Corrigé du DS n° 2

Exercice n° 1

Q1-2. Voir les corrigés des TD du chapitre 2.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_p(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{-1}A^k P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k\right) P = P^{-1}\left(S_p(A)\right)P.$$

Par définition, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(A) = Exp(A)$$
$$\lim_{p \to +\infty} S_p(P^{-1}AP) = Exp(P^{-1}AP)$$

Or, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car linéaire en dimension finie), donc :

$$Exp(P^{-1}AP) = \lim_{p \to +\infty} S_p(P^{-1}AP) = \lim_{p \to +\infty} P^{-1}\left(S_p(A)\right)P = P^{-1}\left(\lim_{p \to +\infty} S_p(A)\right)P = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P.$$

Ainsi, on a bien pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{Exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P}$$

Q4. Soit $D = diag\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = diag\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right)$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p(D) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} diag\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right) = diag\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_1^k, \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_n^k\right).$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_i^k = e^{a_i}.$$

Or, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à $\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ associe la matrice $diag\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car linéaire en dimension finie), donc :

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(D) = diag\left(\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_1^k, \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_2^k, \dots, \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_n^k\right).$$

Soit :

$$\boxed{Exp(D) = diag\left(e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}\right)}$$

Q5. L'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc :

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto {}^tM \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_p({}^tA) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}({}^tA)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}{}^t(A^k) = {}^t\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right) = {}^t\big(S_p(A)\big).$$

Donc :

$$Exp({}^tA) = \lim_{p \to +\infty} S_p({}^tA) = \lim_{p \to +\infty} {}^t\big(S_p(A)\big).$$

Et par continuité de $M \mapsto {}^tM$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} {}^t\big(S_p(A)\big) = {}^t\left(\lim_{p \to +\infty} S_p(A)\right) = {}^t\big(Exp(A)\big).$$

Ainsi, on a bien pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{Exp({}^tA) = {}^t\big(Exp(A)\big)}$$

Q6. (a) Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0_2$, donc $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

Or, $A = aI_2 + bN$ et, comme aI_2 et bN commutent, on peut utiliser la formule du binôme, ce qui donne pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = (aI_2 + bN)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (aI_2)^{k-j}(bN)^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j N^j .$$

Si $k > 0$, on a :

$$A^k = \sum_{j=0}^{1} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j N^j = \binom{k}{0} a^k I_2 + \binom{k}{1} a^{k-1} bN = a^k I_2 + k a^{k-1} bN .$$

Ainsi :

$$\boxed{A^0 = I_2 \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.}$$

(b) On a $S_0(A) = I_2$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = I_2 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} b \\ 0 & a^k \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{k a^{k-1} b}{k!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a^k}{k!} & b \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Soit $S_p(A)=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!} & \displaystyle b\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\end{pmatrix}$ et finalement :

$$\boxed{S_0(A)=I_2 \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ S_p(A)=\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\right)\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}=e^a$, on obtient :

$$\boxed{Exp(A)=e^a\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

(c) On a $B={}^tA$. D'après la question **Q5**, on a alors $Exp(B)=Exp({}^tA)={}^t\big(Exp(A)\big)$, soit :

$$\boxed{Exp(B)=e^a\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.}$$

Q7. (a) En posant $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $E_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, on a :

$$C(0,1)E_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=E_1 \quad\text{et}\quad C(0,1)E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-E_2.$$

Donc :

$$\boxed{C(0,1)E_1=E_1 \quad\text{et}\quad C(0,1)E_2=-E_2.}$$

Les deux vecteurs E_1 et E_2 ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{B}=(E_1,E_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 2). Alors, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$, la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, à la base $\mathcal{B}$, et on a :

$$\boxed{P^{-1}C(0,1)P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ avec } P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.}$$

(b) On a :

$$C(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\alpha I_2+\beta C(0,1).$$

Avec le résultat ci-dessus, on a alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}C(\alpha,\beta)P &= P^{-1}\left[\alpha I_2+\beta C(0,1)\right]P = \alpha P^{-1}I_2P+\beta P^{-1}C(0,1)P \\ &= \alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0\\0&\alpha-\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P^{-1}C(\alpha,\beta)P=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases}\lambda=\alpha+\beta\\ \mu=\alpha-\beta\end{cases}}$$

