DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Problème n° 1

Moyenne de Césaro et séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k \quad \text{et} \quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{S_n}{n}$$

(v est la moyenne de Césaro de u).

L'objet de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum v_n$, suivant celle de $\sum u_n$.

PRELIMINAIRES

Soit $f\in C^1([1,+\infty[,\mathbb{C})$.

1) Montrer que s'il existe $h\in C([1,+\infty[,\mathbb{R}_+)$ telle que $x\mapsto\int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ et, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $|f(x)|\le h(x)$, alors $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

2) Prouver que si $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, alors $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

   ☺ *On s'inspirera de la preuve de la propriété disant qu'une série absolument convergente est convergente, notamment en commençant par le cas où f est à valeurs réelles.*

3) On suppose que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t)dt,$$

   puis que :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

   b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

   c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) On pose $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

   a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   b. Prouver que $\forall\, x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x f(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}du\right).$$

   c. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

PARTIE I

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

5) Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante quand $S \neq 0$.

6) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$ (E désigne la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

7) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\left[1+\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right]}$ (E désigne encore la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis, à l'aide des préliminaires, déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

8) Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE II

9) On suppose ici que la série $\sum u_n$ diverge vers + ∞ ou – ∞. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

10) On pose ici $u_n = (-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

11) On pose ici $u_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 2(-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

12) Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE IV

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

13) On pose ici $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

    On rappelle que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

14) On reprend ici la même suite que dans la question précédente en rajoutant 1 au premier terme, soit $u_1 = 1 + \sin 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie toujours les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

15) Que déduire des deux questions précédentes ?

CONCLUSION

16) Dans quels cas peut-on conclure quant à la nature de $\sum v_n$ quand on connait le comportement de $\sum u_n$?

Problème n° 2

Extrait adapté de : CCINP – PSI – 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note $\overline{C}$ la matrice conjuguée de *C*, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue en remplaçant chaque coefficient de *C* par son conjugué.

L'objectif de ce problème est de montrer que :

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+.$$

On admettra les résultats suivants.

- Pour toutes $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

- Pour toute $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\det\left(X I_p - M\right)$ est un polynôme unitaire et de degré *p* de $\mathbb{C}[X]$. L'ensemble des racines complexes de ce polynôme est appelé *spectre de M*, noté $Sp\left(M\right)$.

Q1. On suppose que la matrice *C* est diagonale.

Montrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \geq 1$ (donc $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$) avec égalité si et seulement si $C = 0_n$.

Q2. Prouver par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\det(\overline{A}) = \overline{\det A}.$$

Q3. A l'aide de la question précédente, montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\det\left(I_n + C^2\right) = \left|\det\left(C - iI_n\right)\right|^2.$$

En déduire que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$ et que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = 0$ si et seulement si $i \in Sp\left(C\right)$.

Q4. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = \det A$.

☺ *On pourra raisonner par récurrence sur* $p \in \mathbb{N}^*$.

Q5. On pose $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. En considérant le produit $C_0\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, montrer que :

$$\det C_0 = \det\left(I_n + C\overline{C}\right).$$

Q6. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et $\left(e_1, e_2\right)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base $\left(e_1, e_2\right)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base $\left(e_2, e_1\right)$.

Q7. Soient $R,S,T,U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S\\ T & U\end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T\\ S & R\end{pmatrix}$. Prouver de même que $\begin{pmatrix} R & S\\ T & U\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} R & -S\\ -T & U\end{pmatrix}$.

Q8. En déduire que le polynôme $\det\left(X I_{2n}-C_0\right)$ est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}$ avec $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On considère l'application $\Omega:\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$; $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} -\overline{Y}\\ \overline{X}\end{pmatrix}$.

Q9. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

a) Pour tout $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)=\Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)$.

b) $\Omega\circ\Omega=-\,id_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$.

c) Pour tout $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)=\overline{\lambda}\,\Omega\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)$.

Q10. Soit $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})\setminus\left\{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix},\Omega\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix},\Omega\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.

Q11. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω.

Montrer que pour tout $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})\setminus E$, on a $E\cap\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix},\Omega\left(\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}\right)\right)=\left\{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

Pour tout $\lambda\in Sp\left(C_0\right)$, on note $\alpha_\lambda\in[\![1,2n]\!]$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme $\det\left(X I_n-C_0\right)$. Comme ce polynôme est unitaire et de degré $2n$, on peut donc écrire :

$$\det\left(X I_{2n}-C_0\right)=\prod_{\lambda\in Sp(C_0)}\left(X-\lambda\right)^{\alpha_\lambda}.$$

Pour tout $\lambda\in Sp\left(C_0\right)$, on note $F_\lambda=\ker\left[\left(\lambda I_n-C_0\right)^{\alpha_\lambda}\right]$.

Q12. Soit $\lambda\in Sp\left(C_0\right)$. Justifier que $\overline{\lambda}\in Sp\left(C_0\right)$, puis montrer que $\Omega\left(F_\lambda\right)=F_{\overline{\lambda}}$.

Q13. Prouver que si $\lambda\in Sp\left(C_0\right)\cap\mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.

☺ *On pourra utiliser les questions* **Q10** *et* **Q11**.

Q14. On admet que pour tout $\lambda\in Sp\left(C_0\right)$, $\dim F_\lambda=\alpha_\lambda$. Montrer alors que $\det\left(I_n+C\overline{C}\right)\in\mathbb{R}_+$.

- FIN DU SUJET -