Corrigé du DS n° 1

Problème n° 1

PRELIMINAIRES

1) Les fonctions $|f|$ et h sont réelles positives sur $[1,+\infty[$, donc $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ et $x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ sont croissantes sur $[1,+\infty[$. Comme $x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ que l'on notera L, on a $\int_1^x h(t)dt \le L$ pour tout $x \in [1,+\infty[$. Comme $|f(x)| \le h(x)$, on a pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x |f(t)|dt \le \int_1^x h(t)dt \le L.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ est croissante et majorée par L sur $[1,+\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty.}$$

2) On suppose dans un premier temps f réelle et on pose :

$$f_+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } f(x) \ge 0 \\ -f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases}$$

On a pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \le f_+(x) \le |f(x)|$ et $0 \le f_-(x) \le |f(x)|$. Comme $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, les fonctions $x \mapsto \int_1^x |f_+(t)|dt = \int_1^x f_+(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x |f_-(t)|dt = \int_1^x f_-(t)dt$ admettent une limite finie quand $x \to +\infty$.

Or, $f = f_+ + f_-$, donc pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x f_+(t)dt + \int_1^x f_-(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

On suppose maintenant que f est à valeurs complexes. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|\mathrm{Re}(f(x))| \le |f(x)|$, donc, d'après la question 1, $x \mapsto \int_1^x |\mathrm{Re}(f(t))|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et d'après ce qui précède, $x \mapsto \int_1^x \mathrm{Re}(f(t))dt = \mathrm{Re}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

On prouve de même que $x \mapsto \int_1^x \mathrm{Im}(f(t))dt = \mathrm{Im}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et finalement, $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Si } x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty, \text{ alors } x \mapsto \int_1^x f(t)dt \text{ aussi.}}$$

3) a. Pour tout entier naturel $n \ge 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car f est de classe C^1) :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) = \left[t f(t)\right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n t f'(t)dt - f(n) \\ &= n f(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^n t f'(t)dt - f(n) = (n-1)\left[f(n) - f(n-1)\right] - \int_{n-1}^n t f'(t)dt \\ &= (n-1)\int_{n-1}^n f'(t)dt - \int_{n-1}^n t f'(t)dt \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t)dt}$$

On a alors :

$$|w_n| = \left|\int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t)dt\right| \le \int_{n-1}^n |(n-1-t) f'(t)|dt = \int_{n-1}^n |n-1-t||f'(t)|dt.$$

Or, pour tout $t \in [n-1,n]$, $|n-1-t| = t-(n-1) \le 1$, donc :

$$\boxed{|w_n| \le \int_{n-1}^n |f'(t)|dt}$$

b. Pour tout entier naturel $n \ge 2$, on a $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k |f'(t)|dt = \int_1^n |f'(t)|dt$. Or, $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, donc la série $\sum \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$ converge et par comparaison, $\sum |w_n|$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ est absolument convergente.}}$$

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, pour tout entier naturel $n \ge 2$, on a $f(n) = \int_{n-1}^n f(t)dt - w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\sum \int_{n-1}^n f(t)dt$ converge. Enfin, $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t)dt = \int_1^n f(t)dt$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge si et seulement si la suite } \left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

4) a. La fonction f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}.$$

Alors, pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $|f'(x)| \le \frac{|\cos\sqrt{x}|}{2x\sqrt{x}} + \frac{|\sin\sqrt{x}|}{x^2} \le \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Donc, d'après la question 1 :

$$\boxed{x \mapsto \int_1^x |f'(t)|dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty.}$$

b. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, en posant le changement de variable $u=\sqrt{t}$ (soit $t=u^2$ et $dt=2udu$), on a :

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u^2}2udu=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u}du.$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t)dt=2\left(\left[\frac{-\cos u}{u}\right]_1^{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}-\frac{-\cos u}{u^2}du\right)=2\left(\cos 1-\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^2}du\right).$$

Ainsi, on a bien, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_1^x f(t)dt=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u}du=2\left(\cos 1-\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^2}du\right)}$$

c. On a pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\int_1^{\sqrt{x}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|du \le \int_1^{\sqrt{x}}\frac{du}{u^2}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x\mapsto\int_1^{\sqrt{x}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|du$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

D'après la question 2, il en va de même pour $x\mapsto\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^2}du$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$, la fonction $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x\to+\infty$.