(c) En posant $D=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0\\0&\alpha-\beta\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}CP=D$, soit $C=PDP^{-1}$ et, avec **Q3** et **Q4**, on obtient :

$$Exp\,(C)=Exp\,(PDP^{-1})=P\left(Exp\,(D)\right)P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\alpha+\beta}&0\\0&e^{\alpha-\beta}\end{pmatrix}P^{-1}=e^{\alpha}P\begin{pmatrix}e^{\beta}&0\\0&e^{-\beta}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Et comme $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et :

$$\boxed{Exp\,(C)=e^{\alpha}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\beta&\operatorname{sh}\beta\\ \operatorname{sh}\beta&\operatorname{ch}\beta\end{pmatrix}}$$

(d) On a $A+B=\begin{pmatrix}2a&b\\b&2a\end{pmatrix}$, donc $Exp\,(A+B)=e^{2a}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}b&\operatorname{sh}b\\ \operatorname{sh}b&\operatorname{ch}b\end{pmatrix}$ et :

$$Exp\,(A)Exp\,(B)=\left[e^{a}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\right]\left[e^{a}\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix}\right]=e^{2a}\begin{pmatrix}1+b^2&b\\b&1\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$Exp\,(A+B)=Exp\,(A)Exp\,(B) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}\operatorname{ch}b&\operatorname{sh}b\\ \operatorname{sh}b&\operatorname{ch}b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b^2&b\\b&1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\operatorname{ch}b=1+b^2=1\\ \operatorname{sh}b=b\end{cases}$$

La seule possibilité est $b=0$, donc :

$$\boxed{Exp\,(A+B)=Exp\,(A)Exp\,(B) \quad\Leftrightarrow\quad b=0}$$

Q8. (a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}=\operatorname{Re}\left(r^ke^{ik\theta}\right)=\operatorname{Re}\left((re^{i\theta})^k\right) \quad\text{et}\quad \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}=\operatorname{Im}\left(\frac{r^ke^{ik\theta}}{k!}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{(re^{i\theta})^k}{k!}\right).$$

Comme la série exponentielle $\sum\dfrac{(re^{i\theta})^k}{k!}$ converge :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} \text{ et } \sum\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} \text{ convergent.}}$$

De plus :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(re^{i\theta})^k}{k!}=\exp\left(re^{i\theta}\right)=\exp\left(r\cos\theta+i\,r\sin\theta\right)$$
$$=\exp\left(r\cos\theta\right)\exp\left(i\,r\sin\theta\right)=e^{r\cos\theta}\left[\cos\left(r\sin\theta\right)+i\sin\left(r\sin\theta\right)\right]$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}&=e^{r\cos\theta}\cos\left(r\sin\theta\right)\\ \sum_{k\geq 0}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}&=e^{r\cos\theta}\sin\left(r\sin\theta\right)\end{aligned}}$$

(b) On a :

$$Exp\left(rR(\theta)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(rR(\theta)\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}r^kR(\theta)^k\ .$$

Il nous fut donc calculer les puissances de $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Or, pour tous $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$, on a :

$$R(\theta)R(\theta')=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'\\ \sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}=R(\theta+\theta')$$

Prouvons alors par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $R(\theta)^k=R(k\theta)$.

- Pour $k=0$, on a $R(\theta)^0=I_2$ et $R(0)=\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}=I_2$, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.
- Supposons que pour $k\in\mathbb{N}$, on a $R(\theta)^k=R(k\theta)$. Alors :
  $$R(\theta)^{k+1}=R(\theta)^kR(\theta)=R(k\theta)R(\theta)=R(k\theta+\theta)=R\left((k+1)\theta\right).$$
  Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Alors :

$$Exp\left(rR(\theta)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}r^kR(k\theta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}r^k\begin{pmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} & \displaystyle-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}e^{r\cos\theta}\cos\left(r\sin\theta\right) & -e^{r\cos\theta}\sin\left(r\sin\theta\right)\\ e^{r\cos\theta}\sin\left(r\sin\theta\right) & e^{r\cos\theta}\cos\left(r\sin\theta\right)\end{pmatrix}=e^{r\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\left(r\sin\theta\right) & -\sin\left(r\sin\theta\right)\\ \sin\left(r\sin\theta\right) & \cos\left(r\sin\theta\right)\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{Exp\left(rR(\theta)\right)=e^{r\cos\theta}R\left(r\sin\theta\right)}$$

(c) Avec ce qui précède, on a va chercher J de la forme $J = rR(\theta)$.

