DM de Mathématiques n° 2

Extrait et adapté de Centrale - PC - 2003

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n(b)=\sum_{k=0}^{n} b_k .$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$R_n(a)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad R_n(b)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k .$$

1) Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(b)$.

   En déduire que $S_n(a)=S(a)-R_n(b)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(R_n(b)\right)$ où $S(a)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

2) Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors $S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(b)$.

3) Prouver (*sans utiliser la comparaison série-intégrale*) que pour tout entier $p\geq 2$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} .$$

   ☺ *On pourra remarquer que* :

$$\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+p-2)}-\frac{1}{(n+1)...(n+p-1)}\right).$$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

   a. A l'aide de ce qui précède, prouver que :

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

   où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

   ☺ *On pourra poser* $u_n=H_n-\ln n-\frac{1}{2n}$ *et s'intéresser à la série* $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

   b. Déterminer le terme suivant du développement asymptotique de H_n.

5) Montrer que $n!=\delta n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+\frac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. On donnera la valeur de δ.