Ceci prouve que la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction *f* vérifie les hypothèses de la question 3, ce qui permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum\frac{\sin\sqrt{n}}{n} \text{ converge.}}$$

Partie I

5) On a ici $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S\neq 0$. Comme $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k=\frac{S_n}{n}$, on a :

$$v_n\sim\frac{S}{n}.$$

Or, la série harmonique diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

6) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{(-1)^n}{2\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, soit, plus simplement :

$$u_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{quand } n \text{ est pair}\\ -\frac{1}{n+1} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On a alors pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$S_{2p}=\sum_{k=1}^{2p}u_k=\sum_{k=1}^{p}u_{2k}+\sum_{k=1}^{p}u_{2k-1}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}=0.$$

Et :

$$S_{2p+1}=S_{2p}+u_{2p+1}=0-\frac{1}{2p+1+1}=-\frac{1}{2(p+1)}.$$

Donc, $\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p}=\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p+1}=0$, et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S=0.}$$

D'après ce qui précède :

$$v_n=\frac{S_n}{n}=\begin{cases}0 & \text{quand } n \text{ est pair}\\ -\frac{1}{n(n+1)} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann converge, la série $\sum\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

7) On procède comme ci-dessus. On a pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases}u_{2p}=\frac{1}{\ln(p+1)}\\ u_{2p-1}=-\frac{1}{\ln(p+1)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_{2p}=0\\ S_{2p-1}=-\frac{1}{\ln(p+1)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{2p}=0\\ v_{2p-1}=-\frac{1}{(2p-1)\ln(p+1)}\end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p}=\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p-1}=0$, d'où :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S=0.}$$

Comme $v_{2p-1}\sim-\frac{1}{2p\ln p}$ et la série $\sum\frac{1}{n\ln n}$ diverge (par comparaison série-intégrale) :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

8) Dans les deux questions précédentes, on a $S=0$ et une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\text{Quand } S=0\text{, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n.}$$

PARTIE II

9) Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, S_n et donc v_n sont de signe constant à partir d'un certain rang (positif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$, négatif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$).

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}|S_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}|n\,v_n|=+\infty$, donc $\dfrac{1}{n}=o(v_n)$. Comme la série harmonique diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

PARTIE III

10) Ici, $u_n=(-1)^n$. La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=(-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{(-1)^n-1}{2}.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{(-1)^n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}$. La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

11) Ici, $u_1=-1$ et, pour $n\geq 2$, $u_n=2(-1)^n$.

La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq 2$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=-1+2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k=-1+2(-1)^2\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}=(-1)^n.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{(-1)^n}{n}$ et la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

12) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Quand la série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement et que } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'admet pas}\\ \text{de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n.\end{array}}$$

PARTIE IV

13) $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}u_n&=\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})\\&=2\sin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right)\\&=2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc $|u_n|\leq 2\left|\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\right|$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)=\sin 0=0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

De plus, on a par télescopage, $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(\sqrt{k})-\sin(\sqrt{k-1})\right)=\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{0})=\sin(\sqrt{n}).$$

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{n^2}=\sin n$, donc, d'après le résultat rappelé dans l'énoncé, $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Or, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettait une limite, toute suite extraite aurait la même limite, y compris $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ et, d'après la question les préliminaires, la série $\sum\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

14) Comme la suite u est la même que celle de la question précédente en dehors de son premier terme, sa limite est toujours 0. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=1+\sin(\sqrt{n})$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a ici $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1+\sin(\sqrt{n})}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. Comme $\sum\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge et $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

15) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\text{Quand la série } \sum u_n \text{ diverge, mais pas grossièrement, et que } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n.}$$

Conclusion

16) Dans les quatre parties précédentes, nous avons passé en revue tous les comportements possibles pour la série $\sum u_n$: convergence, divergence vers l'infini ou absence de limite pour la somme partielle.

