Corrigé du DS n° 3

Exercice n° 1

I – _L'opérateur de translation_

Q1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\tau(X^k) = (X+1)^k$, donc :

$$\deg\big(\tau(X^k)\big) = k = \deg(X^k)$$
$$\mathrm{cd}\big(\tau(X^k)\big) = 1 = \mathrm{cd}(X^k)$$

Alors, pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $a_d = \mathrm{cd}(P) \neq 0$ et $d = \deg(P) \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\deg\big(\tau(P)\big) = \deg\big(\tau(a_d X^d)\big) = \deg\big(a_d (X+1)^d\big) = d = \deg(P)$$
$$\mathrm{cd}\big(\tau(P)\big) = \mathrm{cd}\big(\tau(a_d X^d)\big) = \mathrm{cd}\big(a_d (X+1)^d\big) = a_d = \mathrm{cd}(P)$$

Ainsi :

$$\boxed{\deg\big(\tau(P)\big) = \deg(P) \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}\big(\tau(P)\big) = \mathrm{cd}(P)}$$

Q2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

En évaluant $\tau^k(P)$ pour des petites valeurs de k, on conjecture que $\tau^k(P) = P(X+k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Prouvons-le par récurrence sur k.

- On a $\tau^0(P) = id_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = P = P(X+0)$, donc la relation est vraie au rang $k = 0$.
- Supposons la relation vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$. On a alors :

  $$\begin{aligned}\tau^{k+1}(P) &= \tau\big(\tau^k(P)\big) = \tau\big(P(X+k)\big) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= P\big((X+1)+k\big) = P\big(X+(k+1)\big)\end{aligned}$$

  La relation est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\tau^k(P) = P(X+k)}$$

Q3. On a vu que pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\tau(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$.

Avec la convention $\binom{\beta}{\alpha} = 0$ pour $\alpha > \beta$, ceci donne pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\tau(X^j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} X^i$, soit pour tout $j \in [\![1,n+1]\!]$:

$$\tau(X^{j-1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}.$$

Donc, avec $\mathcal{B}_c = \left(X^0, X^1, \dots, X^n\right)$ et $M = M_{\mathcal{B}_c}(\tau) = \left([M]_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n+1}$, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout } i, j \in [\![1, n+1]\!],\ [M]_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.}$$

Q4. La matrice M est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1, donc :

$$\det(\tau) = \det(M) = 1 \neq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } \tau \text{ est bijective.}}$$

Remarquons que si on note $\tau' : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-1) \end{cases}$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\tau' \circ \tau(P) = \tau'\left(\tau(P)\right) = \tau'\left(P(X+1)\right) = P\left((X+1)-1\right) = P.$$

Donc, $\tau' \circ \tau = id_{\mathbb{R}_n[X]}$, soit $\tau' = \tau^{-1}$. Ainsi :

$$\boxed{\tau^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-1) \end{cases}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme ci-dessus, avec $\tau_k : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-k) \end{cases}$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\tau_k \circ \tau^k(P) = \tau_k\left(\tau^k(P)\right) = \tau_k\left(P(X+k)\right) = P\left((X+k)-k\right) = P.$$

Donc, $\tau_k \circ \tau^k = id_{\mathbb{R}_n[X]}$, soit $\tau_k = (\tau^k)^{-1}$.

Or, comme τ^{-1} et τ commutent, on a $(\tau^{-1})^k \circ \tau^k = (\tau^{-1} \circ \tau)^k = id_{\mathbb{R}_n[X]}$ et ainsi, $(\tau^k)^{-1} = (\tau^{-1})^k = \tau^{-k}$.

On a donc $\tau^{-k} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-k) \end{cases}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'expression de } \tau^k \text{ trouvée à la question } \mathbf{Q2} \text{ reste valable pour tout } k \in \mathbb{Z}.}$$

Q5. Comme dans la question **Q3**, on a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\tau^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i.$$

Soit pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\tau(X^{j-1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(j-1)-(i-1)} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{\text{Pour tout } i, j \in [\![1, n+1]\!],\ [M^{-1}]_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}.}$$

Q6. On a, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$v_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}u_j = \sum_{j=1}^{i}\binom{i-1}{j-1}u_{j-1} = \sum_{j=1}^{i}[M]_{j,i}u_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1}[M]_{j,i}u_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1}[M^{\top}]_{i,j}u_{j-1}.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^{\top}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}$$

