$ sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.

   b. Montrer que $\nabla g(M_0)$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.

### *Exercice 6*

On définit $\Sigma$ par l'équation $xyz = 1$.

1) Montrer que $\Sigma$ est une surface régulière.
2) Etudier l'intersection de $\Sigma$ avec les plans d'équations respectives $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$. En déduire l'allure de $\Sigma$.
3) Montrer que pour tout plan tangent à $\Sigma$, le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

   ☺ *Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par* $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

### *Exercice 7*

Soit $S$ la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

1) Quelle est l'intersection de $S$ avec le plan $(xOy)$ ?
2) Quels sont les points singuliers de $S$ ?
3) Quelles sont les droites tracées sur $S$ ?
4) Montrer que la partie de $S$ limitée au cube $[-1,1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u,v) \mapsto \big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big).$$

### *Exercice 8*

*Fenêtre de Viviani* : Soit un réel $a > 0$ et $C$ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a\sin(2t) \\ y = a\big(1-\cos(2t)\big) \\ z = 2a\cos t \end{cases}$$

Montrer que $C$ est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

### *Exercice 9*

Soient les surfaces : $S_1$ : $y^2(x^2+z^2) - x^2 - 3z^2 = 0$ et $S_2$ : $-x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

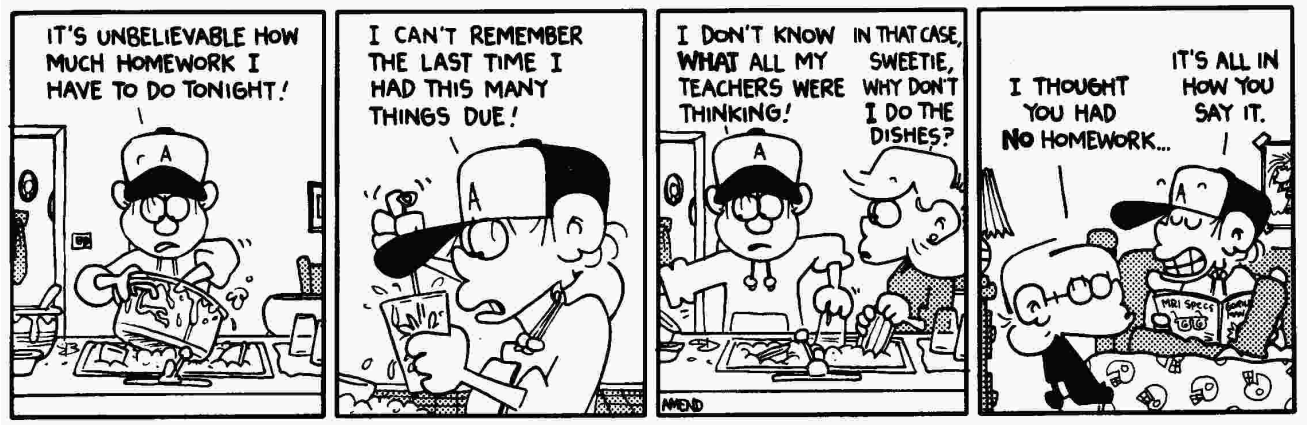
Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à $S_1$ et $S_2$ sont perpendiculaires.

### *Exercice 10*

1) Soit $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+1\right)$. Après avoir justifié qu'elle est de classe $C^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, calculer la matrice hessienne de $f$ en $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, puis rechercher les extrema de $f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
2) Mêmes questions pour $f : (x,y) \mapsto (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

### *Exercice 11*

Soit $f:(x,y)\mapsto(x^2-y)(3x^2-y)$. Montrer que la restriction de $f$ à toutes les droites passant par $(0,0)$ admet un extremum local strict en $(0,0)$ mais que $f$ n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.




### *Exercice 12*

Soit $\mathscr{E}$ la courbe plane paramétrée par $f:t\mapsto\big(x(t),\,y(t)\big)=\big(a\cos t,\,b\sin t\big)$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a>b>1$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$).

On note $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ et $L$ la longueur de $\mathscr{E}$, donnée par $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$.

La courbe $\mathscr{E}$ est une *ellipse* et la réel $e$ est son *excentricité*.

1) Montrer que $\pi(a+b)\le L\le\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.
2) Prouver que $L=2\pi a\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n-1}\left[\dbinom{2n}{n}\dfrac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)$.
3) Déterminer l'aire de la surface délimitée par $\mathscr{E}$.

### *Exercice 13* (*Centrale*)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{1+x^2} & \text{si } y\ge 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On appelle $S$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$.

1) La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ? de classe $C^1$ ? Déterminer ses lignes de niveau.
2) Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère la droite $D_a$, de pente $a$ et passant par le point $A(1,1)$ et $C$ la courbe tracée sur $S$ dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z=0$ est $D_a$.
   Soit $M$ un point de $C$. Déterminer la tangente à $C$ en $M$.

***Exercice 14*** (*Centrale*)

1) Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $m=\max\left(f,g\right)$. On note :

$$\mathcal{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, f(x,y)=g(x,y)\right\}$$

$$\mathcal{F}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, f(x,y)>g(x,y)\right\}$$

$$\mathcal{G}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, f(x,y)<g(x,y)\right\}$$

On suppose qu'il existe un point $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$ en lequel $m$ réalise un minimum local.

1) Que dire si $\vec{a}\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ ?

2) On suppose que $\vec{a}\in\mathcal{E}$. Montrer que la famille $\left((\nabla f)(\vec{a}),(\nabla g)(\vec{a})\right)$ est liée.