En définitive, on peut conclure quant à la nature de $\sum v_n$ uniquement dans le cas où la somme partielle S_n de la suite u admet une limite non nulle (finie ou infinie).

Problème n° 2

Q1. Soit $C=diag\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a alors $\overline{C}=diag\,(\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n)$ et

$$I_n+C\overline{C}=diag\,(1+z_1\overline{z}_1,\dots,1+z_n\overline{z}_n)=diag\left(1+|z_1|^2,\dots,1+|z_n|^2\right).$$

Donc :

$$\det\left(I_n+C\overline{C}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_k|^2\right).$$

Comme pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $1+|z_k|^2$ est un réel supérieur ou égal à 1, on a :

$$\boxed{\det\left(I_n+C\overline{C}\right)\in\mathbb{R} \text{ et } \det\left(I_n+C\overline{C}\right)\geq 1.}$$

De plus :

$$\det\left(I_n+C\overline{C}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_k|^2\right)=1 \iff \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ 1+|z_k|^2=1 \iff \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ z_k=0.$$

Donc :

$$\boxed{\det\left(I_n+C\overline{C}\right)=1 \text{ si et seulement si } C=0_n.}$$

Q2. On veut prouver par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et toute matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\det(\overline{A})=\overline{\det A}.$$

- Pour $n=1$, pour tout $A=(a_{1,1})\in\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, on a $\det A=a_{1,1}$ et $\overline{A}=(\overline{a}_{1,1})$, donc $\det(\overline{A})=\overline{a}_{1,1}=\overline{\det A}$.

  La propriété est donc vraie au rang $n=1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

  Pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, notons $A_i\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice obtenue en enlevant la dernière colonne et la $i^{\text{ième}}$ de la matrice A. On a alors en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}\,\overline{a}_{i,n+1}\det(\overline{A}_i).$$

  Or, par hypothèse de récurrence, on a $\det(\overline{A}_i)=\overline{\det A_i}$ pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, donc :

$$\det(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}\,\overline{a}_{i,n+1}\overline{\det A_i}=\sum_{i=1}^{n+1}\overline{(-1)^{n+i}a_{i,n+1}\det A_i}=\overline{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}a_{i,n+1}\det A_i}.$$

  Et comme en développant par rapport à la dernière colonne, on a $\det A=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}a_{i,n+1}\det A_i$, on obtient :

$$\det(\overline{A})=\overline{\det A}.$$

  Ainsi, la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\overline{A})=\overline{\det A}.}$$

Q3. Ici, $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $C+iI_n$ et $C-iI_n$ commutent, on a :

$$(C+iI_n)(C-iI_n)=C^2+I_n.$$

De plus, comme C est réelle, $C+iI_n=\overline{C-iI_n}$, donc :

$$\det\left(I_n+C^2\right)=\det\left[(C+iI_n)(C-iI_n)\right]=\det\left(C+iI_n\right)\det\left(C-iI_n\right)=\det\left(\overline{C-iI_n}\right)\det\left(C-iI_n\right).$$

Avec la question précédente, on obtient :

$$\det\left(I_n+C^2\right)=\overline{\det\left(C-iI_n\right)}\det\left(C-iI_n\right).$$

Soit :

$$\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)=\left|\det\left(C-iI_n\right)\right|^2}$$

Comme $|z|^2\in\mathbb{R}_+$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a bien :

$$\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)\in\mathbb{R}_+}$$

De plus, comme ici $\overline{C}=C$, on a :

$$\det\left(I_n+C\overline{C}\right)=\det\left(I_n+C^2\right)=0 \iff \left|\det\left(C-iI_n\right)\right|=0 \iff \det\left(iI_n-C\right)=0 \iff i\in Sp\left(C\right).$$

Soit :

$$\boxed{\det\left(I_n+C\overline{C}\right)=0 \iff i\in Sp\left(C\right)}$$

Q4. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée.

Montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ que pour toute matrice $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p\end{pmatrix}=\det A$.

- Pour $p=1$, soit $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}=(-1)^{2(n+1)}\times 1\times\det A=\det A.$$

Donc, la propriété est vraie au rang $p=1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $p\in\mathbb{N}^*$.

Soit $B\in\mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{C})$. On peut écrire $B=\left(B_1 \mid \beta\right)$ avec $\beta\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $B_1\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Alors :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p+1,n} & I_{p+1}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A' & \beta' \\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix}$$

avec $A'=\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p\end{pmatrix}$ et $\beta'=\begin{pmatrix} \beta \\ 0_{p,1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{C})$.

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p+1,n} & I_{p+1}\end{pmatrix}=\det\left(A'\right).$$

Et, par hypothèse de récurrence, $\det\left(A'\right)=\det\left(A\right)$, donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p+1,n} & I_{p+1}\end{pmatrix}=\det\left(A\right)$.

La propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p\end{pmatrix}=\det A.}$$

Q5. En utilisant le premier résultat admis, on obtient :

$$C_0\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n+C\overline{C} & -C \\ 0_n & I_n\end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$\det\left[C_0\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n\end{pmatrix}\right]=\det\left(C_0\right)\times\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} I_n+C\overline{C} & -C \\ 0_n & I_n\end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n\end{pmatrix}=\det\left(\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\right)=\det\begin{pmatrix} I_n & -\overline{C} \\ 0_n & I_n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=\left(\det I_n\right)\times\left(\det I_n\right)=1$$

$$\det\begin{pmatrix} I_n+C\overline{C} & -C \\ 0_n & I_n\end{pmatrix}=\left(\det\left(I_n+C\overline{C}\right)\right)\times\left(\det I_n\right)=\det\left(I_n+C\overline{C}\right)$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\det\left(C_0\right)=\det\left(I_n+C\overline{C}\right)}$$

PSI* septembre 2023

Q6. Si $M_{(e_1,e_2)}(\varphi)=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases}\varphi(e_1)=re_1+te_2\\ \varphi(e_2)=se_1+ue_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(e_2)=ue_2+se_1\\ \varphi(e_1)=te_2+re_1\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M_{(e_2,e_1)}(\varphi)=\begin{pmatrix} u & t \\ s & r\end{pmatrix}}$$

Q7. On considère $R,S,T,U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $R=(r_{i,j}),\ S=(s_{i,j}),\ T=(t_{i,j}),\ U=(u_{i,j})$.

Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}_c=(e_1,\dots,e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. On a :

$$\begin{cases}\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n r_{i,j}e_i+\sum_{i=1}^n t_{i,j}e_{n+i} & \text{pour } 1\le j\le n\\ \varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n s_{i,j}e_i+\sum_{i=1}^n u_{i,j}e_{n+i} & \text{pour } n+1\le j\le 2n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n u_{i,j}e_{n+i}+\sum_{i=1}^n s_{i,j}e_i & \text{pour } n+1\le j\le 2n\\ \varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n t_{i,j}e_{n+i}+\sum_{i=1}^n r_{i,j}e_i & \text{pour } 1\le j\le n\end{cases}$$

Si on note $\mathcal{B}_1$ la base $(e_{n+1},\dots,e_{2n},e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{C}^{2n}$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}_1}(\varphi)=\begin{pmatrix} U & T \\ S & R\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R\end{pmatrix}$ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} R & S \\ T & U\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix} U & T \\ S & R\end{pmatrix}\text{ sont semblables.}}$$