Q7. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (M^{\top})^{-1}\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (M^{-1})^{\top}\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$u_k = \sum_{j=0}^{n}[(M^{-1})^{\top}]_{k+1,j+1}v_j = \sum_{j=0}^{n}[M^{-1}]_{j+1,k+1}v_j = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{k+1-(j+1)}\binom{k+1-1}{j+1-1}v_j.$$

Ce qui donne bien pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}v_j}$$

Q8. Avec $u_k = \lambda^k$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j.$$

Et avec la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\boxed{v_k = (1+\lambda)^k}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}v_j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1+\lambda)^j(-1)^{k-j} = (1+\lambda-1)^k = \lambda^k = u_k$$

Ainsi, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

II – *L'opérateur de différence*

Q9. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = k X^{k-1} + \binom{k}{2} X^{k-2} + \ldots + 1.$$

Donc :

$$\deg\left(\delta(X^k)\right) = k-1 \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}\left(\delta(X^k)\right) = k.$$

Alors, pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant, avec $a_d = \mathrm{cd}(P) \neq 0$ et $d = \deg(P) \in [\![1, n]\!]$:

$$\deg\left(\delta(P)\right) = \deg\left(\delta(X^d)\right) = d-1 = \deg(P) - 1$$

$$\mathrm{cd}\left(\delta(P)\right) = a_d \,\mathrm{cd}\left(\delta(X^d)\right) = d\, a_d = d\,\mathrm{cd}(P)$$

Ainsi :

$$\boxed{\deg\left(\delta(P)\right) = \deg(P) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}\left(\delta(P)\right) = d\,\mathrm{cd}(P)}$$

Q10. On a $\delta(1) = \delta(X^0) = (X+1)^0 - X^0 = 0$ donc $1 \in \ker\delta$ (et $\dim\ker\delta \geq 1$). De plus :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\delta &= \mathrm{Vect}\left(\delta(1), \delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^n)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(0, \delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^n)\right) = \mathrm{Vect}\left(\delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^n)\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, la famille $\left(\delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^n)\right)$ est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Elle est donc libre, d'où :

$$\dim \mathrm{Vect}\left(\delta(X), \delta(X^2), \ldots, \delta(X^n)\right) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\,\delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $rg(\delta) = \dim \mathrm{Im}\,\delta = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

D'après le théorème du rang, $\dim\ker\delta + rg(\delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Avec $rg(\delta) = n$, on obtient $\dim\ker\delta = 1$ et comme $\mathrm{Vect}(1) \subset \ker\delta$, on a finalement :

$$\boxed{\ker\delta = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]}$$

Q11. On a $\delta(1)=0$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\deg\big(\delta(X^k)\big)=k-1$.

Prouvons par récurrence finie sur j que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\delta^j(1)=\ldots=\delta^j(X^{j-1})=0$ et pour tout $k\in[\![j,n]\!]$, $\deg\big(\delta^j(X^k)\big)=k-j$.

- L'initialisation rappelée ci-dessus est faite dans la question **Q9**.
- Si $n=1$ la récurrence est terminée.

  Si $n\geq 2$, supposons la propriété vraie à un rang $j\in[\![1,n-1]\!]$ (donc $j+1\leq n$).

  On a alors par hypothèse de récurrence :

  - pour tout $k\in[\![1,j-1]\!]$, $\delta^{j+1}(X^k)=\delta\big(\delta^j(X^k)\big)=\delta(0)=0$;
  - $\deg\big(\delta^j(X^j)\big)=j-j=0$, donc $\delta^j(X^j)\in\mathbb{R}_0[X]=\ker\delta$ et $\delta^{j+1}(X^j)=\delta\big(\delta^j(X^j)\big)=0$;
  - pour tout $k\in[\![j+1,n]\!]$, $\deg\big(\delta(X^k)\big)=k-1$, donc d'après la question **Q9**, on a :

  $$\deg\big(\delta^{j+1}(X^k)\big)=\deg\Big(\delta\big(\delta^j(X^k)\big)\Big)=(k-j)-1=k-(j+1).$$

  Ainsi, on a $\delta^{j+1}(1)=\ldots=\delta^{j+1}(X^{j-1})=\delta^{j+1}(X^j)=0$ et $\deg\big(\delta^{j+1}(X^k)\big)=k-(j+1)$ pour tout $k\in[\![j+1,n]\!]$, donc la propriété est vraie au rang $j+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $j\in[\![1,n]\!]$.