Si $Exp(J) = -I_2$ avec $J = rR(\theta)$, alors on a :

$$Exp(J) = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = R(\pi) = e^{r\cos\theta} R\left(r\sin\theta\right).$$

$$Exp\left(rR(\theta)\right) = e^{r\cos\theta} R(r\sin\theta)$$

D'où :

$$\begin{cases} e^{r\cos\theta} = 1 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases}$$

On peut alors prendre $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $r = \pi$, soit $J = \pi R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } J = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } Exp(J) = -I_2.}$$

Remarque : On pouvait procéder directement (ou, en tous cas, vérifier le résultat ci-dessus).

En posant $J = \pi A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = -I_2$, donc $A^{2k} = (-1)^k I_2$ et $A^{2k+1} = (-1)^k A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned} Exp(J) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \pi^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \pi^{2k} A^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \pi^{2k} (-1)^k I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} (-1)^k A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \pi^{2k} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} \right) A = \left(\cos\pi\right) I_2 + \left(\sin\pi\right) A = -I_2 \end{aligned}$$

Q9. (a) On a $\mathcal{E}_n = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A\,{}^tA = {}^tAA \right\}$.

On a vu dans la question **Q5.** que l'application $M \mapsto {}^tM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $M \mapsto M$ l'est aussi, les applications $M \mapsto {}^tMM$ et $M \mapsto M\,{}^tM$ sont, elles aussi, continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A_k\,{}^tA_k = {}^tA_kA_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par continuité de $M \mapsto {}^tMM$ et $M \mapsto M\,{}^tM$, on peut écrire, en passant à la limite quand $k \to +\infty$: $A\,{}^tA = {}^tAA$. Ainsi, $A \in \mathcal{E}_n$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. On a $A\,{}^tA = {}^tAA$, donc ${}^tA$ et A commutent. Toutes puissances de A commutent alors avec toutes les puissances de ${}^tA$, autrement dit, pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$, $A^k ({}^tA)^{k'} = ({}^tA)^{k'} A^k$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$ {}^t\big(S_p(A)\big) = {}^t\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k\right) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\, {}^t(A^k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k . $$

Et :

$$ \begin{aligned} {}^t\big(S_p(A)\big)\big(S_p(A)\big) &= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k\right)\left(\sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k'!} A^{k'}\right) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k!}\frac{1}{k'!} ({}^tA)^k A^{k'} \\ &= \sum_{k'=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k'!}\frac{1}{k!} A^{k'} ({}^tA)^k = \left(\sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k'!} A^{k'}\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k\right) = \big(S_p(A)\big)\, {}^t\big(S_p(A)\big) \end{aligned} $$

Ainsi, $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, on a $Exp(A) = \lim\limits_{p \to +\infty} S_p(A)$ et comme $\mathcal{E}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient :

$$ \boxed{Exp(A) \in \mathcal{E}_n \text{ lorsque } A \in \mathcal{E}_n.} $$

(c) Soient $A, B \in \mathcal{E}_n$. On a alors en posant $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$:

$$ C\,{}^tC = \frac{1}{4}(A+B)({}^tA + {}^tB) = \frac{1}{4}\left(A\,{}^tA + A\,{}^tB + B\,{}^tA + B\,{}^tB\right) $$

$$ {}^tCC = \frac{1}{4}({}^tA + {}^tB)(A+B) = \frac{1}{4}\left({}^tAA + {}^tAB + {}^tBA + {}^tBB\right) $$

Donc, avec $A\,{}^tA = {}^tAA$ et $B\,{}^tB = {}^tBB$, on obtient :

$$ C\,{}^tC - {}^tCC = \frac{1}{4}\left(A\,{}^tB - {}^tAB + B\,{}^tA - {}^tBA\right). $$

Si on prend A symétrique et B antisymétrique (on a bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_n$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_n$), ceci donne :

$$ C\,{}^tC - {}^tCC = \frac{1}{2}(BA - AB). $$

Or, rien ne dit que A et B commutent (donc que $C\,{}^tC = {}^tCC$). Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$.