On a aussi :

$$\begin{cases}\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n r_{i,j}e_i+\sum_{i=1}^n(-t_{i,j})(-e_{n+i}) & \text{pour } 1\le j\le n\\ \varphi(-e_j)=-\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^n(-s_{i,j})e_i+\sum_{i=1}^n u_{i,j}(-e_{n+i}) & \text{pour } n+1\le j\le 2n\end{cases}$$

Si on note $\mathcal{B}_2$ la base $(e_1,\dots,e_n,-e_{n+1},\dots,-e_{2n})$ de $\mathbb{C}^{2n}$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}_2}(\varphi)=\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U\end{pmatrix}$ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} R & S \\ T & U\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U\end{pmatrix}\text{ sont semblables.}}$$

Q8. Notons $\chi_{C_0} = \det\left(X\,I_{2n} - C_0\right)$.

D'après la question précédente, les matrices $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_n & \overline{C} \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & -\overline{C} \\ C & I_n \end{pmatrix} = \overline{C}_0$ sont semblables, donc il existe $P \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $\overline{C}_0 = P^{-1}C_0P$ et :

$$\begin{aligned}\chi_{\overline{C}_0} &= \det\left(X\,I_{2n} - \overline{C}_0\right) = \det\left(X\,I_{2n} - P^{-1}C_0P\right)\\ &= \det\left(X\,P^{-1}P - P^{-1}C_0P\right) = \det\left(P^{-1}(X\,I_{2n} - C_0)P\right) = \det\left(X\,I_{2n} - C_0\right) = \chi_{C_0}\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_{\overline{C}_0} = \chi_{C_0}$.

Or, d'après la question **Q2** :

$$\chi_{\overline{C}_0} = \det\left(X\,I_{2n} - \overline{C}_0\right) = \det\left(\overline{X\,I_{2n} - C_0}\right) = \overline{\det\left(X\,I_{2n} - C_0\right)} = \overline{\chi_{C_0}}\,.$$

Finalement, on a $\chi_{\overline{C}_0} = \chi_{C_0} = \overline{\chi_{C_0}}$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_{C_0} = \det\left(X\,I_{2n} - C_0\right) \text{ est à coefficients réels.}}$$

Q9. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

a) On a :

$$C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - C\overline{X} \\ -C\overline{Y} + \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\overline{X} - \overline{Y} \\ \overline{X} - C\overline{Y} \end{pmatrix}$$

$$\Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} X - CY \\ \overline{C}X + Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{C}X + Y} \\ \overline{X - CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\overline{X} - \overline{Y} \\ \overline{X} - C\overline{Y} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)}$$

b) De plus :

$$\Omega \circ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{X}} \\ \overline{-\overline{Y}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Ceci étant vrai pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on a bien :

$$\boxed{\Omega \circ \Omega = -\,id_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}}$$

c) Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{\lambda Y} \\ \overline{\lambda X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\lambda}\,\overline{Y} \\ \overline{\lambda}\,\overline{X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda}\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda}\,\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\,\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)}$$

PSI* septembre 2023

Q10. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ avec $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X - \mu\overline{Y} \\ \lambda Y + \mu\overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda X - \mu\overline{Y} = 0_{n,1} \\ \mu\overline{X} + \lambda Y = 0_{n,1} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda X - \mu\overline{Y} = 0_{n,1} & (1) \\ \overline{\mu}X + \overline{\lambda}\,\overline{Y} = 0_{n,1} & (2) \end{cases}$$

En effectuant $\overline{\lambda}(1) + \mu(2)$, on obtient $(|\lambda|^2 + |\mu|^2)X = 0_{n,1}$, et en effectuant $-\overline{\mu}(1) + \lambda(2)$, on obtient $(|\lambda|^2 + |\mu|^2)\overline{Y} = 0_{n,1}$. Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} X \\ \overline{Y} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$. Alors, $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est libre.}}$$

Notons $Z_1 = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $Z_2 = \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$ et $P = \operatorname{Vect}\left(Z_1, Z_2\right)$.

