Corrigé du DM n° 3

1) Du fait de la bilinéarité du produit matriciel, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie, donc :

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto P^{-1}MP \text{ est continue sur } \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e_n(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{-1}A^k P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right) P = P^{-1}e_n(A)P.$$

Alors :

$$e(P^{-1}AP) = \lim_{n \to +\infty} e_n(P^{-1}AP) = \lim_{n \to +\infty} P^{-1}e_n(A)P.$$

Et comme $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(A) = e(A)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P^{-1}e_n(A)P = P^{-1}e(A)P$ et ainsi :

$$\boxed{e(P^{-1}AP) = P^{-1}e(A)P}$$

2) On suppose ici qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} B_1 & & & (0) \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & B_r \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, on a donc $e(A) = e(PBP^{-1}) = Pe(B)P^{-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} B_1 & & & (0) \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & B_r \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} B_1^k & & & (0) \\ & B_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & B_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_1^k & & & (0) \\ & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_r^k \end{pmatrix}.$$

Comme la limite d'une suite de matrices est obtenue coefficient par coefficient, on a :

$$e(B) = \lim_{n \to +\infty} e_n(B) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_1^k & & & (0) \\ & \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(B_1) & & & (0) \\ & e(B_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e(B_r) \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{e(A)=P\begin{pmatrix} e(B_1) & & & \\ & e(B_2) & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e(B_r)\end{pmatrix}P^{-1}}$$

3) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$. On a :

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\prod_{j=n-k+1}^{n}j=\frac{1}{k!}\prod_{j=n-k+1}^{n}\frac{j}{n}.$$

Or, pour tout $j\in[\![n-k+1,n]\!]$, $j\leq n$ donc $\frac{j}{n}\leq 1$ et ainsi, $\prod_{j=n-k+1}^{n}\frac{j}{n}\leq 1$.

Comme $\frac{1}{k!}>0$, on obtient $\frac{1}{k!}\prod_{j=n-k+1}^{n}\frac{j}{n}\leq\frac{1}{k!}$, soit :

$$\boxed{\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{k!}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}A^k$ car I_p et $\frac{1}{n}A$ commutent, donc :

$$\left\|\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}A^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right]A^k\right\|.$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left\|\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right\|\leq\sum_{k=0}^{n}\left\|\left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right]A^k\right\|=\sum_{k=0}^{n}\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right|\left\|A^k\right\|.$$

D'après le résultat précédent et le résultat admis au début de l'énoncé ($\left\|A^k\right\|\leq\|A\|^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$) :

$$\left\|\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right\|\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\|A\|^k \qquad \textbf{(1)}$$

Or, en procédant comme ce que l'on vient de faire mais à l'envers, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\|A\|^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\|A\|}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k}{k!}-\left(1+\frac{\|A\|}{n}\right)^n.$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k}{k!}=e^{\|A\|}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\|A\|}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{\|A\|}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(\frac{\|A\|}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\|A\|+o(1)}=e^{\|A\|}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\|A\|^k\right]=0$ et l'inégalité **(1)** permet de conclure par comparaison que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right]=0.$$

Finalement, avec $\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k+\left[\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k=e(A)$ par définition, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n=e(A)}$$

4) a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons on a $A_n=\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n$. On a alors :

$$A_n^\top=\left[\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n\right]^\top=\left[\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^\top\right]^n=\left(I_p+\frac{1}{n}A^\top\right)^n.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=e(A)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n^\top=e(A^\top)$. Or, la transposition $t:M\mapsto M^\top$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc l'application t est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et ainsi :

$$e(A^\top)=\lim_{n\to+\infty}A_n^\top=\lim_{n\to+\infty}t(A_n)=t\left(\lim_{n\to+\infty}A_n\right)=t\big(e(A)\big)=e(A)^\top.$$