Ainsi, si $A, B \in \mathcal{E}_n$, on n'a pas forcément $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \in \mathcal{E}_n$ et donc :

$$ \boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas convexe.}} $$

(d) On admet que pour toute matrice A de $\mathcal{E}_n$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $B = P^{-1}AP = {}^tPAP$ où $B = diag\left(B_1, \dots, B_r\right)$ où les B_k sont soit de la forme (α) avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit de la forme $rR(\theta)$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On prouve alors comme pour les matrices diagonales (question **Q4**), que :

$$Exp(B) = diag\left(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)\right).$$

Et :

- $Exp\left((\alpha)\right) = \left(e^{\alpha}\right) = (\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;
- $Exp\left(rR(\theta)\right) = e^{r\cos\theta}R(r\sin\theta) = \alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Ainsi, la matrice $Exp(B)$ a la forme donnée dans l'énoncé.

Or, d'après la question , $Exp(B) = Exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P$ avec $P^{-1} = {}^tP$ et donc $Exp(A)$, autrement dit toute matrice de $Exp\left(\mathcal{E}_n\right)$, est bien orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;
— soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice ayant la forme ci-dessus, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $D = P^{-1}CP$ où $D = diag\left(D_1, \dots, D_r\right)$ où les D_k sont soit de la forme $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$, soit de la forme $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

- En posant $\alpha = \ln\mu$, on a :
$$(\mu) = \left(e^{\alpha}\right) = Exp\left((\alpha)\right).$$
- En posant $r = \sqrt{(\ln\alpha)^2 + \beta^2}$ (si $r = 0$, $\alpha R(\beta) = I_2$ et on peut se ramener au cas précédent avec deux fois la matrice (1)) et en appelant θ l'angle tel que $\cos\theta = \dfrac{\ln\alpha}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{\beta}{r}$ (si $r \neq 0$), on a $\alpha = e^{r\cos\theta}$, $\beta = r\sin\theta$ et :
$$\alpha R(\beta) = e^{r\cos\theta}R(r\sin\theta) = Exp\left(rR(\theta)\right).$$

Ainsi, $D = diag\left(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)\right)$ où les B_k sont soit de la forme (α) avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit de la forme $rR(\theta)$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et comme plus haut :

$$\begin{aligned} C = PDP^{-1} &= P\left[diag\left(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)\right)\right]P^{-1} \\ &= P\left[Exp\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)\right]P^{-1} \\ &= Exp\left[P\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)P^{-1}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $C = Exp(A)$ où $A = P\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)P^{-1}$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est soit de taille 1×1, soit de taille 2×2 et du type $rR(\theta)$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, donc $A \in \mathcal{E}_n$.

Finalement :

> $Exp(\mathcal{E}_n)$ est bien l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonalement semblables à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
> — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;
> — soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice n° 2

Q1. Pour un réel x donné, $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, donc converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi, $\zeta(x)$ est défini si et seulement si $x \in]1;+\infty[$, donc :

$$\boxed{D =]1;+\infty[}$$

Q2. Pour $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln n \geq 0$, donc $0 < n^a = e^{a \ln n} \leq e^{x \ln n} = n^x$ et ainsi, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$.

A nouveau avec $\ln n \geq 0$, on peut conclure que :

$$\boxed{\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}}$$

On a $n^{\frac{a+1}{2}} \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \frac{(\ln n)^k}{n^{a - \frac{a+1}{2}}} = \frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}}$ et on a $\frac{a-1}{2} > 0$ (car $a > 1$), donc par croissances comparées :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{a+1}{2}} \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0.$$

Ainsi, $\frac{(\ln n)^k}{n^a} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} \right)$ et, comme $a > 1$, on a $\frac{a+1}{2} > 1$, donc la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ converge et par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$$

Q3. Soit $a \in]1, +\infty[$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est de classe C^1 sur D, donc sur $[a, +\infty[$ (c'est une fonction exponentielle), de dérivée $f_n' : x \mapsto -(\ln n) e^{-x \ln n} = -\frac{\ln n}{n^x}$.