On a $\Omega\left(Z_1\right) = Z_2 \in P$ et $\Omega\left(Z_2\right) = \Omega \circ \Omega\left(Z_1\right) = -Z_1 \in P$, et donc :

$$\boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est stable par } \Omega\,.}$$

Q11. On conserve les notations $Z_1 = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $Z_2 = \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}$ et $P = \operatorname{Vect}\left(Z_1, Z_2\right)$.

Soit $Z \in E \cap P$. On a alors $Z = aZ_1 + bZ_2 = \begin{pmatrix} aX - b\overline{Y} \\ aY + b\overline{X} \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Comme E et P sont tous deux stables par Ω, on a aussi $\Omega(Z) \in E \cap P$. Et :

$$\Omega(Z) = \Omega\left(\begin{pmatrix} aX - b\overline{Y} \\ aY + b\overline{X} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{aY + b\overline{X}} \\ \overline{aX - b\overline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}\overline{Y} - \overline{b}X \\ \overline{a}\overline{X} - \overline{b}Y \end{pmatrix} = \overline{a}\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} - \overline{b}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \overline{a}Z_2 - \overline{b}Z_1\,.$$

Alors $\overline{a}Z - b\,\Omega(Z) = \left(|a|^2 + |b|^2\right)Z_1 \in E$ (car E est stable par combinaisons linéaires) et si $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$, alors $Z_1 \in E$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc, $|a|^2 + |b|^2 = 0$, soit $a = b = 0$ et donc $Z = 0_{2n,1}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E \cap \left[\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)\right] = \left\{0_{2n,1}\right\}}$$

Q12. Soit $\lambda \in Sp(C_0)$.

D'après la question **Q8**, $\chi_{C_0} = \det(XI_{2n} - C_0)$ est à coefficients réels, donc si λ est racine de χ_{C_0}, $\overline{\lambda}$ l'est aussi, autrement dit :

$$\boxed{\overline{\lambda} \in Sp(C_0)}$$

D'après la question **Q9**, on a pour tout $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega(Z) = \Omega(C_0 Z)$ et $\Omega(\lambda Z) = \overline{\lambda}\,\Omega(Z)$.

Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_0^k\Omega(Z) = \Omega(C_0^k Z)$.

- Pour $k = 0$, on a $C_0^0 = I_n$ donc $C_0^0\Omega(Z) = \Omega(Z) = \Omega(C_0^0 Z)$ et la propriété est vraie au rang $k = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} C_0^{k+1}\Omega(Z) &= C_0\left(C_0^k\Omega(Z)\right) = C_0\left(\Omega\left(C_0^k Z\right)\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \Omega\left(C_0\left(C_0^k Z\right)\right) \quad \text{d'après la question } \mathbf{Q9}.\text{a} \\ &= \Omega\left(C_0^{k+1} Z\right) \end{aligned}$$

  La propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par linéarité de la conjugaison , on a pour tous $X, Y, X', Y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} X + X' \\ Y + Y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{(Y+Y')} \\ \overline{X + X'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - \overline{Y'} \\ \overline{X} + \overline{X'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\overline{Y'} \\ \overline{X'} \end{pmatrix} = \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \Omega\left(\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right).$$

Alors, avec la question **Q9**.c, on a pour tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} \Omega(P(C_0)Z) &= \Omega\left(\sum_{k=0}^{p} a_k C_0^k Z\right) = \sum_{k=0}^{p} \Omega\left(a_k C_0^k Z\right) = \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \Omega\left(C_0^k Z\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k C_0^k \Omega(Z) = \left(\sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k C_0^k\right)\Omega(Z) = \overline{P}(C_0)\Omega(Z) \end{aligned}$$

Avec $P = (\lambda - X)^{\alpha_\lambda}$, donc $\overline{P} = (\overline{\lambda} - X)^{\alpha_\lambda}$, on a pour tout $Z \in F_\lambda = \ker\left[(\lambda I_n - C_0)^{\alpha_\lambda}\right]$:

$$(\overline{\lambda} I_n - C_0)^{\alpha_\lambda}\,\Omega(Z) = \Omega\left((\lambda I_n - C_0)^{\alpha_\lambda} Z\right) = \Omega(0) = 0.$$

Donc, pour tout $Z \in F_\lambda$, $\Omega(Z) \in F_{\overline{\lambda}}$ et ainsi : $\underline{\Omega(F_\lambda) \subset F_{\overline{\lambda}}}$.

