DM de Mathématiques n° 3

L'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ est muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$, c'est-à-dire vérifiant pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$. On admettra qu'alors pour toute $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$e_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k .$$

On admet que la suite $\left(e_n(A)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on note $e(A)$ sa limite.

Dans ce qui suit, et sauf mention contraire, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1) Soit $P \in GL_p(\mathbb{C})$. Après avoir justifié la continuité de $M \mapsto P^{-1}MP$, montrer que :

$$e(P^{-1}AP) = P^{-1}e(A)P .$$

2) On suppose que A est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & & (0) \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & B_r \end{pmatrix}$$

où $P \in GL_p(\mathbb{C})$ et les B_j sont des matrices carrées (pas forcément de mêmes dimensions).

Calculer $e(A)$ en fonction des B_j et P.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$. En déduire que :

$$e(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n .$$

4) Prouver que :

   a. $e(A^\mathsf{T}) = e(A)^\mathsf{T}$.

   b. $\det\left(e(A)\right) = e^{tr(A)}$. ☺ *On admettra que toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure et que deux matrices semblables ont la même trace.*

5) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que :

$$e(A+B) = e(A)e(B) = e(B)e(A) .$$

6) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour toutes matrices A et B de la boule ouverte $B(0_p, R)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^k - B^k\| \leq kR^{k-1}\|A - B\|$.

7) A l'aide de la question précédente, montrer que l'application $e : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\,; M \mapsto e(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

8) L'application $e : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\,; M \mapsto e(M)$ est-elle bijective ?