D'après la question précédente, on a $\left|-\dfrac{\ln n}{n^x}\right| \le \left|-\dfrac{\ln n}{n^a}\right|$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ et la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ converge. Ceci prouve la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur $[a, +\infty[$ et donc, $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, de dérivée $\zeta' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

Ceci est vrai pour tout $a \in]1, +\infty[$ et $D = \bigcup_{a\in]1,+\infty[} [a, +\infty[$, donc :

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D\text{, de dérivée } \zeta' : x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.}$$

Pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 2$, on a $\dfrac{\ln n}{n^x} > 0$, donc $\zeta'(x) < 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur } D.}$$

Q4. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 2$.

- Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{t^x} \le \dfrac{1}{n^x}$, donc par croissance de l'intégrale (les fonctions en jeu étant continues), on obtient $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \le \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$.
- Pour tout $t \in [n-1, n]$, $\dfrac{1}{n^x} \le \dfrac{1}{t^x}$, donc par croissance de l'intégrale (les fonctions en jeu étant encore continues), on obtient $\displaystyle\frac{1}{n^x} = \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

Ainsi, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \le \frac{1}{n^x} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}.$$

En sommant de $k = 2$ à $k = n$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \le \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t^x} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \le 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^x} \quad \textbf{(1)}.$$

Et :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_2^{n+1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$$

$$\int_1^{n} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_1^{n} = \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

Comme $x \in D =]1,+\infty[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} = \zeta(x)$ et $x-1>0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^{n+1}\frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\frac{1}{2^{x-1}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}\frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans **(1)**, on obtient pour tout $x \in D$:

$$\boxed{1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1+\frac{1}{x-1}}$$

Q5. Pour tout $x \in D =]1,+\infty[$, on a $x-1>0$ et l'encadrement précédent peut se récrire :

$$x-1+\frac{1}{2^{x-1}} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x\,.$$

Or, $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x-1+\frac{1}{2^{x-1}}\right) = \lim\limits_{x\to1^+} x = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\zeta(x) = 1$, soit :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to1^+}\zeta(x) = +\infty}$$

Q6. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = 1\,.$$

Donc, avec l'encadrement obtenu dans la question **Q4**, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1}$$

Q7. Soient $a, A \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leq A$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_a^A\frac{\ln t}{t^x}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^A - \int_a^A\left(-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right)\frac{1}{t}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^A + \frac{1}{x-1}\int_a^A\frac{1}{t^x}\,dt$$
$$= \left[-\frac{\ln t}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^A + \frac{1}{x-1}\left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^A$$

Soit :

$$\int_a^A \frac{\ln t}{t^x}\,dt = \frac{\ln a}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}} - \left(\frac{\ln A}{(x-1)A^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 A^{x-1}}\right).$$

Or, comme $x-1>0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A^{x-1}} = 0$ (par croissances comparées) et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{x-1}} = 0$.

Alors, on a bien :

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{\ln t}{t^x}\,dt = \frac{\ln a}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}}}$$

Q8. Soit $x\in[2,+\infty[$.

La fonction $t\mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $t\mapsto \frac{x}{t^{x+1}}\left(\frac{1}{x}-\ln t\right) = \frac{x}{t^{x+1}}\ln\left(\frac{e^{1/x}}{t}\right)$.

Pour tout $t\in\left[e^{1/x},+\infty\right[$, $\frac{x}{t^{x+1}}\ln\left(\frac{e^{1/x}}{t}\right)<0$ et $t\mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est décroissante sur $\left[e^{1/x},+\infty\right[$.