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\delta^j&=\operatorname{Vect}\big(\delta^j(1),\delta^j(X),\delta^j(X^2),\ldots,\delta^j(X^n)\big)\\&=\operatorname{Vect}\big(0,\ldots,0,\delta^j(X^j),\ldots,\delta^j(X^n)\big)=\operatorname{Vect}\big(\delta^j(X^j),\ldots,\delta^j(X^n)\big)\end{aligned}$$

En outre, la famille $\big(\delta^j(X^j),\ldots,\delta^j(X^n)\big)$ est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{n-j}[X]$. Elle est donc libre, d'où ;

$$\dim\operatorname{Im}\delta^j=\dim\operatorname{Vect}\big(\delta^j(X^j),\ldots,\delta^j(X^n)\big)=n-j+1=\dim\mathbb{R}_{n-j}[X].$$

Ainsi, $\operatorname{Im}\delta^j\subset\mathbb{R}_{n-j}[X]$ et $\dim\operatorname{Im}\delta^j=\dim\mathbb{R}_{n-j}[X]$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im}\delta^j=\mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

Par ailleurs, $\delta^j(1)=\ldots=\delta^j(X^{j-1})=0$, donc :

$$\mathbb{R}_{j-1}[X]=\operatorname{Vect}\big(1,\ldots,X^{j-1}\big)\subset\ker\delta^j.$$

Et le théorème du rang donne :

$$\dim\ker\delta^j=\dim\mathbb{R}_n[X]-rg\,(\delta^j)=n+1-\big(n-j+1\big)=j=\dim\mathbb{R}_{j-1}[X].$$

Ainsi, $\mathbb{R}_{j-1}[X]\subset\ker\delta^j$ et $\dim\ker\delta^j=\dim\mathbb{R}_{j-1}[X]$, donc :

$$\boxed{\ker\delta^j=\mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Q12. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\delta = \tau - Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, et les endomorphismes τ et $Id_{\mathbb{R}_n[X]}$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$\delta^k = \left(\tau - Id_{\mathbb{R}_n[X]}\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \tau^j \left(-Id_{\mathbb{R}_n[X]}\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j .$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P)}$$

Q13. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après la question **Q11**, on a $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker \delta^n$, donc $\delta^n(P) = 0$.

Or, d'après la question précédente, $\delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)$, donc :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = 0.$$

En évaluant en 0 la relation ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)(0) = 0 .$$

D'après la question **Q2**, $\tau^j(P) = P(X+j)$, donc $\tau^j(P)(0) = P(j)$ et ainsi :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

Q14. a. Si u existe, on a $\delta = u^2$, donc $\delta^2 = u^4$. Or, u et u^4 commutent, donc :

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}}$$

b. Comme u et δ^2 commutent, $\ker \delta^2$ est stable par u.

Or, d'après la question **Q11**, on a $\ker \delta^2 = \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$$

c. Notons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $rg\,(B) = 1$ et $B^2 = 0_2$.

S'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = B$, on a :

- $A \neq 0_2$ (sinon $B = A^2$ serait nulle), donc $rg\,(A) \geq 1$;
- $A \notin GL_2(\mathbb{R})$ (sinon $B = A^2$ serait inversible aussi), donc $rg\,(A) \leq 1$.

Ainsi, $rg\,(A)=1=rg\,(B)=rg\,(A^2)$. Or, $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$, donc :

$$\operatorname{Im} A=\operatorname{Im} A^2.$$

En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A, on a $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{Im} f^{k+1}=f^{k+1}(\mathbb{R}^2)=f^{k-1}\left(f^2(\mathbb{R}^2)\right)=f^{k-1}\left(\operatorname{Im} f^2\right)=f^{k-1}\left(\operatorname{Im} f\right)=\operatorname{Im} f^k .$$

La suite $\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} f^k=\operatorname{Im} f$, soit $\operatorname{Im} A^k=\operatorname{Im} A$.

En particulier, $\operatorname{Im} A^4=\operatorname{Im} A$. Or, $A^4=B^2=0_2$, donc $\operatorname{Im} A=\{0\}$, ce qui est absurde.

Finalement, l'existence de $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2=B$ mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.}$$

d. On a $\delta(1)=0$ et $\delta(X)=1$, donc $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par δ.

