DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice n° 1

(*extrait adapté de Centrale 2 - PC - 2016*)

Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré et $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant.

On note $\mathcal{B}_c = \left(1, X, \dots, X^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on note $[M]_{i,j}$ ses coefficients (avec $i, j \in [\![1, p]\!]$).

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application f^k par $f^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.

Si f est bijective, on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

I – *L'opérateur de translation*

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

où $P(X+1)$ désigne la composée de $X+1$ par P. Par exemple : $\tau(X^2) = (X+1)^2$.

Q1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg\left(\tau(P)\right)$ et $\mathrm{cd}\left(\tau(P)\right)$ en fonction de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

Q2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

Q3. Donner la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de τ dans la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On exprimera les coefficients $[M]_{i,j}$ en fonction de *i* et *j*.

Q4. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^k trouvée à la question **Q2** pour $k \in \mathbb{N}$ reste-elle valable pour $k \in \mathbb{Z}$?

Q5. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $[M^{-1}]_{i,j}$ en fonction de *i* et *j*.

Q6. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j .$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Q7. En déduire la formule d'inversion : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j .$$

Q8. On considère un réel λ et $u = (\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Quelle est la suite *v* définie par la formule de la question **Q6** ? Vérifier alors la formule de la question précédente.

II – *L'opérateur de différence*

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, soit :

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q9. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg\big(\delta(P)\big)$ et $\mathrm{cd}\big(\delta(P)\big)$ en fonction de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

Q10. En déduire le noyau $\ker\delta$ et l'image $\mathrm{Im}\,\delta$ de l'endomorphisme δ.

Q11. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker \delta^j = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,\delta^j = \mathbb{R}_{n-j}[X].$$

Q12. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

Q13. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 .$$

Q14. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a. Montrer que u et δ^2 commutent.

b. En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'endomorphisme u.

c. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Conclure.

Q15. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a. Pour un polynôme non nul P de degré $d \le n$, montrer que la famille $\left(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)\right)$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b. En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

c. Conclure.

III – *Étude d'une famille de polynômes*

On considère la famille de polynômes :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

III.A – Généralités

Q16. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q17. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.

Q18. La matrice M définie à la question **Q3** et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Q19. Montrer que, pour tous $k, \ell \in [\![0, n]\!]$:

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

Q20. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \left(\delta^k(P)(0)\right) H_k .$$

III.B – Polynômes à valeurs entières

Q21. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

Q22. En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

Q23. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

Q24. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont entières.

Q25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

Exercice n° 2

(*extrait adapté de E3A B - PSI - 2012*)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

On dit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété (P) si elle vérifie à la fois :

$$\begin{cases} \bullet\ a_1 \geq 1, \\ \bullet\ \text{la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée,} \\ \bullet\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0, \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors pour tout entier $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{1}{\ln A_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}.$$

I - *Quelques résultats préliminaires*

1) Prouver que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété (P), alors la suite $(b_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.

2) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$.

   ☺ *On pourra poser pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln n$, prouver que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

4) De façon analogue, prouver que :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n).$$

II - *Etude de deux exemples*

5) Dans cette question, on prend $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie vérifie la propriété (P).

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

6) Dans cette question, on prend $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie vérifie à nouveau la propriété (P).

   b. A l'aide de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

III - *Retour au cas général*

7) On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifie la propriété (P).

   a. Montrer que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

   b. Prouver que $\frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

   c. Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{A_n}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

8) Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs et divergente.

Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs telle que : $\begin{cases} \bullet\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n) \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n \text{ diverge.} \end{cases}$.

9) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui vérifie la propriété (P).

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

- FIN DU SUJET -