On a donc bien :

$$\boxed{e(A^\top)=e(A)^\top}$$

b. L'énoncé admet qu'il existe une matrice $T\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et une matrice $P\in GL_p(\mathbb{C})$ telles que $T=P^{-1}AP$. D'après la question 1, on a alors :

$$e(T)=e(P^{-1}AP)=P^{-1}e(A)P.$$

Donc $e(T)$ et $e(A)$ sont semblables. Or, deux matrices semblables ont le même déterminant, donc :

$$\det\big(e(A)\big)=\det\big(e(T)\big).$$

Par ailleurs, le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les produits deux à deux des coefficients diagonaux des deux matrices initiales. Ceci permet d'écrire que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$T^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \times & \cdots & \times\\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^k\end{pmatrix}\text{ avec } T=T^1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \times & \cdots & \times\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p\end{pmatrix}.$$

Alors :

$$e(T)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}T^k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \times & \cdots & \times\\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & \times & \cdots & \times\\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \times & \cdots & \times\\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p}\end{pmatrix}.$$

Donc, $\det\big(e(T)\big)=\prod_{j=1}^{p}e^{\lambda_j}=\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\right)$ et avec l'expression de T donnée plus haut, on a $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j=tr(T)$ et comme A est semblable à T, $tr(T)=tr(A)$.

Finalement, $\det\big(e(A)\big)=\det\big(e(T)\big)=e^{tr(T)}=e^{tr(A)}$, donc on a bien :

$$\boxed{\det\big(e(A)\big)=e^{tr(A)}}$$

5) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui commutent. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e_n(A)e_n(B)=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}B^j\right)=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j=\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\0\le i+j\le n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j+\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j.$$

Dans le première somme posons $k=i+j$, donc $j=k-i$ avec $0\le i\le k$ (et donc $0\le j=k-i\le k$). On a alors :

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\0\le i+j\le n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j=\sum_{\substack{0\le k\le n\\0\le i\le k}}\frac{1}{i!(k-i)!}A^iB^{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}A^iB^{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}A^iB^{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}A^iB^{k-i}.$$

Et comme A et B commutent, on peut écrire $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}A^iB^{k-i}=(A+B)^k$ et donc :

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\0\le i+j\le n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(A+B)^k=e_n(A+B).$$

Et donc :

$$e_n(A)e_n(B)=e_n(A+B)+\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j.$$

Par ailleurs, avec l'inégalité triangulaire et le fait que l'on ait choisi une norme matricielle, on a :

$$\left\|\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j\right\|\le\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\left\|\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j\right\|=\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}\left\|A^iB^j\right\|\le\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}\left\|A^i\right\|\left\|B^j\right\|\le\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}\|A\|^i\|B\|^j.$$

Et, en procédant comme ce que l'on vient de faire mais à l'envers, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}\|A\|^i\|B\|^j&=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\|A\|^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\|B\|^j\right)-\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\0\le i+j\le n}}\frac{1}{i!\,j!}\|A\|^i\|B\|^j\\&=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\|A\|^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\|B\|^j\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\big(\|A\|+\|B\|\big)^k\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\|A\|^i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\|B\|^j\right)=e^{\|A\|}e^{\|B\|}=e^{\|A\|+\|B\|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\|A\|+\|B\|\right)^k$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}\|A\|^i\|B\|^j=0.$$

Par comparaison, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\sum\limits_{\substack{0\le i,j\le n\\ n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j\right\|=0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{\substack{0\le i,j\le n\\ n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j=0$.

En résumé, nous avons prouvé que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e_n(A)e_n(B)=e_n(A+B)+\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j \text{ avec } \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}e_n(A+B)=e(A+B)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{\substack{0\le i,j\le n\\ n+1\le i+j\le 2n}}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j=0\end{cases}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}e_n(A)e_n(B)=e(A+B)$, mais on a aussi

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}e_n(A)=e(A)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}e_n(B)=e(B)\end{cases} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}e_n(A)e_n(B)=e(A)e(B).$$

Par unicité de la limite, on obtient : $e(A)e(B)=e(A+B)$.