Notons alors $\tilde{\delta}$ et $\tilde{u}$ les endomorphismes induits respectivement par δ et u sur $\mathbb{R}_1[X]$ ($\tilde{u}$ existe car on a vu que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u).

En notant $\mathcal{B}=(1,X)$, on a alors $M_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Or, $u^2=\delta$, donc $\tilde{u}^2=\tilde{\delta}$ et ainsi :

$$\left(M_{\mathcal{B}}(\tilde{u})\right)^2=M_{\mathcal{B}}(\tilde{u}^2)=M_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, ceci est absurde.

Finalement, l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u\circ u=\delta$ mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u\circ u=\delta.}$$

Q15. a. Soit P un polynôme non nul de degré $d\in[\![0,n]\!]$.

Si $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d\neq 0$, on a pour tout $j\in[\![1,d]\!]$, $\delta^j(P)=\sum_{k=0}^{d} a_k\delta^j(X^k)$.

Or, on a vu dans la question **Q11** que $\delta^j(X^k)=0$ pour $k\in[\![1,j-1]\!]$ et $\deg\left(\delta^j(X^k)\right)=k-j$ pour tout $k\in[\![j,n]\!]$, donc pour $k\in[\![0,d-1]\!]$, $\deg\left(\delta^j(X^k)\right)<\deg\left(\delta^j(X^d)\right)$ et ainsi, pour tout $j\in[\![1,d]\!]$:

$$\deg\left(\delta^j(P)\right)=\deg\left(\delta^j(X^d)\right)=d-j .$$

Avec $\deg(P)=d$, ceci prouve que $\left(P,\delta(P),\dots,\delta^d(P)\right)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés, et donc que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(P,\delta(P),\dots,\delta^d(P)\right) \text{ est libre.}}$$

Pour tout $j \in [\![0, d]\!]$, $\deg\left(\delta^j(P)\right) \leq d$, donc :

$$\mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) \subset \mathbb{R}_d[X].$$

Et, comme la famille $\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ est libre, on a :

$$\dim \mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) = d+1 = \dim \mathbb{R}_d[X].$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$.

L'ensemble $\left\{\deg P, P \in V \setminus \{0\}\right\}$ est une partie non vide (car $V \neq \{0\}$) et incluse dans $[\![0, n]\!]$ (car $V \subset \mathbb{R}_n[X]$), donc admet un maximum $d \in [\![0, n]\!]$.

On donc pour tout $P \in V$, $\deg P \leq d$, donc $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et ainsi : $\underline{V \subset \mathbb{R}_d[X]}$.

Soit maintenant $P \in V$ tel que $\deg P = d$. Comme V est stable par δ, $\delta^k(P) \in V$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ et donc $\mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) \subset V$.
Or, d'après la question précédente, $\mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) = \mathbb{R}_d[X]$, donc : $\underline{\mathbb{R}_d[X] \subset V}$.

Ainsi, $V = \mathbb{R}_d[X]$ et finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un entier } d \in [\![0, n]\!] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X].}$$

c. On a vu que pour tout $d \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\deg\left(\delta(X^k)\right) \leq d$, donc $\delta(X^k) \in \mathbb{R}_d[X]$. Ceci prouve que $\mathbb{R}_d[X]$ est stable par δ.

Or, vient de voir que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}_n[X] \text{ stable par } \delta \text{ sont } \{0\} \text{ et les } \mathbb{R}_d[X] \text{ pour tout } d \in [\![0, n]\!].}$$

III – *Étude d'une famille de polynômes*

III.A – Généralités

Q16. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(H_k) = k$, donc $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est donc libre et , comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$:

$$\boxed{\text{La famille } (H_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q17. On a vu plus haut (question **Q10**) que $\delta(H_0)=\delta(1)=0$. On a aussi :

$$\delta(H_1)=H_1(X+1)-H_1(X)=(X+1)-X=1=H_0.$$

Et si $n\geq 2$, on a pour tout $k\in[\![2,n]\!]$:

$$H_k(X)=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)=\frac{1}{k!}(X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)=\frac{1}{k}(X+1-k)H_{k-1}(X)$$

$$H_k(X+1)=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j)=\frac{1}{k!}(X+1)\prod_{j=1}^{k-1}\left(X-(j-1)\right)$$

$$\underset{j'=j-1}{=}\frac{1}{k!}(X+1)\prod_{j'=0}^{k-2}\left(X-j'\right)=\frac{1}{k}(X+1)H_{k-1}(X)$$

Alors :

$$\delta(H_k)=H_k(X+1)-H_k(X)=\frac{1}{k}(X+1)H_{k-1}(X)-\frac{1}{k}(X+1-k)H_{k-1}(X)=H_{k-1}(X).$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta(H_0)=0 \text{ et pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ \delta(H_k)=H_{k-1}(X).}$$

Q18. Par définition, on a posé $M=M_{\mathcal{B}_c}(\tau)$ (question **Q3**).