Comme $x\geq 2$, on a $e^{1/x}<e^{1/2}<4^{1/2}=2$ et donc $[2,+\infty[\subset\left[e^{1/x},+\infty\right[$, donc $t\mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est décroissante et continue sur $[2,+\infty[$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 3$ (donc $n-1\in[2,+\infty[$), on obtient comme dans la question **Q4** :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t^x}\,dt \leq \frac{\ln n}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t^x}\,dt.$$

Et, en sommant de $n=3$ et $n=N\geq 3$, on obtient :

$$\int_3^{N+1} \frac{\ln t}{t^x}\,dt \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n^x} \leq \int_2^N \frac{\ln t}{t^x}\,dt.$$

Et quand N tend vers $+\infty$, avec la question précédente et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} = -\zeta'(x)$, ceci donne :

$$\frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}} \leq -\zeta'(x) - \frac{\ln 2}{2^x} \leq \frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}}.$$

Soit pour tout $x\in[2,+\infty[$:

$$-\frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}} - \frac{\ln 2}{2^x} \leq \zeta'(x) \leq -\frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}} /$$

Ainsi, on a bien pour tout $x\in[2,+\infty[$:

$$\boxed{\frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}} \leq -\zeta'(x) \leq \frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}}}$$

Q9. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x\left(\frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln 3}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x\left(\frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln 2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)=0$$

Donc :

$$\frac{\ln 2}{2^x}+\frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln 2}{2^x}+\frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln 2}{2^x}.$$

Avec le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents, la double inégalité de la question précédente donne alors $-\zeta'(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln 2}{2^x}$, soit :

$$\boxed{\zeta'(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-\ln 2}{2^x}}$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. D'après ce qui précède, il existe un réel $A>1$ tel que pour tout réel $x\geq A$, on a :

$$(1-\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^x}\leq -\zeta'(x)\leq(1+\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^x}.$$

Alors, pour tous $x,X\in[A,+\infty[$ tels que $x<X$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^X(1-\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^t}dt\leq\int_x^X\left(-\zeta'(t)\right)dt\leq\int_x^X(1+\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^t}dt.$$

Comme ζ est de classe C^1 sur D, on a :

$$\int_x^X\left(-\zeta'(t)\right)dt=-\int_x^X\zeta'(t)\,dt=\zeta(x)-\zeta(X).$$

De plus, $\int_x^X(1-\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^t}dt=(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^X}\right)$ et $\int_x^X(1-\varepsilon)\frac{\ln 2}{2^t}dt=(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^X}\right)$, donc :

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^X}\right)\leq\zeta(x)-\zeta(X)\leq(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^X}\right).$$

Or, d'après la question **Q6**, on a $\lim_{X\to+\infty}\zeta(X)=1$, donc en faisant tendre X vers $+\infty$ dans la double inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2^x}\leq\zeta(x)-1\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2^x}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, il existe un réel $A>1$ tel que pour tout réel $x\geq A$, on a :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2^x}\leq\zeta(x)-1\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2^x}.$$

Ceci prouve que l'on a bien :

$$\boxed{\zeta(x)-1\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^x}}$$

Exercice n° 3

I.

I.1) On suppose que $\sum |a_n|$ converge. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

Il existe alors un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, donc $|a_n u_n| \leq M|a_n|$. Comme la série $\sum |a_n|$ converge, la série positive $\sum |a_n u_n|$ converge par comparaison et ainsi, $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum u_n a_n$ converge, donc :

> Si la série $\sum a_n$ converge absolument, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1).

I.2) On suppose que la série $\sum |a_n|$ diverge. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{\overline{a}_n}{|a_n|} & \text{si } a_n \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ (donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée) et :

$$u_n a_n = \begin{cases} \dfrac{\overline{a}_n}{|a_n|} a_n = |a_n| & \text{si } a_n \neq 0 \\ a_n = 0 = |a_n| & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n a_n = |a_n|$ donc $\sum u_n a_n$ diverge.

Finalement :

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est une suite de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum u_n a_n$ diverge.

I.3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

D'après la question précédente, si la série $\sum |a_n|$ diverge, alors il existe une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que $\sum u_n a_n$ diverge, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas (P_1).

Ainsi, par contraposée, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1), alors la série $\sum |a_n|$ converge.

De plus, d'après la première question, si $\sum |a_n|$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1).

Finalement :

$$\boxed{\text{Les suites complexes } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui vérifient } (P_1) \text{ sont les suites telles que la série } \sum a_n \text{ converge absolument.}}$$

II.

