Corrigé du DM de n° 4

1) Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|u_{n,p}\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty}\left|u_{n,p}\right| = \alpha_n$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, donc par comparaison de séries positives :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}}\left|u_{n,p}\right| \text{ converge pour tout } p \in \mathbb{N}.}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left|u_{n,p}\right|$ converge par hypothèse, donc la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ est absolument convergente et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p} \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

De même, d'après la question précédente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|u_{n,p}\right|$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ est absolument convergente et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,p} \text{ converge pour tout } p \in \mathbb{N}.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge absolument, on peut écrire :

$$\left|\sigma_n\right| = \left|\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty}\left|u_{n,p}\right| = \alpha_n .$$

Or, par hypothèse, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, donc par comparaison de séries positives :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n \text{ converge absolument.}}$$

De la même façon, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a vu dans la question 1 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge absolument, donc on peut écrire :

$$\left|s_p\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_{n,p}\right| .$$

Alors, pour tout $P \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^{P}\left|s_p\right| \leq \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_{n,p}\right| .$$

Or, si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|$ convergent pour tous les entiers p compris entre 0 et P, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| \right)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^{P} |s_p| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n .$$

Comme la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} |s_p|$ est à termes positifs, on peut conclure que qu'elle converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{p\in\mathbb{N}} s_p \text{ converge absolument.}}$$

Remarquons que si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ *et* $\sum_{p\in\mathbb{N}} s_p$ *convergent absolument, alors elles convergent et donc les somme* S *et* S' *sont bien définies.*

4) Or, ici les $u_{n,p}$ sont des réels positifs, donc :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \alpha_n$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = |s_p|$ et .

Dans la question précédente, on a vu que pour tout $P \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{P} |s_p| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$, soit ici :

$$\sum_{p=0}^{P} s_p \le S .$$

Et comme la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} s_p$ converge (elle converge absolument, ce qui est la même chose ici), on peut passer à la limite quand P tend vers l'infini dans l'inégalité précédente. Avec $S' = \sum_{p=0}^{+\infty} s_p$, ceci donne :

$$\underline{S' \le S .}$$

De la même façon, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \sigma_n \le \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} u_{n,p} \le \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = S' .$$

Et en passant à la limite quand N tend vers l'infini, ceci donne :

$$\underline{S \le S' .}$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{S = S'}$$

5) a. Les hypothèses initiales de l'énoncé (la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right)$ converge) ne portent que sur les $|u_{n,p}|$ qui sont des réels positifs. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente à la famille $\left(|u_{n,p}| \right)_{n,p\in\mathbb{N}}$, ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|}$$

b. Soit $N \in \mathbb{N}$.

Comme les séries $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ convergent pour tous les entiers n compris entre 0 et N, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{N} \sigma_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{n,p} .$$

Alors :

$$\left| S' - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{n,p} \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} - \sum_{n=0}^{N} u_{n,p} \right) \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_{n,p} \right| .$$

Et comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| S' - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_{n,p} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_{n,p} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{n,p}| .$$

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ et les séries $\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge pour tous les entiers n compris entre 0 et N, on peut écrire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^{N} |u_{n,p}| \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_{n,p}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\left| S' - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|}$$

c. On a $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, donc $\lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right] = 0$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{N\to+\infty} \left[S' - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \right] = 0$, soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sigma_n = S'$, ou encore :

$$\boxed{S = S'}$$

6) a. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Une série entière converge absolument sur son intervalle ouvert de convergence. Ainsi, comme f_n est développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $f_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p$ pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$\boxed{\text{La série } \sum_{p\in\mathbb{N}}\left|a_{n,p}x^p\right| \text{ converge.}}$$

b. Soit $x\in\,]-R,R[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left|a_{n,p}x^p\right|$ converge et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left|a_{n,p}x^p\right|\right)$ converge.

Les deux hypothèses des questions 1 à 5 sont respectées, on peut donc affirmer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_{n,p}x^p$ convergent pour tout $p\in\mathbb{N}$, ainsi que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p\right)$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p\right)$ avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p .$$

Ceci implique que :

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_{n,p}$ converge pour tout $p\in\mathbb{N}$;
- pour tout $x\in\,]-R,R[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)$ converge ;
- pour tout $x\in\,]-R,R[$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p\right)$ converge et :

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}\right)x^p=\sum_{p=0}^{+\infty}b_px^p .$$

Tout ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\begin{array}{l}F=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n \text{ est définie et développable en série entière sur }]-R,R[\text{, avec pour}\\ \text{tout } x\in\,]-R,R[,\ F(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}b_px^p \text{ avec } b_p=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p} \text{ pour tout } p\in\mathbb{N}.\end{array}}$$

7) a. Toutes les fonctions f_n sont définies et positives sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, on peut conclure que $\sum f_n(x)$ converge absolument. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge absolument sur } \mathbb{R}.}$$

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\left]-1,1\right[$, on a $\dfrac{x^2}{n^2}\in\left]-1,1\right[$, donc :

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}=\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^{2k+2}}x^{2k}.$$

Ainsi, f_n est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$, avec pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$f_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}x^p \quad \text{où} \quad a_{n,p}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{n^{2k+2}} & \text{quand } p=2k\\ 0 & \text{quand } p=2k+1\end{cases}.$$

De plus, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $x^2\in\left[0,1\right[$, donc la série géométrique $\sum(x^2)^k$ converge (de somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^{2k}=\frac{1}{1-x^2}$) et :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left|a_{n,p}x^p\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}\left|a_{n,2k}\right|x^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}x^{2k}\le\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^{2k}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}x^{2k}=\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-x^2}.$$

Or, la série des $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left|a_{n,p}x^p\right|\right)$ converge.

Ainsi, les hypothèses de la question précédente sont réunies, ce qui permet de conclure que :

$\displaystyle F:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$, avec pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $\displaystyle F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}\right)x^{2k}$.

c. Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{2k+2}}$ est décroissante et continue sur $\left[1,+\infty\right[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{2k+2}}\le\frac{1}{n^{2k+2}}.$$

Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{N+1}\frac{dt}{t^{2k+2}}=\frac{1}{2k+1}\left[1-\frac{1}{(N+1)^{2k+1}}\right]\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2k+2}}.$$

Et en faisant tendre N vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}\ge\frac{1}{2k+1}.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|>1$, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}\right)x^{2k}\ge\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{k \to +\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) x^{2k} = +\infty$ et donc la série $\sum (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) x^{2k}$ diverge grossièrement quand $|x| > 1$.

Comme on a vu que la série $\sum (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) x^{2k}$ converge quand $|x| < 1$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) x^{2k} \text{ est 1.}}$$