Si note $\mathcal{B}=\left(H_0,H_1,\ldots,H_n\right)$, $\mathcal{B}$ est une base d'après la question **Q17**, et d'après la question **Q18** :

$$M_{\mathcal{B}}(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\0&0&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}=M'-I_{n+1}.$$

Or, $\tau=\delta+Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(\tau)=M_{\mathcal{B}}(\delta+Id_{\mathbb{R}_n[X]})=M_{\mathcal{B}}(\delta)+M_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}_n[X]})=\left(M'-I_{n+1}\right)+I_{n+1}=M'.$$

Ainsi, M et M' sont les matrices du même endomorphisme τ dans deux bases différentes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M' \text{ sont semblables.}}$$

Q19. Soient $k,\ell\in[\![0,n]\!]$. D'après la question **Q12**, on a $\delta^k(H_\ell)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j(H_\ell)$, donc :

$$\delta^k(H_\ell)(0)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j(H_\ell)(0).$$

Or, d'après la question **Q2**, on a $\tau^j(H_\ell) = H_\ell(X+j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc :

$$\tau^j(H_\ell)(0) = H_\ell(j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \ell = 0 \\ \dfrac{1}{\ell!}\displaystyle\prod_{i=0}^{\ell-1}(j-i) & \text{pour } \ell \in [\![1,n]\!] \end{cases}$$

Pour $\ell = 0$, on obtient :

$$\delta^k(H_0)(0) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} = (1-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 = \ell \\ 0 & \text{pour } k > 0 = \ell \end{cases}$$

Pour $\ell > 0$, on a :

$$\tau^j(H_\ell)(0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } j < \ell \\ \dfrac{1}{\ell!}\dfrac{j!}{(j-\ell)!} & \text{pour } j \geq \ell \end{cases}$$

Considérons trois cas.

- Si $k < \ell$, alors $\delta^k(H_\ell)(0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} \times 0 = 0$.
- Si $k = \ell$, alors $\delta^\ell(H_\ell)(0) = (-1)^{\ell-\ell}\dbinom{\ell}{\ell}\tau^\ell(H_\ell)(0) = 1$.
- Si $k > \ell$, alors :

$$\begin{aligned}\delta^k(H_\ell)(0) &= \sum_{j=\ell}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{\ell!}\frac{j!}{(j-\ell)!} = \sum_{j=\ell}^{k}(-1)^{k-j}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{1}{\ell!}\frac{j!}{(j-\ell)!} \\ &= \frac{k!}{\ell!}\sum_{j=\ell}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{(k-j)!(j-\ell)!} \underset{j'=j-\ell}{=} \frac{k!}{\ell!}\sum_{i=0}^{k-\ell}(-1)^{k-(i+\ell)}\frac{1}{\big(k-(i+\ell)\big)!i!} \\ &= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\sum_{i=0}^{k-\ell}(-1)^{(k-\ell)-i}\frac{(k-\ell)!}{\big((k-\ell)-i\big)!i!} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}(1-1)^{k-\ell} = 0\end{aligned}$$

Finalement, on trouve bien pour tous $k, \ell \in [\![0,n]\!]$:

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}}$$

Q20. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k H_k\,.$$

Alors pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on a $\delta^j(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\delta^j(H_k)$ et donc :

$$\delta^j(P)(0) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\delta^j(H_k)(0)\,.$$

Or, d'après la question précédente, on a pour tous $j,k \in [\![0,n]\!]$, $\delta^j(H_k)(0)=\delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, donc :

$$\delta^j(P)(0)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\delta_{j,k}=\lambda_j\,.$$

Et ainsi, on a bien :

$$\boxed{P=\sum_{k=0}^{n}\left(\delta^k(P)(0)\right)H_k}$$

III.B – Polynômes à valeurs entières

Q21. Soit $k\in\mathbb{Z}$. On a $H_n=\dfrac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$, donc :

$$H_n(k)=\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(k-j)\,.$$

Alors :

