Corrigé du DM n° 5

Partie I – Réduction des endomorphismes nilpotentes

1) a. On a $C_u(x)=\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}u\left(C_u(x)\right)&=u\left(\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}\right)\right)=\mathrm{Vect}\left(u\left(u^k(x)\right),\, k\in\mathbb{N}\right)\\&=\mathrm{Vect}\left(u^{k+1}(x),\, k\in\mathbb{N}\right)=\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}^*\right)\end{aligned}$$

Et $\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}^*\right)\subset\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}\right)$, soit $u\left(C_u(x)\right)\subset C_u(x)$ et ainsi :

$$\boxed{C_u(x)\text{ est stable par } u.}$$

b. Posons $A=\left\{k\in\mathbb{N}^*,\, u^k(x)=0\right\}$. Comme $u^p=0$, $p\in A$. Ainsi, A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et donc possède un plus petit élément, noté $p(x)\in\mathbb{N}^*$.

Comme $p(x)\in A$ (c'est le minimum de A), on a $u^{p(x)}(x)=0$ et pour tout entier $k\geq p(x)$:

$$u^k(x)=u^{k-p(x)}\left(u^{p(x)}(x)\right)=u^{k-p(x)}(0)=0.$$

Ainsi, $C_u(x)=\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\, k\in\mathbb{N}\right)=\mathrm{Vect}\left(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p(x)-1}(x), 0, 0, \dots\right)$, soit :

$$\boxed{C_u(x)=\mathrm{Vect}\left(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p(x)-1}(x)\right)}$$

Montrons que la famille $\left(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p(x)-1}(x)\right)$ est libre.

Comme $p(x)=\min A$, on a $p(x)-1\notin A$, donc $u^{p(x)-1}(x)\neq 0$.

Soit $\left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p(x)-1}\right)\in\mathbb{K}^{p(x)}$ tel que :

$$\alpha_0 x+\alpha_1 u(x)+\dots+\alpha_{p(x)-1}u^{p(x)-1}(x)=0 \qquad (*)$$

Notons $B=\left\{k\in[\![0, p(x)-1]\!],\, \alpha_k\neq 0\right\}$.

On suppose que B est non vide. C'est alors une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc elle possède un plus petit élément, $\min B=m\in[\![0, p(x)-1]\!]$. Comme m est un minimum, on a $m\in B$ donc $\alpha_m\neq 0$ et $\alpha_k=0$ pour tout $k\in[\![0, m-1]\!]$ (s'il y a lieu, c'est-à-dire si $m\geq 1$).

La relation (*) devient $\alpha_m u^m(x)+\dots+\alpha_{p(x)-1}u^{p(x)-1}(x)=0$ et en lui appliquant $u^{p(x)-1-m}$, on obtient :

$$u^{p(x)-1-m}\left(\alpha_m u^m(x)+\dots+\alpha_{p(x)-1}u^{p(x)-1}(x)\right)=\alpha_m u^{p(x)-1}(x)+\alpha_{m+1}u^{p(x)}(x)+\dots+\alpha_{p(x)-1}u^{2(p(x)-1)-m}(x)=0.$$

Or, $u^k(x)=0$ pour tout $k \geq p(x)$, donc $\alpha_m u^{p(x)-1}(x)=0$, ce qui est absurde car $\alpha_m \neq 0$ et $u^{p(x)-1}(x) \neq 0$. Ainsi, supposer que B est non vide mène à une absurdité, donc B est vide, ce qui veut dire que $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p(x)-1} = 0$ et onc la famille $\left(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p(x)-1}(x)\right)$ est libre.

Comme elle est génératrice de $C_u(x)$, c'est une base de $C_u(x)$ et comme elle contient $p(x)$ vecteurs, on peut conclure que :

$$\boxed{\dim C_u(x) = p(x)}$$

c. Si $x \in \ker u$ avec toujours $x \neq 0$, on a $u(x)=0$, donc :

$$\boxed{C_u(x) = \mathrm{Vect}\left(x\right) \text{ et } p(x)=1}$$

d. On a $u^{p(x)-1}(x) \neq 0$ et $u\left(u^{p(x)-1}(x)\right) = u^{p(x)}(x) = 0$, donc $u^{p(x)-1}(x) \in \ker u$.

