Corrigé du DM n° 1

1) Remarquons que $u(\varepsilon_1)=0$ et pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, déterminer $u(\varepsilon_i)=\varepsilon_{i-1}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$ fixé. Prouvons par récurrence finie sur *k* que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $u^k(\varepsilon_i)=\begin{cases}\varepsilon_{i-k} & \text{quand } k<i\\ 0 & \text{quand } k\geq i\end{cases}$.

- Pour $k=0<i$, on a $u^0(\varepsilon_i)=\varepsilon_i=\varepsilon_{i-0}$, donc la propriété est vraie.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k\in[\![0,n-1]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned} u^{k+1}(\varepsilon_i)=u\left(u^k(\varepsilon_i)\right)&=\begin{cases}u(\varepsilon_{i-k}) & \text{quand } k<i\\ u(0) & \text{quand } k\geq i\end{cases}\\ &=\begin{cases}\varepsilon_{i-k-1} & \text{quand } k<i-1\\ u(\varepsilon_1)=0 & \text{quand } k=i-1\\ 0 & \text{quand } k\geq i\end{cases} \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &=\begin{cases}\varepsilon_{i-(k+1)} & \text{quand } k+1<i\\ 0 & \text{quand } k+1\geq i\end{cases}\end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

Remarquons alors que $u^n(\varepsilon_i)=0$ et pour tout entier $k>n$, $u^k(\varepsilon_i)=u^{k-n}\left(u^n(\varepsilon_i)\right)=u^{k-n}(0)=0$.

En définitive, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{u^k(\varepsilon_i)=\begin{cases}\varepsilon_{i-k} & \text{quand } k<i\\ 0 & \text{quand } k\geq i\end{cases}}$$

On a $N_n=M_{\mathcal{B}_c}(u)$, donc $N_n^k=M_{\mathcal{B}_c}(u^k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit :

$$\begin{array}{cl} \qquad\qquad\begin{array}{c}\textit{colonne } k+1\\ \downarrow\end{array} & \\ N_n^k=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & & & 0 & 1\\ \vdots & & & & & & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix} & \leftarrow \textit{ligne } n-k \end{array}$$

2) Si $A^2=0_n$, on a $\operatorname{Im} A\subset\ker A$, donc $rg(A)=r\leq\dim\ker A$.

D'après le théorème du rang, $\dim\ker A=n-rg(A)=n-r$, donc $r\leq n-r$, soit $2r\leq n$ ou encore $r\leq\dfrac{n}{2}$

Comme $A\neq 0_n$ n on a $r\neq 0$, soit $r\geq 1$ et ainsi, on a bien :

$$\boxed{1\leq r\leq\frac{n}{2}}$$

3) On a que $\operatorname{Im} A \subset \ker A$ et $\dim \ker A = n-r \geq r$.

Si la famille $\left(f(e_1), \dots, f(e_r)\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, on peut donc la compléter par q vecteurs $e'_1, \dots, e'_q$ en $\left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q\right)$, une base de $\ker f$ et on a $q = \dim \ker A - rg(A) = n-2r$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } q = n-2r \text{ vecteurs } e'_1, \dots, e'_q \text{ de } \mathbb{K}^n \text{ tels que } \left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q\right) \text{ est une base de } \ker f.}$$

4) La famille $\mathcal{B} = \left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r\right)$ contient $r+q+r = r+n-2r+r = n$ vecteurs.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r = 0$.

En appliquant f, on obtient, avec $f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q \in \ker f$:

$$\gamma_1 f(e_1) + \dots + \gamma_r f(e_r) = 0.$$

Or, $\left(f(e_1), \dots, f(e_r)\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, donc est libre et ainsi, $\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$. Alors :

$$\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q = 0.$$

Et, comme $\left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q\right)$ est une base de $\ker f$, donc est une famille libre, on obtient $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Finalement :

$$\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0.$$

Donc, la famille $\left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r\right)$ est libre et comme elle contient $n = \dim \mathbb{K}^n$ vecteurs :

$$\boxed{\mathcal{B} = \left(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r\right) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.}$$

Comme $f\left(f(e_1)\right) = \dots = f\left(f(e_r)\right) = f(e'_1) = \dots = f(e'_q) = 0$, on a :

$$\begin{array}{c} \textit{colonne } n-r+1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \textit{ligne } r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Soit :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(f) = N_n^{n-r}}$$

On a $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(f) = N_n^{n-r}$, donc les matrices A et N_n^{n-r} représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes : elles sont semblables. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } A = P N_n^{n-r} P^{-1}.}$$

5) Si $n-r$ est pair, on peut poser $B = PN_n^{\,p}P^{-1}$ avec $p = \dfrac{n-r}{2} \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$B^2 = \left(PN_n^{\,p}P^{-1}\right)^2 = P\left(N_n^{\,p}\right)^2 P^{-1} = PN_n^{\,2p}P^{-1} = PN_n^{\,n-r}P^{-1} = A\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B^2 = A\,.}$$

6) On a vu dans la question 4 que A est semblable à $N_n^{\,n-r}$. Or, les seules hypothèses sur A (non nulle) que l'on a utilisé pour établir ce résultat sont $rg\,(A) = r$ et $A^2 = 0_n$. Ainsi, toute matrice de rang r et de carré nul est semblable à $N_n^{\,n-r}$, et donc à A. Or, comme M_n est diagonale par blocs, on a :

$$M_n^{\,n-1-r} = \left(\begin{array}{c:c} N_{n-1}^{\,n-1-r} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix}0 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & \textit{colonne } n-r & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \textit{ligne } r \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Donc, $\operatorname{Im}\left(M_n^{\,n-1-r}\right) = \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\right)$ et :

$$\underline{rg\left(M_n^{\,n-1-r}\right) = r\,.}$$

De plus :

$$\left(M_n^{\,n-1-r}\right)^2 = \left(M_n^{\,2(n-1-r)}\right)^2 = \left(\begin{array}{c:c} N_{n-1}^{\,2(n-1-r)} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix}0 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 \end{array}\right).$$