- si $k\in[\![0,n-1]\!]$, $H_n(k)=0$;
- si $k\geq n$, $H_n(k)=\dfrac{1}{n!}k(k-1)(k-2)...(k-n+1)=\dfrac{k!}{n!(k-n)!}=\dbinom{k}{n}$;
- si $k<0$, alors en posant $k=-p$, on a $p\in\mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{aligned}H_n(k)&=\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(-p-j)=\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(j+p)=\frac{(-1)^n}{n!}p(p+1)...(p+n-1)\\&=(-1)^n\frac{(p-1+n)!}{n!(p-1)!}=(-1)^n\binom{p-1+n}{n}=(-1)^n\binom{-k-1+n}{n}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$H_n(k)=\begin{cases}(-1)^n\dbinom{-k-1+n}{n} & \text{pour } k<0\\ 0 & \text{pour } 0\leq k\leq n-1\\ \dbinom{k}{n} & \text{pour } k\geq n\end{cases}$$

Q22. Les coefficients binomiaux étant toujours des entiers, le résultat ci-dessus permet d'affirmer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $H_n(k)\in\mathbb{Z}$ et donc que :

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}}$$

Q23. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k).$$

Or, $k \in \mathbb{Z}$ et $k+1 \in \mathbb{Z}$, donc $P(k) \in \mathbb{Z}$ et $P(k+1) \in \mathbb{Z}$, et ainsi $\delta(P)(k) \in \mathbb{Z}$.

Finalement :

$$\boxed{\delta(P) \text{ est à valeurs entières sur les entiers.}}$$

Q24. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a vu dans la question **Q20** que $P = \sum_{i=0}^{n} \left(\delta^i(P)(0)\right) H_i$. On veut donc prouver que :

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![0,n]\!],\ \delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}.$$

($\Rightarrow$) On suppose que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, soit pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

Prouvons par récurrence que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\delta^i(P)$ est à valeurs entières sur les entiers.

- Pour $i = 0$, $\delta^0(P) = P$ est à valeurs entières sur les entiers par hypothèse, donc la propriété est vraie au rang $i = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $i \in \mathbb{N}$, soit $\delta^i(P)$ est à valeurs entières sur les entiers. Alors, d'après la question précédente $\delta^{i+1}(P) = \delta\left(\delta^i(P)\right)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers, donc la propriété est vraie au rang $i+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$, autrement dit, pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^i(P)(k) \in \mathbb{Z}$.

En particulier pour $k = 0$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$.

La démarche mise en œuvre pour H_n dans la question **Q21** peut être effectuée pour tout H_i. Ceci permet de conclure que tous les H_i sont à valeurs entières sur les entiers et donc que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_i(k) \in \mathbb{Z}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\left(\delta^i(P)(0)\right) H_i(k) \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$P(k) = \sum_{i=0}^{n} \left(\delta^i(P)(0)\right) H_i(k) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

On a donc bien établi l'équivalence :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un polynôme } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et} \\ \text{seulement si ses coordonnées dans la base } \left(H_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]} \text{ sont entières.}\end{array}}$$

Q25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$ et à valeurs entières sur les entiers.

Si $d = 0$, alors $0!P = P(0)$ et $P(0) \in \mathbb{Z}$, donc $d!P$ est à coefficients entiers.

On suppose maintenant $d \geq 1$. D'après la question **Q20** :

$$d!P = \sum_{k=0}^{d} d!\left(\delta^k(P)(0)\right) H_k = \frac{d!}{0!}\left(\delta^0(P)(0)\right) + \sum_{k=1}^{d} \frac{d!}{k!}\left(\delta^k(P)(0)\right)\prod_{j=0}^{k-1}(X-j).$$

D'après la question **Q24**, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $\delta^k(P)(0)$ est entier et $\dfrac{d!}{k!} = \dbinom{d}{k}(d-k)!$ est entier aussi, donc $\dfrac{d!}{k!}\left(\delta^k(P)(0)\right)$ est entier.

Enfin, pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, $\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$ est à coefficients entiers, donc $\dfrac{d!}{k!}\left(\delta^k(P)(0)\right)\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$ est un polynôme à coefficients entiers.

