Corrigé du DM n° 2

1) On a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, donc si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge (car les séries sont positives) et, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$(1-\varepsilon)a_n \leq b_n \leq (1+\varepsilon)a_n .$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-\varepsilon)a_k = (1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}(1+\varepsilon)a_k = (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k .$$

Soit :

$$(1-\varepsilon)R_n(a) \leq R_n(b) \leq (1+\varepsilon)R_n(a) .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(b)}$$

On a alors :

$$R_n(a) = S(a) - S_n(b) = R_n(b) + \underset{n\to+\infty}{o}\big(R_n(b)\big) .$$

Soit :

$$\boxed{S_n(b) = S(a) - R_n(b) + \underset{n\to+\infty}{o}\big(R_n(b)\big)}$$

2) Comme les séries sont positives, si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(b) = +\infty .$$

Comme ci-dessus, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $S_n(a) > 0$ et :

$$(1-\varepsilon)a_n \leq b_n \leq (1+\varepsilon)a_n .$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N+1$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{n} b_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} a_k \quad \Leftrightarrow \quad (1-\varepsilon)\big[S_n(a) - S_N(a)\big] \leq S_n(b) - S_N(b) \leq (1+\varepsilon)\big[S_n(a) - S_N(a)\big].$$

Soit :

$$-\varepsilon + \frac{S_N(b) - (1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} \leq \frac{S_n(b)}{S_n(a)} - 1 \leq \varepsilon + \frac{S_N(b) - (1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} .$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_N(b) - (1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_N(b) - (1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} = 0$ (car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = +\infty$), donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N'$, $-\varepsilon \leq \dfrac{S_N(b) - (1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)}$ et $\dfrac{S_N(b) - (1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq \max(N+1, N')$, on a $-2\varepsilon \leq \frac{S_n(b)}{S_n(a)} - 1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(b)}{S_n(a)} = 1$ et donc que :

$$\boxed{S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(b)}$$

3) Soit un entier $p \geq 2$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)}$.

On a $\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et comme $p \geq 2$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^p}$ converge. Alors, d'après la question 1, $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n .$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)...(n+p-2)} - \frac{1}{(n+1)...(n+p-2)(n+p-1)} = \frac{(n+p-1)-n}{n(n+1)...(n+p-2)(n+p-1)} = (p-1)u_n .$$

Donc, on a par télescopage :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{k(k+1)...(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)...(k+p-2)(k+p-1)}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)...(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)...(k+p-2)(k+p-1)}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\frac{1}{(n+1)...(n+p-1)}\end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{(n+1)...(n+p-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p-1}}$, on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}}$$

4) a. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$. On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - \frac{1}{2(n+1)} - H_n + \ln n + \frac{1}{2n} = H_{n+1} - H_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \frac{1}{2n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. De plus, d'après la question 1, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{6k^3}.$$

Enfin, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{N}(u_{k+1}-u_k)=\lim\limits_{N\to+\infty}\left(u_{N+1}-u_n\right)=\gamma-u_n$ et d'après la question précédente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc :

$$\gamma-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Finalement, on a $\gamma-u_n=\gamma-H_n+\ln n+\dfrac{1}{2n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit :

$$\boxed{u_n=H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

b. On vient de voir que $\gamma-u_n=\gamma-H_n+\ln n+\dfrac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{12n^2}$, soit $\gamma-H_n+\ln n+\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{12n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, soit :

$$\boxed{H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

5) On veut prouver que $n!=\delta n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+\dfrac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$. Comme tout est strictement positif, cela revient à prouver que :

$$\ln(n!)=\ln\delta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\ln\left[1+\frac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\ln\delta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n=\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+n=\sum_{k=1}^{n}\ln k-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+n.$$

On a :

$$v_{n+1}-v_n=\ln(n+1)-\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)+1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$v_{n+1}-v_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=-\frac{1}{12n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $V=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

De plus, on a $v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$, donc, d'après la question 1 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Or, $\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{N \to +\infty} v_{N+1} - v_n = V - v_n$ et, d'après la question 3, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, d'où :

$$V - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}.$$

Soit $v_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n = V + \frac{1}{12n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, qui se récrit :

$$\ln(n!) = V + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{12n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = V + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln\left[1 + \frac{1}{12n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin, en posant $\delta = e^V$, on obtient :

$$\boxed{n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left[1 + \frac{1}{12n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$$

La formule ci-dessus implique que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ et la formule de Stirling donne :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Donc :

$$\boxed{\delta = \sqrt{2\pi}}$$