Avec $u^{p(x)-1}(x) \in C_u(x)$, ceci donne :

$$\underline{\mathrm{Vect}\left(u^{p(x)-1}(x)\right) \subset C_u(x) \cap \ker u.}$$

Soit $z \in C_u(x) \cap \ker u$. On a $z = \alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \ldots \alpha_{p(x)-1} u^{p(x)-1}(x)$ avec $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p(x)-1}\right) \in \mathbb{K}^{p(x)}$ et :

$$u(z) = u\left(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \ldots \alpha_{p(x)-1} u^{p(x)-1}(x)\right) = z = \alpha_0 u(x) + \alpha_1 u^2(x) + \ldots + \alpha_{p(x)-2} u^{p(x)-1}(x) = 0.$$

Comme la famille $\left(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p(x)-1}(x)\right)$ est libre, ceci implique que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p(x)-2} = 0$ et donc que $x \in \mathrm{Vect}\left(u^{p(x)-1}(x)\right)$. Ainsi :

$$\underline{C_u(x) \cap \ker u \subset \mathrm{Vect}\left(u^{p(x)-1}(x)\right).}$$

Finalement :

$$\boxed{C_u(x) \cap \ker u = \mathrm{Vect}\left(u^{p(x)-1}(x)\right)}$$

2) On a $\mathrm{Im}\, u \subset E$, donc $u\left(\mathrm{Im}\, u\right) \subset u\left(E\right) = \mathrm{Im}\, u$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u \text{ est stable par } u.}$$

Si $p=1$, autrement dit si u est nul, on a $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$, donc $\tilde{u}$ est un endomorphisme de $\{0\}$ et on peut écrire $\tilde{u}^0 = id_{\{0\}} = 0 = p-1$ et $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

Supposons $p \geq 2$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, et :

$$\tilde{u}^{p-1}(y) = u^{p-1}(y) = u^{p-1}\left(u(x)\right) = u^p(x) = 0.$$

Ainsi, $\tilde{u}$ est nilpotent et si on appelle $\tilde{p}$ son indice de nilpotence, on a $\tilde{p} \leq p-1$.

Comme l'indice de nilpotence de u est $p \geq 2$, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Comme $p-1 \geq 1$, on peut écrire $u^{p-2}\left(u(x)\right) \neq 0$ et $u(x) \in \operatorname{Im} u$, donc $\tilde{p} \geq p-1$.

Finalement, dans tous les cas :

$$\boxed{\tilde{u} \text{ est nilpotent d'indice } p-1.}$$

3) Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(F)$ nilpotent d'indice p, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\left(x_1, \dots, x_q\right) \in F^q$ tel que $F = C_u(x_1) \oplus \dots \oplus C_u(x_q)$.

Initialisation :

Pour $p = 1$, on a $u = 0$, donc $E = \ker u$. Si $\left(x_1, \dots, x_n\right)$ est une base de $E = \ker u$, on a

$$E = \operatorname{Vect}\left(x_1\right) \oplus \dots \oplus \operatorname{Vect}\left(x_q\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $C_u(x_k) = \operatorname{Vect}\left(x_k\right)$ d'après la question 1.c et donc :

$$E = C_u(x_1) \oplus \dots \oplus C_u(x_n).$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $p = 1$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie à un rang $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p+1$.

D'après la question 2, l'endomorphisme $\tilde{u}$, induit par u sur $\operatorname{Im} u$, est nilpotent d'indice p, donc par hypothèse de récurrence appliquée à $F = \operatorname{Im} u$ et $\tilde{u}$, il existe $\left(y_1, \dots, y_q\right) \in \left(\operatorname{Im} u\right)^q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\operatorname{Im} u = C_{\tilde{u}}(y_1) \oplus \dots \oplus C_{\tilde{u}}(y_q).$$

Pour tout $j \in [\![1, q]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(y_j) \in \operatorname{Im} u$, donc $\tilde{u}^k(y_j) = u^k(y_j)$ et :

$$C_{\tilde{u}}(y_j) = \operatorname{Vect}\left(\tilde{u}^k(y_j), k \in \mathbb{N}\right) = \operatorname{Vect}\left(u^k(y_j), k \in \mathbb{N}\right) = C_u(y_j).$$

Pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, on a $y_j \in \operatorname{Im} u$ donc il existe $x_j \in E$ tel que $y_j = u(x_j)$ et :

$$\begin{aligned} C_u(y_j) &= \operatorname{Vect}\left(u^k(y_j), k \in \mathbb{N}\right) = \operatorname{Vect}\left(u^k\left(u(x_j)\right), k \in \mathbb{N}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(u\left(u^k(x_j)\right), k \in \mathbb{N}\right) = u\left(\operatorname{Vect}\left(u^k(x_j), k \in \mathbb{N}\right)\right) = u\left(C_u(x_j)\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Im} u = \bigoplus_{j=1}^{q} C_{\tilde{u}}(y_j) = \bigoplus_{j=1}^{q} C_u(y_j) = \bigoplus_{j=1}^{q} u\left(C_u(x_j)\right) = u\left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right).$$

Alors, pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in \operatorname{Im} u = u\left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right)$, donc il existe $z_0 \in \ker u$ et $z_1, \dots, z_q \in C_u(x_1) \times \dots \times C_u(x_q)$ tel que :

$$x = z_0 + z_1 + \dots + z_q.$$

On a vu que dans la question 1.d que pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $C_u(x_j) \cap \ker u = \operatorname{Vect}\left(u^{p(x_j)-1}(x_j)\right)$, donc $\operatorname{Vect}\left(u^{p(x_1)-1}(x_1), \dots, u^{p(x_q)-1}(x_q)\right) \subset \ker u$.

Considérons un supplémentaire F de $\mathrm{Vect}\left(u^{p(x_1)-1}(x_1),\dots,u^{p(x_q)-1}(x_q)\right)$ dans $\ker u$.

On a alors $z_0 = w_0 + w_1 + \dots + w_q$ avec $w_0 \in F$ et $w_j \in \mathrm{Vect}\left(u^{p(x_j)-1}(x_j)\right) \subset C_u(x_j)$ pour tout $j \in [\![1,q]\!]$. Ainsi :

$$x = z_0 + z_1 + \dots + z_q = w_0 + w_1 + \dots + w_q + z_1 + \dots + z_q = w_0 + (z_1 + w_1) + \dots + (z_q + w_q).$$

Avec $z_j + w_j \in C_u(x_j)$ pour tout $j \in [\![1,q]\!]$.

Ceci prouve que $x \in F + \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right)$ et ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a :

$$E = F + \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right).$$

Soit maintenant $x \in F \cap \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right)$.

Comme $x \in \bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)$, on peut écrire $x = w_1 + \dots + w_q$ avec $w_j \in C_u(x_j)$ pour tout $j \in [\![1,q]\!]$ et, comme $x \in F \subset \ker u$, on a $u(x) = 0$, soit $u(w_1) + \dots + u(w_q) = 0$.
Or, les $C_u(x_j)$ sont stables par u et, comme ils sont en somme directe, on obtient $u(w_1) = \dots = u(w_q) = 0$. Ainsi, $w_j \in C_u(x_j) \cap \ker u = \mathrm{Vect}\left(u^{p(x_j)-1}(x_j)\right)$ pour tout $j \in [\![1,q]\!]$ et donc $x = w_1 + \dots + w_q \in \mathrm{Vect}\left(u^{p(x_1)-1}(x_1),\dots,u^{p(x_q)-1}(x_q)\right)$.
Finalement, $x \in F \cap \mathrm{Vect}\left(u^{p(x_1)-1}(x_1),\dots,u^{p(x_q)-1}(x_q)\right) = \{0\}$, donc $x = 0$. Ceci prouve que :

$$F \cap \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right) = \{0\}.$$

Ainsi :

$$E = F \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right).$$

Si $F = \{0\}$, alors on a : $E = \bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)$.

Sinon, considérons $(e_1,\dots,e_r)$ une base de F. On a alors $F = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Vect}(e_i)$ et comme d'après la question 1.c, on a pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_i) = C_u(e_i)$ car $e_i \in F \subset \ker u$, on obtient $F = \bigoplus_{i=1}^{r} C_u(e_i)$ et ainsi : $E = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} C_u(e_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{q} C_u(x_j)\right)$.
Ainsi, dans les deux cas, E a la forme voulue et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{Il existe } q \in \mathbb{N}^* \text{ et } x_1,\dots,x_q \in E \text{ tels que } E = C_u(x_1) \oplus \dots \oplus C_u(x_q).}$$

4) Soit $E = C_u(x_1) \oplus ... \oplus C_u(x_q)$.