On a de même, $e(B)e(A)=e(B+A)$ et $B+A=A+B$, donc $e(B+A)=e(A+B)$ et finalement, on obtient bien :

$$\boxed{e(A+B)=e(A)e(B)=e(B)e(A)}$$

6) Soient $R\in\mathbb{R}_+^*$ et A et B deux matrices de la boule ouverte $B(0_p,R)$, soit $\|A\|<R$ et $\|B\|<R$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\|A^k-B^k\right\|=\left\|A^k-A^{k-1}B+A^{k-1}B-B^k\right\|=\left\|A^{k-1}(A-B)+(A^{k-1}-B^{k-1})B\right\|.$$

Avec l'inégalité triangulaire, puis le caractère matriciel de la norme choisie (et le résultat admis) :

$$\left\|A^k-B^k\right\|\le\left\|A^{k-1}(A-B)\right\|+\left\|(A^{k-1}-B^{k-1})B\right\|\le\left\|A^{k-1}\right\|\left\|A-B\right\|+\left\|A^{k-1}-B^{k-1}\right\|\left\|B\right\|\le\|A\|^{k-1}\|A-B\|+\left\|A^{k-1}-B^{k-1}\right\|\|B\|.$$

Comme $\|A\|<R$ et $\|B\|<R$, on obtient :

$$\left\|A^k-B^k\right\|\le R^{k-1}\|A-B\|+R\left\|A^{k-1}-B^{k-1}\right\|.$$

En divisant par $R^k>0$, on peut récrire cette inégalité :

$$\frac{\left\|A^k-B^k\right\|}{R^k}-\frac{\left\|A^{k-1}-B^{k-1}\right\|}{R^{k-1}}\le\frac{\|A-B\|}{R}.$$

Puis en sommant de $i=1$ à $i=k$, on obtient avec un télescopage :

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\left\|A^i-B^i\right\|}{R^i}-\frac{\left\|A^{i-1}-B^{i-1}\right\|}{R^{i-1}}\right)=\frac{\left\|A^k-B^k\right\|}{R^k}-\frac{\left\|A^0-B^0\right\|}{R^0}=\frac{\left\|A^k-B^k\right\|}{R^k}\le\sum_{i=1}^{k}\frac{\|A-B\|}{R}=k\,\frac{\|A-B\|}{R}.$$

Ce qui donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left\|A^k - B^k\right\| \leq k R^{k-1} \|A - B\|}$$

7) Soient à nouveau $R \in \mathbb{R}_+^*$ et A une matrice de $B(0_p, R)$.

Pour toute matrice $M \in B(0_p, R)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|e_n(M) - e_n(A)\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (M^k - A^k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\|M^k - A^k\right\|.$$

Et avec la question précédente, on obtient :

$$\|e_n(M) - e_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} k R^{k-1} \|M - A\| \quad \textbf{(*)}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} k R^{k-1} \|M - A\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} k R^{k-1}\right) \|M - A\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} R^{k-1}\right) \|M - A\| = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} R^k\right) \|M - A\|.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} R^k\right) = e^R$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} k R^{k-1} \|M - A\|\right) = e^R \|M - A\|.$$

Avec $\|e(M) - e(A)\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|e_n(M) - e_n(A)\|$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans **(*)**, on obtient :

$$\|e(M) - e(A)\| \leq e^R \|M - A\|.$$

Ainsi, l'application $e : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\,;\, M \mapsto e(M)$ est e^R-lipschitzienne sur $B(0_p, R)$, donc continue sur cet ensemble. Ceci est vrai pour tout réel $R > 0$, l'application e est continue sur $\bigcup_{R \in \mathbb{R}_+^*} B(0_p, R)$ et comme $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{R \in \mathbb{R}_+^*} B(0_p, R)$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{L'application } e : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\,;\, M \mapsto e(M) \text{ est continue sur } \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).}$$

8) On a vu que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\det\big(e(A)\big) = e^{tr(A)}$, donc $\det\big(e(A)\big) \neq 0$ et $e(A) \in GL_p(\mathbb{C})$. Ceci prouve que toute matrice non inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ n'admet pas d'antécédent, et donc que l'application e n'est pas surjective. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } e : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\,;\, M \mapsto e(M) \text{ n'est pas bijective.}}$$