# *Corrigé du DM n° 6*

Pour tout $i \in \{1,2\}$ et tout $\omega \in \Omega$, on a $Z_i(\omega) \in \{0,1\}$, donc $Z_i^2(\omega) = Z_i(\omega)$ et ainsi :

$$Z_i^2 = Z_i .$$

On a alors $Z_i^k = Z_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

De plus, si $Z_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i$, on a :

$$E(Z_i) = p_i \text{ et } V(Z_i) = p_i(1-p_i).$$

Enfin, si $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendantes, on a $E(Z_1Z_2) = E(Z_1)E(Z_2) = p_1p_2$.

1) On a :

$$D = \det A = (Z_1+Z_2)(Z_1-Z_2) + Z_1Z_2 = Z_1^2 - Z_2^2 + Z_1Z_2 .$$

Comme ici $Z_1^2 = Z_1$ et $Z_2^2 = Z_2$, on a :

$$D = Z_1 - Z_2 + Z_1Z_2 .$$

Avec la linéarité de l'espérance, on obtient $E(D) = E(Z_1) - E(Z_2) + E(Z_1Z_2)$, soit :

$$\boxed{E(D) = p_1 - p_2 + p_1p_2}$$

On a :

$$T = tr(A) = Z_1 + Z_2 + Z_1 - Z_2 = 2Z_1 .$$

Et à nouveau grâce à la linéarité de l'espérance, on a $E(T) = 2E(Z_1)$, soit :

$$\boxed{E(T) = 2p_1}$$

Pour $\omega \in \Omega$, on a $\big(Z_1(\omega), Z_2(\omega)\big) = (0,0)$ ou $(1,0)$ ou $(0,1)$ ou $(1,1)$, donc :

$$A(\omega) = A_{0,0} \text{ ou } A_{1,0} \text{ ou } A_{0,1} \text{ ou } A_{1,1}$$

avec $A_{0,0} = 0_2$, $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Or, $rg(A_{0,0}) = 0$ et $rg(A_{1,0}) = rg(A_{0,1}) = rg(A_{1,1}) = 2$, donc $R(\Omega) = \{0,2\}$ et :

$$\begin{aligned} P(R=0) &= P(A = A_{0,0}) = P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) \\ &= P(Z_1=0)P(Z_2=0) = (1-p_1)(1-p_2) = 1 - (p_1 + p_2 - p_1p_2) \end{aligned}$$

car $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendantes.

Ainsi, $\frac{1}{2}R$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_1 + p_2 - p_1p_2$ et donc $E(R) = 2E\left(\frac{1}{2}R\right)$, soit :

$$\boxed{E(R) = 2(p_1 + p_2 - p_1p_2)}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(Z_1 - Z_2 + Z_1 Z_2\right)^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_1^2 Z_2^2 - 2Z_1Z_2 + 2Z_1^2 Z_2 - 2Z_1 Z_2^2 \\ &= Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2 - 2Z_1Z_2 + 2Z_1Z_2 - 2Z_1Z_2 = Z_1 + Z_2 - Z_1Z_2 \end{aligned}.$$

Et, par linéarité de l'espérance :

$$E(D^2) = E(Z_1) + E(Z_2) - E(Z_1Z_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 .$$

Avec la formule de Huygens, $V(D) = E(D^2) - E(D)^2$, on obtient :

$$\boxed{V(D) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 - \left(p_1 - p_2 + p_1 p_2\right)^2}$$

Comme $T = 2Z_1$, on a $V(T) = 4V(Z_1)$, soit :

$$\boxed{V(T) = 4p_1(1 - p_1)}$$

On a $V(R) = 4E\left(\frac{1}{2}R\right)$ et comme $\frac{1}{2}R$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_1 + p_2 - p_1 p_2$, on obtient :

$$\boxed{V(R) = 4\left(p_1 + p_2 - p_1p_2\right)\left(1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2\right) = 4\left(p_1 + p_2 - p_1 p_2\right)\left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right)}$$

3) Notons $A_{inv}$ l'évènement « $A$ est inversible ». On a :

$$A_{inv} = \left(D \neq 0\right) = \overline{\left(D = 0\right)}.$$

Donc, $P(A_{inv}) = P\left(\overline{(D=0)}\right) = 1 - P\left(D = 0\right)$ et d'après la question 1 :

$$\left(D = 0\right) = \left(R = 0\right) = \left(A = A_{0,0}\right) = \left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right)$$

