TD du chapitre 9 : Calcul différentiel

Exercice 1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a)<f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall\, k\in\left[f'(a),f'(b)\right],\ \exists\, c\in[a,b]\ \backslash\ f'(c)=k.$$

☺ *On pourra commencer par le cas où* $k=0$ *et montrer qu'alors f admet un minimum sur* $[a,b]$.

Exercice 2

Soit $f\in C^1\left(]0,1],\mathbb{R}\right)$ telle que f' est bornée sur $]0,1]$. On veut prouver que *f* admet une limite à droite en 0.

On pose $M=\sup\limits_{x\in\,]0,1]}\left|f'(x)\right|$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\dfrac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+1})-f(x_n)\right|\le M\left|x_{n+1}-x_n\right|$, puis que pour tous $n,p\in\mathbb{N}$:

$$\left|f(x_{n+p})-f(x_p)\right|\le\frac{M}{2^p}.$$

2) Justifier alors que la suite $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sup\limits_{k\ge n}f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie *L*.

4) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|u_n-f(x_n)\right|\le\dfrac{M}{2^n}$ puis que $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Démontrer alors que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=L$. ☺ *On pourra utiliser la technique de la question 1.*

Exercice 3

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, *E* un espace euclidien et $f:I\to E$

1) On suppose que *f* est deux fois dérivable et que $\|f\|$ est constante.
   Montrer que $\left(f\mid f''\right)$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

2) On suppose que *f* est dérivable et qu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout $x\in I$, $\|f'(x)\|\le k\|f(x)\|$.
   Montrer que si la fonction *f* s'annule en un point de *I*, alors elle est nulle sur *I*.
   ☺ *On pourra utiliser la fonction* $g:x\mapsto\|f(x)\|^2e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f:\mathbb{R}\to E$, continue en 0 et telle qu'il existe $k\in\,]0,1[$ et $\ell\in E$ tels que $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t}\left[f(t)-f(kt)\right]\right)=\ell$.

1) Montrer que : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\, t\in[-\alpha,\alpha]\backslash\{0\},\ \forall\, i\in\mathbb{N},\ \left\|\dfrac{1}{k^it}\left[f(k^it)-f(k^{i+1}t)\right]-\ell\right\|\le\varepsilon$.

2) En déduire que *f* est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de *k* et ℓ.

Exercice 5

Soit le système $(S): X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$. Résoudre (S) quand :

a. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan.

b. A est une nilpotente d'indice n.

☺ *On admettra que si* $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *vérifie* $A^{n-1}X_0 \neq 0$, *alors la famille* $\left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté positivement par sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique.

Résoudre l'équation différentielle $\vec{f}\,' \wedge \vec{u} = \vec{f}$ d'inconnue $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

☺ *On pourra introduire le plan* $P = (\vec{u})^{\perp}$.

Exercice 7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et deux fonctions a et b, respectivement de classe C^1 et C^0 sur I.

Déterminer une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t\,y_1(t)$. Cette condition est-elle suffisante ?

Résoudre $y'' + 2t\,y' + (t^2+1)y = te^{-t^2/2}$.

Exercice 8

Soit (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si h_1 et h_2 sont deux solutions de (E) sur I. On pose pour tout $t \in I$, $W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h'_1(t) & h'_2(t) \end{vmatrix}$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (h_1, h_2) est libre.
- Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.
- $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

☺ *On pourra montrer que W vérifie une équation différentielle simple.*

Exercice 9

Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$, puis calculer $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

Exercice 10

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$ où α et ℓ sont deux nombres complexes tels que tel que $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\ell}{\alpha}$.

2) On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]=0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) On suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) et qu'il existe $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ tel que les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_1X+\alpha_0$ ont toutes une partie réelle strictement négative et :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\dots+\alpha_1 f'(x)+\alpha_0 f(x)\right]=0.$$

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 11

Montrer que pour tout réel $x>0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

Exercice 12

1) Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$.

   Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.

   Les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

2) Montrer que $f:(x,y)\mapsto\dfrac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13

Dans les cas suivants, montrer que f ou g est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

1) $f:\ \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\ ;\ P\mapsto\displaystyle\int_0^1 P^2$.

2) $f:\ GL_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A\mapsto A^{-1}$.

Exercice 14

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en a, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en b et $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $\big(u(a),v(b)\big)$.

Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\mapsto f(x,y)=\varphi\big(u(x),v(y)\big)$ admet un maximum local en (a,b).

Exercice 15

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice 16

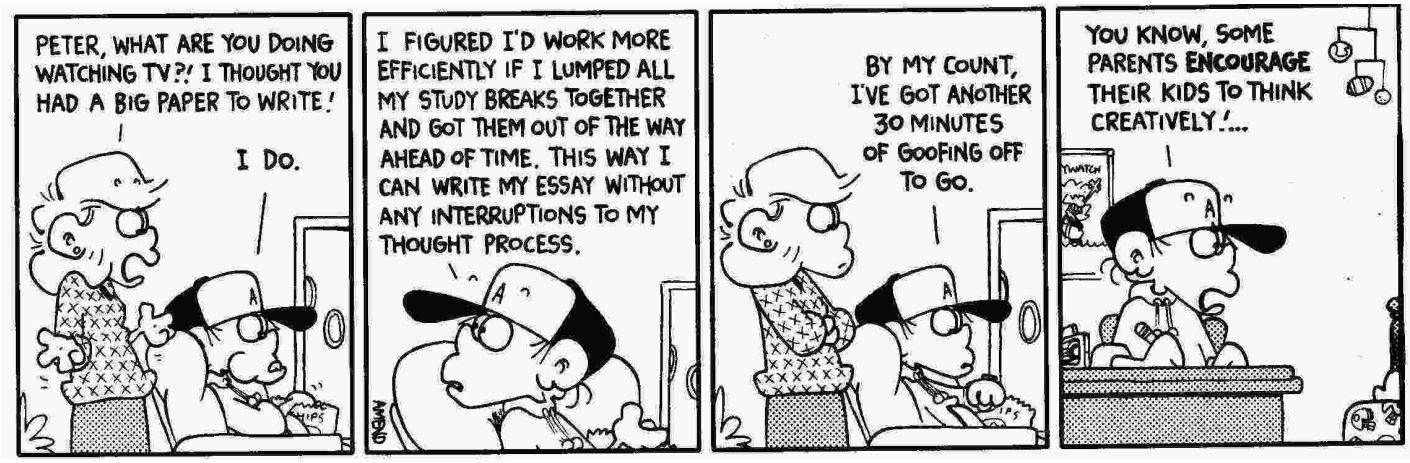
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1) Soit $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt - \int_0^x \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$. Montrer que $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) On définit sur $\mathbb{R}_+$ l'application $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) En déduire que si f possède un extremum local en $(0,0)$, alors f est constante au voisinage de $(0,0)$.



Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1.

1) Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si la partie réelle $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est toujours positive.

2) On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f'(t)}{f(t)} = a \in \mathbb{R}_-^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 18 (*Centrale*)

Soit *f* une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. On considère l'équation :

$$(E): \quad y'' + f(x)y = 0.$$

1) Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors yf est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir montré qu'elle existe, déterminer la limite de y' en $+\infty$.
2) Prouver que, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), la fonction $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ est constante et en déduire que l'équation différentielle (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 19 (*Mines*)

Déterminer toutes les fonctions *f* dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 20 (*Mines*)

Soit la fonction *H* définie par $H(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

Cette fonction est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 21 (*Mines*)

Soit *f* une fonction dérivable sur *U*, un ouvert de $\mathbb{R}$, et à images dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si *f* admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors $f'(x_0) = 0$.
2) Donner un théorème équivalent lorsque *U* est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3) Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto |\sin(x+iy)|^2$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Exercice 22 (*Centrale*)

On dit qu'une application *f*, continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est α-positivement homogène s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x,y,z)$.

Soit *f* de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que *f* est α-positivement homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \alpha f(x,y,z).$$

☺ *On pourra dériver par rapport à λ, à x, y et z constants et utiliser des changements de variable du type $u = \lambda x$.*