Ainsi, $d!P$ est une somme de polynômes à coefficients entiers et finalement :

$$\boxed{\text{Le polynôme } d!P \text{ est bien à coefficients entiers.}}$$

Si prend $P = \dfrac{1}{2}X^2$ (de degré 2), le polynôme $2!P = X^2$ est à coefficients entiers, mais $P(1) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc P n'est pas à valeurs entières sur les entiers. Ainsi :

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

Exercice n° 2

I - *Quelques résultats préliminaires*

1) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Alors, pour tout entier $n \geq 2$, soit $n > 1$, on a $A_n > A_1 = a_1 = 1$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $\ln A_n$ est bien défini avec $A_n > 0$ et $\ln A_n > 0$. On peut donc calculer $b_n = \dfrac{1}{\ln A_n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{A_k}$ et ainsi, lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété (P) :

$$\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\geq 2} \text{ est bien définie.}}$$

2) Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ et $V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, la suite $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et comme elle diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

Par ailleurs, comme $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement positives, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\geq N+1$, on a $(1-\varepsilon)u_n\leq v_n\leq(1+\varepsilon)u_n$.

Alors, pour tout entier $n\geq N+1$, on a $(1-\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}u_k\leq\sum\limits_{k=N+1}^{n}v_k\leq(1+\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}u_k$, soit :

$$(1-\varepsilon)\left(U_n-U_N\right)\leq V_n-V_N\leq(1+\varepsilon)\left(U_n-U_N\right).$$

Ceci se récrit :

$$(1-\varepsilon)U_n+A\leq V_n\leq(1+\varepsilon)U_n+B$$

avec $A=V_N-(1-\varepsilon)U_N$ et $B=V_N-(1+\varepsilon)U_N$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$, on a $U_n>0$. On peut alors écrire pour tout entier $n\geq N+1$:

$$1-\varepsilon+\frac{A}{U_n}\leq\frac{V_n}{U_n}\leq1+\varepsilon+\frac{B}{U_n}.$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A}{U_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{B}{U_n}=0$ et il existe $N'\in\mathbb{N}^*$ tels que pour tout entier $n\geq N'$, $-\varepsilon\leq\frac{A}{U_n}$ et $\frac{B}{U_n}\leq\varepsilon$. Alors, pour tout entier $n\geq N_0=\max\left(N+1,N'\right)$, on a :

$$1-2\varepsilon\leq\frac{V_n}{U_n}\leq1+2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_n}{U_n}=1$, soit $U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}V_n$, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}u_k\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n}v_k}$$

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\frac{1}{n\ln n}\quad\text{et}\quad v_n=\ln\left(\ln(n+1)\right)-\ln\left(\ln n\right).$$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n>0$ et $v_n>0$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$).
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$.
- La série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

On peut donc utiliser le résultat de la question précédente, qui donne : $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = H_n$ et par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln k\right] = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Donc, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ et comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on obtient :

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

4) On pose maintenant pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n \ln n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln n\right).$$

- Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} > 0$ et $v_n > 0$ (à nouveau grâce à la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$).
- On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln n\right) = \ln\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln\left(\ln n\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) = \frac{1}{n\ln n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \end{aligned}$$

  Donc, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

- Enfin, pour tout entier $n \geq 2$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(\ln(k+1)\right) - \ln\left(\ln k\right)\right] = \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln 2\right).$$

  Et $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\ln(n+1)\right) = +\infty$ donc, la série $\sum v_n$ diverge et, par comparaison, il en va de même pour la série $\sum u_n$.

Ainsi, on peut à nouveau utiliser le résultat de la question 2 pour affirmer que :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \sum_{k=2}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} v_k = \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln 2\right).$$

Et, avec $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\ln n\right) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$, on a :

$$\ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln 2\right) = \ln\left(\ln n\right) + \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) - \ln\left(\ln 2\right) = \ln\left(\ln n\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\ln\left(\ln n\right)\right)$$

Et ainsi, $\sum_{k=2}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$ d'où :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}$$

II - *Etude de deux exemples*

5) Ici, $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. On a :

$$\begin{cases} \bullet\ a_1 = 1 \geq 1, \\ \bullet\ \text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante donc bornée,} \\ \bullet\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1 > 0, \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien la propriété } (P).}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{\ln n}.$$

D'après la question 3, on a $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1}$$

5) Ici, $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. On a :

$$\begin{cases} \bullet\ a_1 = \frac{1}{1} = 1 \geq 1, \\ \bullet\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < a_n = \frac{1}{n} \leq 1, \text{ donc la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée,} \\ \bullet\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n} > 0, \\ \bullet\ \text{la série hramonique } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien la propriété } (P).}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{1}{\ln A_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} = \frac{1}{\ln H_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,H_k}.$$

On a $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, donc $\frac{1}{n\,H_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$.