Donc $P(A_{inv}) = 1 - P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$, soit :

$$\boxed{P(A_{inv}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

4) On a vu que l'on a $A(\Omega) = \left\{A_{0,0}, A_{1,0}, A_{0,1}, A_{1,1}\right\}$ et :

- $A_{0,0} = 0_2$ est diagonale, donc diagonalisable ;
- $A_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes, 1 et – 1 (ce sont ses coefficients diagonaux car elle triangulaire), donc elle est diagonalisable (car c'est une matrice $2\times 2$).
- $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admettent toutes les deux $(X-1)^2$ pour polynôme caractéristique, donc ne sont pas diagonalisables (si elles l'étaient, elles seraient semblables à $I_2$, donc égales à $I_2$).

Ainsi, si on note $A_{dia}$ l'évènement « $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ou (et ici) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ », on a :

$$A_{dia} = \left(A = A_{0,0}\right) \cup \left(A = A_{0,1}\right) = \left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right) \cup \left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right).$$

Comme $Z_2(\Omega) = \{0,1\}$, on a $\left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right) \cup \left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) = \left(Z_1 = 0\right)$ et donc :

$$\boxed{P(A_{dia}) = P\left(Z_1 = 0\right) = 1 - p_1}$$

5) $A_{dia} \cap A_{inv}$ = « $A$ est inversible et diagonalisable » et la seule possibilité est $A_{0,1}$, donc :

$$P\left(A_{dia} \cap A_{inv}\right) = P\left(A = A_{0,1}\right) = P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) = P\left(Z_1 = 0\right) P\left(Z_2 = 1\right) = (1 - p_1) p_2.$$

Alors :

$$P_{A_{dia}}\left(A_{inv}\right) = \frac{P\left(A_{dia} \cap A_{inv}\right)}{P\left(A_{dia}\right)} = \frac{(1 - p_1) p_2}{1 - p_1}.$$

Soit :

$$\boxed{P_{A_{dia}}\left(A_{inv}\right) = p_2}$$

6) On a de même $P_{A_{inv}}\left(A_{dia}\right) = \dfrac{P\left(A_{dia} \cap A_{inv}\right)}{P\left(A_{inv}\right)}$, soit :

$$\boxed{P_{A_{inv}}\left(A_{dia}\right) = \frac{(1 - p_1) p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}$$

7) Rappelons que $Z_i^{\,k} = Z_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$D_n = \det(A^n) = \left(\det A\right)^n = D^n = \left(Z_1 - Z_2 + Z_1 Z_2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(Z_1 - Z_2\right)^k \left(Z_1 Z_2\right)^{n-k}.$$

Pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(Z_1 - Z_2\right)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Z_1^{\,j} \left(-Z_2\right)^{k-j} = (-1)^k Z_2^{\,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} Z_1^{\,j} Z_2^{\,k-j} + Z_1^{\,k} \\
&= (-1)^k Z_2 + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} Z_1 Z_2 + Z_1 = (-1)^k Z_2 + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\right) Z_1 Z_2 + Z_1 \\
&= (-1)^k Z_2 + \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} - (-1)^k - 1\right) Z_1 Z_2 + Z_1 \\
&= (-1)^k Z_2 + \left((1-1)^k - (-1)^k - 1\right) Z_1 Z_2 + Z_1 \\
&= (-1)^k Z_2 - \left(1 + (-1)^k\right) Z_1 Z_2 + Z_1
\end{aligned}$$

Remarquons que la formule $\left(Z_1 - Z_2\right)^k = (-1)^k Z_2 - \left(1 + (-1)^k\right) Z_1 Z_2 + Z_1$ reste vraie pour $k = 1$.

Alors, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$(Z_1 - Z_2)^k Z_1 Z_2 = (-1)^k Z_1 Z_2^{\,2} - \left(1+(-1)^k\right) Z_1^{\,2} Z_2^{\,2} + Z_1^{\,2} Z_2 = (-1)^k Z_1 Z_2 - \left(1+(-1)^k\right) Z_1 Z_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (Z_1 - Z_2)^k (Z_1 Z_2)^{n-k} = Z_1^{\,n} Z_2^{\,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (Z_1 - Z_2)^k Z_1^{\,n-k} Z_2^{\,n-k} + (Z_1 - Z_2)^n$$

$$= Z_1 Z_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (Z_1 - Z_2)^k Z_1 Z_2 + (Z_1 - Z_2)^n = Z_1 Z_2 + (-1)^n Z_2 - \left(1+(-1)^n\right) Z_1 Z_2 + Z_1$$

Soit :

$$D_n = Z_1 + (-1)^n Z_2 + (-1)^{n+1} Z_1 Z_2.$$

Et la formule reste vraie pour $n=1$ ($D_1 = D = Z_1 - Z_2 + Z_1 Z_2 = Z_1 + (-1)^1 Z_2 + (-1)^2 Z_1 Z_2$).