On a vu dans la question 1.b que pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, $\mathcal{B}_j = \left(u^{p(x_j)-1}(x_j), ..., u^2(x_j), u(x_j), x_j\right)$ est une base de $C_u(x_j)$. Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_q$ est une base de E adaptée à la décomposition.

Pour tout $j \in [\![1,q]\!]$ et tout $k \in [\![0, p(x_j)-1]\!]$, on a $u\left(u^k(x_j)\right) = u^{k+1}(x_j)$ (valant 0 pour $k = p(x_j)-1$)

donc $M_{\mathcal{B}}(u) = diag\left(N_1, ..., N_q\right)$ avec $N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p(x_j)}(\mathbb{K})$ pour tout $j \in [\![1,q]\!]$.

La matrice ainsi obtenue est de type $\mathcal{N}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ est une matrice de type } \mathcal{N}.}$$

Partie II – Réduction de Jordan

5) $\left(u - \lambda_k id_E\right)^{n_k}$ est un polynôme en u, donc commute avec u. Alors :

$$\boxed{F_k = \ker\left[\left(u - \lambda_k id_E\right)^{n_k}\right] \text{ est stable par } u.}$$

Pour tout $x \in F_k = \ker\left[\left(u - \lambda_k id_E\right)^{n_k}\right]$, on a $\left(u_k - \lambda_k id_E\right)^{n_k}(x) = \left(u - \lambda_k id_E\right)^{n_k}(x) = 0$.

Donc $\left(u_k - \lambda_k id_E\right)^{n_k} = 0$ et ainsi :

$$\boxed{u_k - \lambda_k id_{F_k} \text{ est nilpotent.}}$$

6) Comme χ_u, le polynôme caractéristique de u, est scindé sur $\mathbb{K}$, $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ et n_k la multiplicité de λ_k pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} \left(X - \lambda_k\right)^{n_k}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u est annulateur de u, donc $\ker\left(\chi_u(u)\right) = E$.

Les λ_k étant distincts deux à deux, les polynômes $\left(X - \lambda_1\right)^{n_1}$, … , $\left(X - \lambda_r\right)^{n_r}$ sont sans racine réelle ou complexe commune deux à deux, et le lemme de décomposition des noyaux permet alors d'écrire :

$$E = \ker\left(\chi_u(u)\right) = \ker\left(\left(u - \lambda_1 id_E\right)^{n_1}\right) \oplus ... \oplus \ker\left(\left(u - \lambda_r id_E\right)^{n_r}\right) = F_1 \oplus ... \oplus F_r.$$

Comme les F_k sont stables par u, la matrice de u dans toute base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ adaptée à la décomposition ci-dessus est diagonale par blocs, de la forme $M_{\mathcal{B}}(u) = diag\left(M_{\mathcal{B}_1}(u_1), ..., M_{\mathcal{B}_r}(u_r)\right)$.

Comme pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $u_k - \lambda_k id_{F_k}$ est nilpotent, d'après la partie I, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de F_k dans laquelle $N_k = M_{\mathcal{B}_k}(u_k - \lambda_k id_{F_k})$ est de type $\mathcal{N}$.

Or, $N_k = M_{\mathcal{B}_k}(u_k - \lambda_k id_{F_k}) = M_{\mathcal{B}_k}(u_k) - \lambda_k I_{\dim F_k}$, donc $M_{\mathcal{B}_k}(u_k) = \lambda_k I_{\dim F_k} + N_k$ et dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ de E, on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(u) &= diag\left(M_{\mathcal{B}_1}(u_1), \ldots, M_{\mathcal{B}_r}(u_r)\right) \\ &= diag\left(\lambda_1 I_{\dim F_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{\dim F_r} + N_r\right) \\ &= diag\left(\lambda_1 I_{\dim F_1}, \ldots, \lambda_r I_{\dim F_r}\right) + diag\left(N_1, \ldots, N_r\right) = D + N \end{aligned}$$

où $D = diag\left(\lambda_1 I_{\dim F_1}, \ldots, \lambda_r I_{\dim F_r}\right)$ est diagonale et $N = diag\left(N_1, \ldots, N_r\right)$ est de type $\mathcal{N}$ (car les N_k le sont). Ainsi :

> Il existe bien une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale et N est une matrice de type $\mathcal{N}$.