Or, d'après la question 4, la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge et, comme pour tout entier $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n\,H_n} > 0$ et $\frac{1}{n \ln n} > 0$, on peut utiliser la question 2 pour conclure que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,H_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

Et d'après la question 4, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$, donc :

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,H_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}.$$

De plus, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln H_n = \ln\left(\ln n \frac{H_n}{\ln n}\right) = \ln(\ln n) + \ln\left(\frac{H_n}{\ln n}\right).$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{H_n}{\ln n}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$, donc $\ln\left(\frac{H_n}{\ln n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\big(\ln(\ln n)\big)$, d'où :

$$\underline{\ln H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}.$$

Finalement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,H_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln H_n$ et $b_n = \frac{1}{\ln H_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,H_k}$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1}$$

III - *Retour au cas général*

7) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la propriété (P).

a. On a vu dans la question 1 que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et diverge par hypothèse (la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge). On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty.$$

De plus, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $A_1 = a_1 = 1$, donc pour tout entier $n \geq 2$, $A_{n-1} \neq 0$ et :

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{n-1} + a_n}{A_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{n-1} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 1$, soit :

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}}$$

b. On a pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{A_n}{A_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{A_{n-1}} > 0$ donc on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}\right).$$

Or, on vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} = 0$, donc : $\ln\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_{n-1}}$.

Or, $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$, donc $\frac{a_n}{A_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}$ et ainsi, on a bien :

$$\boxed{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}}$$

c. Pour tout entier $n \geq 2$, on a avec un télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(A_k) - \ln(A_{k-1})\right] = \ln(A_n) - \ln(A_1).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(A_n) = +\infty$, et donc, la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)$ diverge.

Avec $\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}$ et $\frac{a_n}{A_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut conclure par comparaison de séries à termes positifs que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{A_n} \text{ diverge.}}$$

On a :

- pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{a_n}{A_n} > 0$ et $\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}\right) > 0$;
- $\frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$;

- la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_n}{A_n}$ diverge.

Toutes les hypothèses de la question 2 sont réunies, donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right).$$

Or, on a vu que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \ln(A_n) - \ln(A_1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(A_n) = +\infty$), donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n).$$

Et avec $b_n = \dfrac{1}{\ln A_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1}$$

8) On a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_1 > 0$ et la suite $\left(\dfrac{u_n}{u_1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus, si on trouve une solution $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour la suite $\dfrac{1}{u_1}u$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{u_n}{u_1}\right)$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et cette suite convient pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ainsi, quitte à remplacer u par $\dfrac{1}{u_1}u$, on peut supposer que $u_1 = 1$ (et donc que $u_1 \geq 1$).

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et minorée par $U_1 = u_1 = 1$. Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive.

Comme la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, on a de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Considérons alors deux cas.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, alors elle vérifie (P).

  Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{U_n}$. Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et diverge vers l'infini, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, strictement positive et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

  De plus, d'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(U_n) = +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convient donc.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée, posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$w_n = \min(1, u_n).$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée, elle possède une infinité de termes strictement supérieurs à 1 (sinon $0 < u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée). Ceci implique que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une suite extraite dont tous les termes valent 1 et donc que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ diverge grossièrement.

On a :

  - $u_1 = 1$ donc $w_1 = \min(1, u_1) = 1$;
  - pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0 < w_n \leq 1$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et bornée ;
  - $\sum_{n\geq 1} w_n$ diverge.

On se retrouve alors dans le cas précédent pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc en posant pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ et $v_n = \dfrac{w_n}{W_n}$, on a :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n > 0 \\ \bullet\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0 < w_n \leq u_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ implique alors que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convient.

En définitive, dans les deux cas :

$$\boxed{\text{Il existe une suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ à termes positifs telle que : } \begin{cases} \bullet\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n) \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n \text{ diverge.} \end{cases}.}$$

9) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

Comme la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge, on a : $\underline{R \leq 1}$.

Or, comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi pour tout $x\in\,]-1,1[$, donc d'après le lemme d'Abel : $\underline{R \geq 1}$.

Finalement, on a $R = 1$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geq 1} a_n x^n \text{ est 1.}}$$