On a de la même façon, $\Omega(F_{\overline{\lambda}}) \subset F_\lambda$ et donc $\Omega \circ \Omega(F_{\overline{\lambda}}) \subset \Omega(F_\lambda)$. Or, d'après la question **Q9**.b, $\Omega \circ \Omega = -id_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$. Comme $F_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on a $-F_{\overline{\lambda}} = F_{\overline{\lambda}}$, d'où $\Omega \circ \Omega(F_{\overline{\lambda}}) = F_{\overline{\lambda}}$. Ainsi : $\underline{F_{\overline{\lambda}} \subset \Omega(F_\lambda)}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}}$$

Q13. Soit $\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}$, d'après la question précédente, $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}} = F_\lambda$, donc F_λ est stable par Ω.

Soit $Z \in F_\lambda \setminus \{0_{2n,1}\}$. On a $\Omega(Z) \in F_\lambda$ et d'après la question **Q10**, $(Z, \Omega(Z))$ est libre. Ainsi, $\dim F_\lambda \geq 2$.

Supposons que $\dim F_\lambda$ est impaire, soit $\dim F_\lambda = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$, il existe une famille $(E_1, \dots, E_k)$ de F_λ telle que $(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k))$ soit une famille libre de F_λ.

- On vient de faire l'initialisation pour $k = 1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in [\![1, p]\!]$.

  Par hypothèse de récurrence, il existe une famille libre de F_λ de la forme $(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k))$.

  Notons $E = \mathrm{Vect}(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k))$. Comme $2k \leq 2p < 2p+1$, il existe $E_{k+1} \in F_\lambda \setminus E$.

  Par stabilité de F_λ par Ω, on a $\Omega(E_{k+1}) \in F_\lambda$ et d'après la question **Q11**, on a :

$$E \cap \mathrm{Vect}(E_{k+1}, \Omega(E_{k+1})) = \{0_{2n,1}\}.$$

  Donc :

$$\begin{aligned} E + \mathrm{Vect}(E_{k+1}, \Omega(E_{k+1})) &= E \oplus \mathrm{Vect}(E_{k+1}, \Omega(E_{k+1})) \\ &= \mathrm{Vect}(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k)) \oplus \mathrm{Vect}(E_{k+1}, \Omega(E_{k+1})) \end{aligned}$$

  Comme la famille $(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k))$ est libre et $(E_{k+1}, \Omega(E_{k+1}))$ aussi d'après **Q10**, la famille $(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_k, \Omega(E_k), E_{k+1}, \Omega(E_{k+1}))$ est une famille libre de F_λ. Ceci prouve que la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

En particulier, pour $k = p+1$, il existe $(E_1, \dots, E_{p+1}) \in F_\lambda^p$ telle que $(E_1, \Omega(E_1), \dots, E_{p+1}, \Omega(E_{p+1}))$ soit une famille libre $2p+2$ de F_λ. Ceci est absurde car entraine $\dim F_\lambda \geq 2p+2 > 2p+1$.

