

DS de Mathématiques n° 2
4 heures
Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages.
Exercice n° 1
(extrait adapté de Mines 2 - PSI - 2020 et CNM 2 - PSI - 2004)

Soit n un entier naturel non nul.

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra noter $[A]_{i,j}$ les coefficients de A .

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme infinie : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |[A]_{i,j}|$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k .$$

Q1. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Q2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $\text{Exp}(A)$ sa limite.

☺ On pourra montrer que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la série numérique $\sum \frac{[A^k]_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

Q3. Montrer que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\text{Exp}(P^{-1}AP) = P^{-1}(\text{Exp}(A))P$.

Q4. Déterminer $\text{Exp}(D)$ où D est une matrice diagonale : $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Q5. Montrer que l'application $M \mapsto {}^t M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Exp}({}^t A) = {}^t(\text{Exp}(A))$.

Q6. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- En déduire l'expression de la matrice $S_p(A)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis celle de $\text{Exp}(A)$.
- Déterminer $\text{Exp}(B)$.

Q7. Dans cette question, on pose $C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Calculer $C(0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C(0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}C(0,1)P$ soit diagonale.
- Montrer alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on précisera, tels que $P^{-1}C(\alpha, \beta)P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
- En déduire l'expression de $\text{Exp}(C)$.
- En reprenant les matrices A et B de la question précédente, donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\text{Exp}(A+B) = \text{Exp}(A)\text{Exp}(B)$.

Q8. Pour tout réel a , on pose $R(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

- Prouver que les séries $\sum \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.
- Montrer que $\text{Exp}(rR(\theta)) = e^{r \cos \theta} R(r \sin \theta)$.
- Expliciter alors une matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Exp}(J) = -I_2$.

Q9. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^t P$ (la matrice P est dite orthogonale) et $B = P^{-1}AP$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A^t A = {}^t A A$.

On note \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que \mathcal{E}_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Qu'en déduit-on pour $\text{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?
- L'ensemble \mathcal{E}_n est-il convexe ?

(d) On admet qu'une matrice est normale si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille 1×1 ;

— soit de taille 2×2 et du type $rR(\theta)$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Montrer que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonalement semblables à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;

— soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice n° 2

(extrait très adapté de Centrale 2 - PC - 2018)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D son ensemble de définition.

Q1. Préciser D (en justifiant rapidement).

Q2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a \in]1, +\infty[$. Justifier que pour tout $x \in [a, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ et prouver que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q3. En déduire que ζ est de classe C^1 sur D , et déterminer le sens de variation de ζ .

Q4. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $x \in D$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q5. Déterminer un équivalent très simple de $\zeta(x)$ en 1^+ et la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q6. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q7. Prouver que pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \frac{\ln t}{t^x} dt = \frac{\ln a}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$\frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}} \leq -\zeta'(x) \leq \frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 2}{(x-1)2^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 2^{x-1}}.$$

Q9. En déduire que $\zeta'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln 2}{2^x}$, puis que $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

Exercice n° 3

(extrait adapté de Centrale 1 - PSI - 2009)

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum u_n a_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum u_n a_n$.

L'objectif du problème est de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2) .

I. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

I.1) Montrer que si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_1) .

I.2) On suppose maintenant que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum u_n a_n$ diverge.

I.3) Caractériser alors les suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (P_1) .

II. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite finie.

II.2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Prouver, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\sum_{n=0}^N u_n a_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

II.3) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_2) .

III. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge.

On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge.

Pour cela, on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 1 + p_n & \text{et } \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \varepsilon_n & \text{si } A_n \geq p_n \\ p_{n+1} = p_n & \text{et } \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n & \text{si } A_n < p_n \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{n+1} = A_n + \varepsilon_n a_n.$$

III.1) Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq N$ tel que $p_{n+1} = 1 + p_n$.

☺ On pourra raisonner par l'absurde.

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \end{cases}$$

III.2) Déterminer p_{n_k} et ε_{n_k} en fonction de k .

III.3) Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge.

IV. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

IV.1) Prouver que pour toute suite réelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle, la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

IV.2) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

V. Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n u_n$.

V.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

V.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

V.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

V.4) Caractériser alors les suites vérifiant (P_2) .

- Fin du sujet -