DM de Mathématiques n° 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $u\in\mathcal{L}(E)$.

Dans ce sujet, on appelle matrice de type $\mathcal{N}$ toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

avec $\varepsilon_k\in\{0;1\}$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Partie I – Réduction des endomorphismes nilpotentes

Dans cette partie, on suppose que u est nilpotent d'indice $p\in\mathbb{N}^*$ (l'indice de nilpotence est la plus petite puissance qui annule u).

1) Soit x un vecteur non nul de E. On pose $C_u(x)=\mathrm{Vect}\left(u^k(x), k\in\mathbb{N}\right)$.
    a. Montrer que $C_u(x)$ est stable par u.
    b. Montrer qu'il existe un entier $p(x)\in\mathbb{N}^*$ tel que $C_u(x)=\mathrm{Vect}\left(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p(x)-1}(x)\right)$ et que $\dim C_u(x)=p(x)$.
    c. Que valent $C_u(x)$ et $p(x)$ quand $x\in\ker u$?
    d. En général, que vaut $C_u(x)\cap\ker u$?
2) Prouver que $\mathrm{Im}\,u$ est stable par u, puis que $\tilde{u}$, l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\,u$, est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.
3) Démontrer par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ qu'il existe des vecteurs $x_1,\dots,x_q$ de E (avec $q\in\mathbb{N}^*$) tels que $E=C_u(x_1)\oplus\dots\oplus C_u(x_q)$.

    ☺ *On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{u}$, défini dans la question 2.*
4) Montrer que dans une base de E bien choisie, la matrice de u est une matrice de type $\mathcal{N}$.

Partie II – Réduction de Jordan

Dans cette partie, on ne suppose plus que u est nilpotent, mais on suppose que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

On note $Sp(u)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ le spectre de u, et pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, n_k la multiplicité de λ_k et on pose $F_k=\ker\left[\left(u-\lambda_k id_E\right)^{n_k}\right]$.

On admet le lemme de décomposition des noyaux qui dit que si un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ s'écrit $P=P_1P_2\dots P_r$ où les P_k sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sans racine réelle ou complexe commune deux à deux, alors $\ker\left(P(u)\right)=\ker\left(P_1(u)\right)\oplus\ker\left(P_2(u)\right)\oplus\dots\oplus\ker\left(P_r(u)\right)$.

5) Justifier que pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, F_k est stable par u et que si on note u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k, alors $u_k-\lambda_k id_{F_k}$ est nilpotent.
6) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $D+N$ où D est une matrice diagonale et N est une matrice de type $\mathcal{N}$.