II.1) La série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge. Alors, $\sum (a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Or, si $\sum (a_{n+1}-a_n)$ converge :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ possède une limite finie.}}$$

II.2) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Sachant que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n-U_{n-1}=u_n$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n+a_NU_N &= \sum_{n=0}^{N-1}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n+a_NU_N=\sum_{n=0}^{N}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n\\ &= a_0U_0+\sum_{n=1}^{N}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n=a_0U_0+\sum_{n=1}^{N}a_nU_n-\sum_{n=1}^{N}a_nU_{n-1}\\ &= a_0u_0+\sum_{n=1}^{N}a_n(U_n-U_{n-1})=a_0u_0+\sum_{n=1}^{N}a_nu_n\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n+a_NU_N=\sum_{n=0}^{N}a_nu_n}$$

II.3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la série $\sum u_n$ converge. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors et elle est donc bornée. Ainsi, il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|U_n|\leq M$, donc $|(a_n-a_{n+1})U_n|\leq M\,|a_n-a_{n+1}|$. Comme la série $\sum|a_{n+1}-a_n|$ converge, la série positive $\sum|(a_n-a_{n+1})U_n|$ converge par comparaison. Ainsi, la série $\sum(a_n-a_{n+1})U_n$ est absolument convergente, donc convergente et la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Par ailleurs, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on vient de le voir) et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (d'après la question **II.1**), donc la suite $(a_nU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Finalement, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N}a_nu_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est somme de deux suites convergente, donc est convergente et donc la série $\sum u_na_n$ converge.

Nous venons donc d'établir que pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum u_na_n$, et donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la propriété } (P_2).}$$

III.

III.1) Remarquons que $\varepsilon_0 = 1 > 0$ et si, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$, on a $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ ou ε_n et dans les deux cas, $\varepsilon_{n+1} > 0$. Ceci prouve par récurrence que $\varepsilon_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n = \varepsilon_n a_n \geq 0$ et a suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On veut : $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} = 1 + p_n$.

Par l'absurde, supposons le contraire, soit : $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} \neq 1 + p_n$.

Comme $p_{n+1} = 1 + p_n$ (si $A_n \geq p_n$) ou $p_{n+1} = p_n$ (si $A_n < p_n$), la propriété ci-dessus, se reformule en :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} = p_n \text{ (et } A_n < p_n\text{)}.$$

Avec de plus, $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$ pour tout $n \geq N$.

Ainsi, les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang *N* et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par p_N à partir du rang *N*). Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle converge vers un réel *A*.

Alors, $\sum (A_{n+1} - A_n)$ converge, donc $\sum \varepsilon_n a_n$ converge et comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang *N*, ceci implique que la série $\sum a_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe un entier } n \geq N \text{ tel que } p_{n+1} = 1 + p_n.}$$

D'après ce qui précède, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ n'est pas vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$, cet ensemble admet un minimum.

Ainsi, en posant $n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$:

$$\boxed{\text{La suite d'entiers } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est parfaitement définie par récurrence.}}$$

De plus, par définition d'un minimum, on a $n_{k+1} \in \{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $n_{k+1} > n_k$, ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{La suite } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

III.2) D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n_k < n < n_{k+1}$ (s'il y en a), on a $p_n \neq 1 + p_{n-1}$, donc $p_n = p_{n-1}$. Ainsi, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante entre les rangs n_k et $n_{k+1} - 1$. Ceci entraine que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi constante entre les rangs n_k et $n_{k+1} - 1$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n_{k+1}} = 1 + p_{n_{k+1}-1} = 1 + p_{n_k} \\ \varepsilon_{n_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{n_{k+1}-1} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{n_k} \end{cases}$$

Ainsi, les suites $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement arithmétique de raison 1 et géométrique de raison ½ . Avec $n_0 = 0$, on a $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{p_{n_k} = k \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}}$$

III.3) On a vu plus haut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$ et comme $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_n$ ou ε_n, on a $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$. Ainsi, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n_k} = \dfrac{1}{2^k}$ donc $\varepsilon_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et comme $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, la suite $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\varepsilon_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ et finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n a_n = A_{n+1} - A_n$, donc :

$$\sum a_n\varepsilon_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum\left(A_{n+1} - A_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Or ici, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et on a vu que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n = \varepsilon_n a_n \geq 0$, et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée.

