# *DM de Mathématiques n° 4*

Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}|u_{n,p}|$ converge.

On note alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}|$ et on suppose en outre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n$ converge.

1) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_{n,p}|$ converge.

2) Justifier que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}u_{n,p}$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{n,p}$ converge pour tout $p\in\mathbb{N}$.

On note alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sigma_n=\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, $s_p=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,p}$.

3) Montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}}s_p$ convergent absolument.

On note alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}$ et $S'=\sum_{p=0}^{+\infty}s_p=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,p}$.

4) Dans cette question, on suppose que les $u_{n,p}$ sont des réels positifs. Prouver que $S=S'$.

5) Dans cette question, on revient au cas général.

   a. Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}|=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,p}|$.

   b. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\left|S'-\sum_{n=0}^{N}\sigma_n\right|\le\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}|-\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}|$.

   c. En déduire que l'on a encore $S=S'$.

On vient donc de prouver que pour une famille $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}|u_{n,p}|$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}|\right)$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,p}$ (et ces sommes ont du sens).

Quitte à réindexer, cette formule d'interversion reste vraie si les sommes ne commencent pas à 0, soit :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{p=p_0}^{+\infty}u_{n,p}=\sum_{p=p_0}^{+\infty}\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_{n,p}.$$

6) *Une application.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $]-R,R[$ avec $R>0$.

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est développable en série entière sur $]-R,R[$ avec pour tout $x\in\,]-R,R[$, $f_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p$.

a. Justifier que pour tout $x\in\,]-R,R[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left|a_{n,p}x^p\right|$ converge.

On suppose en outre que pour tout $x\in\,]-R,R[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left|a_{n,p}x^p\right|\right)$ converge.

b. Montrer que $F=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est définie et développable en série entière sur $]-R,R[$ et exprimer les coefficients du développement en série entière de $F$ à l'aide des $a_{n,p}$.

7) *Une application de l'application.*

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n^2}$.

a. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que $F=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins) et donner le développement.

c. Montrer que le rayon de convergence de la série entière obtenue est 1.

☺ *On pourra penser à la comparaison série-intégrale.*