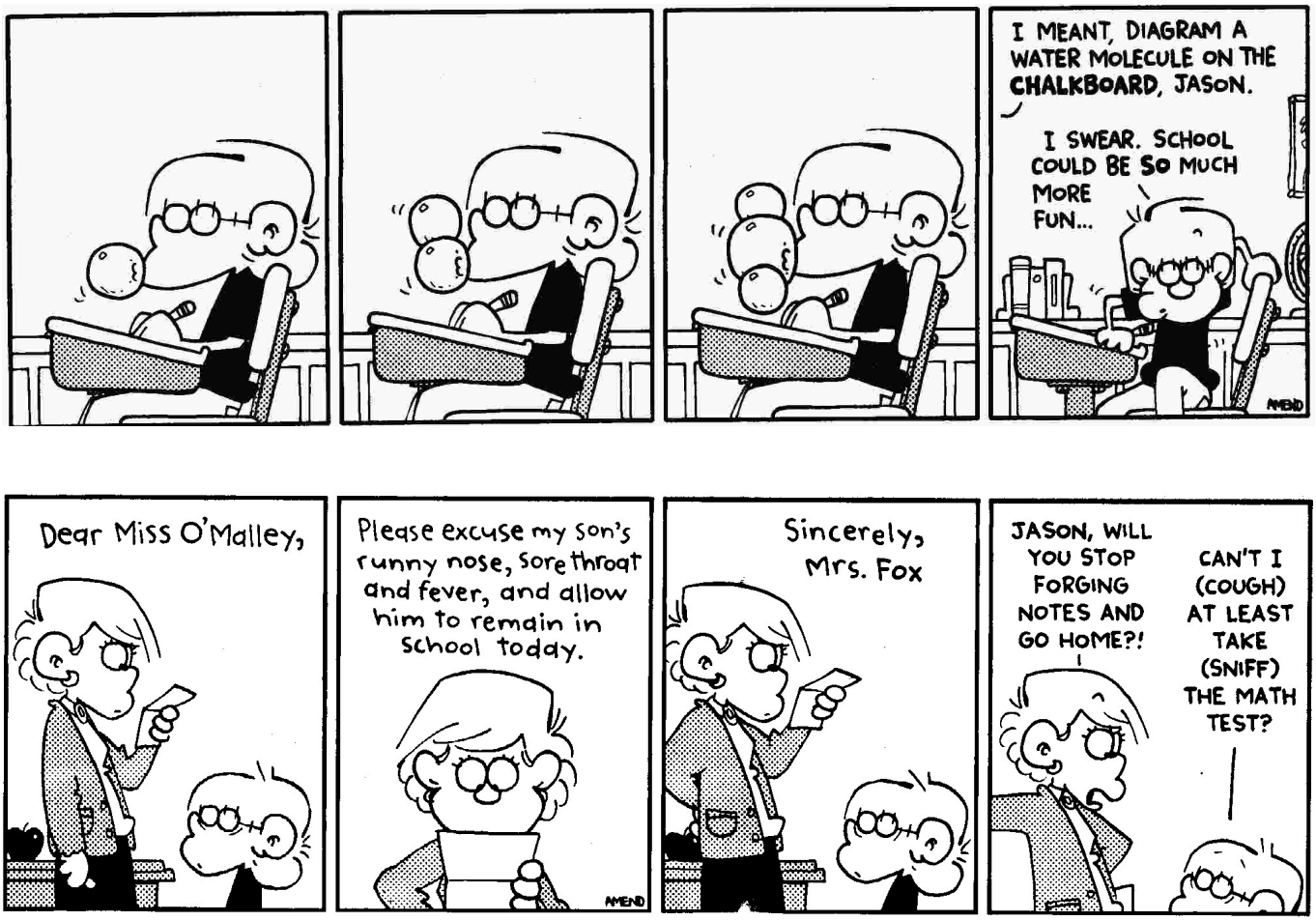
Exercice 23

Soient *E* est un espace euclidien et *u* un endomorphisme symétrique de *E*.

On note $f : E \to \mathbb{R}$; $x \mapsto (x \mid u(x))$ et $g : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{(x \mid u(x))}{(x \mid x)}$.

Montrer que *f* et *g* sont différentiables sur leur ensemble de définition et déterminer leur différentielle.

On montrera que $dg(a) = 0$ si et seulement si *a* est un vecteur propre de *u*.


I MEANT, DIAGRAM A WATER MOLECULE ON THE CHALKBOARD, JASON.
I SWEAR. SCHOOL COULD BE SO MUCH MORE FUN...
AMEND
Dear Miss O'Malley,
Please excuse my son's runny nose, sore throat and fever, and allow him to remain in school today.
AMEND
Sincerely, Mrs. Fox
JASON, WILL YOU STOP FORGING NOTES AND GO HOME?!
CAN'T I (COUGH) AT LEAST TAKE (SNIFF) THE MATH TEST?