Or, ici $2r < n$, donc $n \geq 2r+1$ et $2(n-1-r) \geq n-1$, d'où $N_{n-1}^{\,2(n-1-r)} = 0_{n-1}$ d'après la question 1. Ainsi :

$$\underline{\left(M_n^{\,n-1-r}\right)^2 = 0_n\,.}$$

Les deux hypothèses sont réunies pour affirmer que $M_n^{\,n-1-r}$ est semblable à $N_n^{\,n-r}$, et donc que :

$$\boxed{M_n^{\,n-1-r} \text{ est semblable à } A.}$$

Comme A et $M_n^{\,n-1-r}$ sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PM_n^{\,n-1-r}P^{-1}$.

Ici, $n-r$ est impair, $n-1-r$ est pair et on peut poser $p = \dfrac{n-1-r}{2} \in \mathbb{N}$ (car $n \geq 2r+1$ donc $n-1-r \geq r > 0$) et $B = PM_n^{\,p}P^{-1}$. On a alors :

$$B^2 = \left(PM_n^{\,p}P^{-1}\right)^2 = P\left(M_n^{\,p}\right)^2 P^{-1} = PM_n^{\,2p}P^{-1} = PM_n^{\,n-1-r}P^{-1} = A\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B^2 = A\,.}$$

7) On suppose ici que $n-r$ est impair et $2r=n$.

a. Si $n=2r$ alors n est pair. Comme $n-r$ est impair, ceci implique que $r=n-(n-r)$ est lui aussi impair et donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $r=2p+1$ et $n=2r=2(2p+1)$.

Alors, A est semblable à $N_n^{n-r}=N_{2(2p+1)}^{2p+1}=\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } p\in\mathbb{N} \text{ tel que } n=2(2p+1),\ r=2p+1 \text{ et } A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}.}$$

b. Supposons qu'il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2=A$.

Comme A est semblable à $\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}$, il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A=P\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}P^{-1}$.

Posons $B'=P^{-1}BP=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$ avec $B_1,B_2,B_3,B_4\in\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. On a :

$$(B')^2=(P^{-1}BP)^2=P^{-1}B^2P=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}.$$

Les matrices B' et $(B')^2$ commutent, donc $\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}$ et $(B')^2$ commutent. Ainsi :

$$\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0_{2p+1} & B_1\\ 0_{2p+1} & B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_3 & B_4\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}B_3=0_{2p+1}\\ B_1=B_4\end{cases}$$

Alors :

$$(B')^2=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0_{2p+1} & B_1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}B_1^2 & B_1B_2+B_2B_1\\ 0_{2p+1} & B_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{2p+1} & I_{2p+1}\\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}B_1^2=0_{2p+1}\\ B_1B_2+B_2B_1=I_{2p+1}\end{cases}$$

Dans le cas où $n=2$, on a $2p+1=1$, donc $B'=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ 0 & b_1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{cases}b_1^2=0\\ b_1b_2+b_2b_1=1\end{cases}$, soit $\begin{cases}b_1=0\\ 2b_1b_2=1\end{cases}$ qui est absurde.

Dans le cas où $n>2$, on a $p>0$ et $2p+1>2$. Comme $B_1^2=0_{2p+1}$, d'après la question 4, il existe une matrice $Q\in GL_{2p+1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}B_1Q=N_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ avec $r_1=rg(B_1)$. Alors, en posant $C=Q^{-1}B_2Q$, on a :

$$I_{2p+1}=Q^{-1}I_{2p+1}Q=Q^{-1}\left(B_1B_2+B_2B_1\right)Q=N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C+CN_{2p+1}^{2p+1-r_1}.$$

Or, d'après la question 2, $rg(B_1)=r_1\le\dfrac{2p+1}{2}=p+\dfrac{1}{2}$, donc $r_1\le p$ (car r_1 est entier). Rappelons que :

$$N_{2p+1}^{2p+1-r_1}=\begin{array}{c}\text{colonne } n-r_1+1\\ \downarrow\\ \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 1\\ \vdots & & & & \ddots & & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \leftarrow r_1^{ième} \text{ ligne}\end{array}$$

On a $r_1 \leq p$ et $n - r_1 + 1 \geq n - p + 1 = p + 2$, donc la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne et la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ sont nulles, ce qui implique que la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C$ et la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne de $CN_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ sont nulles.

Alors, le coefficient central, d'indices $p+1, p+1$ de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C + N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C$ est nul, ce qui contredit la relation $N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C + CN_{2p+1}^{2p+1-r_1} = I_{2p+1}$ trouvée plus haut.

Finalement, dans les deux cas, supposer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ mène à une absurdité et donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B^2 = A.}$$

8) D'après la question 2, on a toujours $2r \leq n$. On a alors trois possibilités :

- $n - r$ est pair ;
- $n - r$ est impair et $2r < n$;
- $n - r$ est impair et $2r = n$.

Ainsi, les questions 5, 6 et 7 balayent tous les cas possibles, donc :

$$\boxed{\text{Il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A \text{ sauf quand } n = 2(2p+1) \text{ et } rg\,(A) = 2p+1.}$$