Supposons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée, donc qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $A_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = p_n$ ou $1 + p_n$, donc $p_{n+1} \geq p_n$ et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} = k$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty.$$

Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $p_n > M$ et donc, $A_n \leq M < p_n$.

Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ceci implique que pour tout $n \geq N$, $p_{n+1} = p_n$ est donc que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, ce qui est incompatible avec sa limite infinie.

Ainsi, supposer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc que $\sum a_n\varepsilon_n$ converge, mène à une absurdité, donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n\varepsilon_n \text{ diverge.}}$$

IV.

IV.1) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varepsilon'_n = \begin{cases} \dfrac{|a_n|}{a_n}\varepsilon_n & \text{si } a_n \neq 0 \\ \varepsilon_n & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\varepsilon'_n| = |\varepsilon_n|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$ et par hypothèse, la série $\sum \varepsilon'_n a_n$ converge.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varepsilon'_n a_n = \begin{cases} |a_n|\varepsilon_n & \text{si } a_n \neq 0 \\ a_n\varepsilon_n = 0 = |a_n|\varepsilon_n & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon'_n a_n = \varepsilon_n |a_n|$ et ainsi, $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

On vient donc d'établir que :

$$\boxed{\text{Pour toute suite réelle } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de limite nulle, la série } \sum \varepsilon_n |a_n| \text{ converge.}}$$

IV.2) La suite $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, donc d'après la question **III**, si $\sum |a_n|$ diverge, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ diverge. Or, on vient juste d'établir que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge. Ceci permet de conclure que la série $\sum |a_n|$ ne peut pas diverger, donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum |a_n| \text{ converge.}}$$

V.

V.1) Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $a_N \geq n^2$. Posons alors $N_0 = \min\{k\in\mathbb{N},\ a_k \geq 0\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$N_{n+1} = \min\{k\in\mathbb{N},\ k > N_n \text{ et } a_k \geq (n+1)^2\}.$$

Comme dans la question **III**, on a construit une suite d'entiers $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{N_n} \geq n^2$.

Posons alors $u_0 = 0$, $u_k = 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k\notin\{N_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, $u_0 = 0$ et $u_{N_n} = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Comme $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, pour tout $N\in\mathbb{N}$ tel que $N \geq N_0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $N_n \leq N < N_{n+1}$ et :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N_n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc la série $\sum u_k$ converge.

Or, avec les notations ci-dessus, on a pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} u_k a_k = \sum_{k=0}^{N_n} u_k a_k = \sum_{p=0}^{n} u_{N_p} a_{N_p} = \sum_{p=0}^{n} u_{N_p} a_{N_p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p^2} a_{N_p} \geq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p^2} p^2 = n+1 .$$

Enfin, quand $N\to+\infty$, on a $N_n\to+\infty$ et donc $n\to+\infty$. L'inégalité $\sum_{k=0}^{N} u_k a_k \geq n+1$ prouve alors que la série $\sum a_n u_n$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, supposer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mène à une contradiction, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

V.2) Posons $u_0=\varepsilon_0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0), la série $\sum u_n$ converge et, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$U_N=\sum_{n=0}^{N} u_n = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_N .$$

Reprenons alors la relation établie dans la question **II.2**. Ceci donne pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n a_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n-a_{n+1})U_n + a_N U_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n-a_{n+1})\varepsilon_n + a_N\varepsilon_N .$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n (a_{n+1}-a_n) = a_N\varepsilon_N - \sum_{n=0}^{N} u_n a_n .$$

Or, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $\lim_{N\to+\infty} a_N\varepsilon_N=0$ et, comme la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum u_n a_n$ converge aussi par hypothèse. Ainsi, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n (a_{n+1}-a_n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum \varepsilon_n \left(a_{n+1}-a_n\right) \text{ converge.}}$$

V.3) On vient d'établir que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n \left(a_{n+1}-a_n\right)$ converge, donc d'après la question **IV** :

$$\boxed{\text{La série } \sum \left|a_{n+1}-a_n\right| \text{ converge.}}$$

V.4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On vient de prouver que si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n u_n$, autrement dit, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vérifie (P_2), alors la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.

Or, dans la question **II**, on a établi que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

Ainsi :

Les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient (P_2) sont les suites réelles telles que la série $\sum \lvert a_{n+1}-a_n\rvert$ converge.