Ainsi, supposer que $\dim F_\lambda$ est impaire aboutit à une absurdité et donc :

$$\boxed{\text{Quand } \lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R},\ \dim F_\lambda \text{ est paire.}}$$

Q14. On a $\det(XI_{2n} - C_0) = \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ et, en évaluant en 0, on obtient :

$$\det(-C_0) = \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \left(-\lambda^{\alpha_\lambda}\right).$$

Or, $\det(-C_0) = (-1)^{2n}\det(C_0) = \det(C_0)$ et comme $\sum_{\lambda \in Sp(C_0)} \alpha_\lambda = \deg\left[\det(XI_{2n} - C_0)\right] = 2n$, on a :

$$\prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \left(-\lambda^{\alpha_\lambda}\right) = (-1)^{\sum_{\lambda \in Sp(C_0)} \alpha_\lambda} \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda} = (-1)^{2n} \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda} = \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda}.$$

Ainsi, $\det(C_0) = \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda}$ et d'après résultat admis, on a alors :

$$\det(C_0) = \prod_{\lambda \in Sp(C_0)} \lambda^{\dim F_\lambda}.$$

Comme $\Omega \circ \Omega = -id_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, Ω est bijective (de réciproque $-\Omega$).

Attention cependant : $\Omega(\lambda Z) = \overline{\lambda}\Omega(Z)$, donc Ω n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

Pour tout $\lambda \in Sp(C_0)$, on a $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$ et $\Omega(F_{\overline{\lambda}}) = F_\lambda$ d'après la question **Q12**.

Si $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_p)$ est une base de F_λ alors $\Omega(\mathcal{B})$ est génératrice de $F_{\overline{\lambda}}$ et pour tous $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{C}$:

$$\beta_1\Omega(E_1) + \dots + \beta_p\Omega(E_p) = 0_{2n,1} \iff \Omega(\overline{\beta}_1 E_1 + \dots + \overline{\beta}_p E_p) = 0_{2n,1} \iff \overline{\beta}_1 E_1 + \dots + \overline{\beta}_p E_p = -\Omega(0_{2n,1}) = 0_{2n,1}.$$

Et comme $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_p)$ est libre, on a $\overline{\beta}_1 = \dots = \overline{\beta}_p = 0$, donc $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ et ainsi, $\Omega(\mathcal{B})$ est libre.

Ceci permet de conclure que $\Omega(\mathcal{B})$ est une base de $F_{\overline{\lambda}}$ et donc que :

$$\dim F_\lambda = \dim F_{\overline{\lambda}}.$$

On a :

$$Sp(C_0) = (Sp(C_0) \cap \mathbb{R}) \cup \{\lambda \in Sp(C_0) \setminus \operatorname{Im}(\lambda) > 0\} \cup \{\overline{\lambda} \setminus \lambda \in Sp(C_0), \operatorname{Im}(\lambda) > 0\}.$$

Et cette union est disjointe, donc :

$$\begin{aligned}
\det(C_0) &= \prod_{\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}} \lambda^{\dim F_\lambda} \prod_{\lambda \in Sp(C_0),\, \operatorname{Im}(\lambda) > 0} \lambda^{\dim F_\lambda} \overline{\lambda}^{\dim F_{\overline{\lambda}}} \\
&= \prod_{\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}} \lambda^{\dim F_\lambda} \prod_{\lambda \in Sp(C_0),\, \operatorname{Im}(\lambda) > 0} \lambda^{\dim F_\lambda} \overline{\lambda}^{\dim F_\lambda} \\
&= \prod_{\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}} \lambda^{\dim F_\lambda} \prod_{\lambda \in Sp(C_0),\, \operatorname{Im}(\lambda) > 0} |\lambda|^{2\dim F_\lambda}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\dim F_\lambda$ est paire, donc quand $\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}$, on a $\lambda^{\dim F_\lambda} \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\prod_{\lambda \in Sp(C_0) \cap \mathbb{R}} \lambda^{\dim F_\lambda} \in \mathbb{R}_+.$$

On a aussi $|\lambda|^{\dim F_\lambda} \in \mathbb{R}_+$ quand $\lambda \in Sp(C_0) \setminus \mathbb{R}$, donc :

$$\prod_{\lambda \in Sp(C_0),\, \operatorname{Im}(\lambda) > 0} |\lambda|^{2\dim F_\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi :

$$\det(C_0) \in \mathbb{R}_+.$$

Finalement, comme $\det(C_0) = \det(I_n + C\overline{C})$, on a bien :

$$\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+}$$