Alors, par linéarité de l'espérance :

$$E(D_n) = E(Z_1) + (-1)^n E(Z_2) + (-1)^{n+1} E(Z_1 Z_2).$$

Soit :

$$\boxed{E(D_n) = p_1 + (-1)^n p_2 + (-1)^{n+1} p_1 p_2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $A(\Omega) = \left\{A_{0,0}, A_{1,0}, A_{0,1}, A_{1,1}\right\}$ et :

- $A_{0,0}^n = 0_2^n = 0_2$, donc $tr(A_{0,0}^n) = 0$ ;
- $A_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A_{0,1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \times & (-1)^n \end{pmatrix}$ d'où $tr(A_{0,0}^n) = 1 + (-1)^n$ ;
- $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A_{1,0}^n = \begin{pmatrix} 1 & \times \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $tr(A_{0,0}^n) = 2$ ;
- $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\chi_{A_{1,1}} = (X-1)^2$, scindé sur $\mathbb{R}$, donc $A_{1,1}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \times \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; alors, $A_{1,1}^n$ est semblable à une matrice de la même forme et $tr(A_{1,1}^n) = 2$.

Finalement, $T_n(\Omega) = \{0, 2\}$ avec :

$$P(T_n = 2) = \begin{cases} P\left(A = A_{0,1}\right) + P\left(A = A_{1,0}\right) + P\left(A = A_{1,1}\right) & \text{quand } n \text{ est pair} \\ P\left(A = A_{1,0}\right) + P\left(A = A_{1,1}\right) & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 0\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 1\right) & \text{quand } n \text{ est pair} \\ P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 0\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 1\right) & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) + P\left(Z_1 = 1\right) & \text{quand } n \text{ est pair} \\ P\left(Z_1 = 1\right) & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Soit :

$$P(T_n=2)=\begin{cases}(1-p_1)p_2+p_1 & \text{quand } n \text{ est pair}\\ p_1 & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Comme $E(T_n)=0\times P(T_n=0)+2\times P(T_n=2)$, on obtient :

$$\boxed{E(T_n)=\begin{cases}2(p_1+p_2-p_1p_2) & \text{quand } n \text{ est pair}\\ 2p_1 & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}}$$

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_{0,0}^n=0_2$ et $A_{0,1}^n, A_{1,0}^n$ et $A_{1,1}^n$ sont inversibles (car $A_{1,0}, A_{0,1}$ et $A_{1,1}$ le sont) donc $rg\,(A_{0,0}^n)=0$ et $rg\,(A_{0,1}^n)=rg\,(A_{1,0}^n)=rg\,(A_{1,1}^n)=2$. Alors :

$$\begin{aligned}E(R_n)&=0\times P(R_n=0)+2\times P(R_n=2)=0\times P(R_n=0)+2\times\big(1-P(R_n=0)\big)\\&=2\big(1-P(A=A_{0,0})\big)=2\big(1-P(Z_1=0,Z_2=0)\big)=2\big(1-(1-p_1)(1-p_2)\big)\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(R_n)=2(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

8) Notons $B_{dia}$ l'évènement : « $B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ » et $(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que l'on peut écrire $B=\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$A$}} & Z_3\\ & & Z_3\\ 0 & 0 & Z_3\end{pmatrix}$.

Soit $\omega\in\Omega$.

Le plan $P=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ est stable par l'endomorphisme $b$ canoniquement associé à $B(\omega)$, et la matrice dans la base $(e_1,e_2)$ de l'endomorphisme induit par $b$ sur $P$ est $A(\omega)$. Alors, si $B(\omega)$ est diagonalisable (i.e. $\omega\in B_{dia}$), $A(\omega)$ l'est aussi (i.e. $\omega\in A_{dia}$), donc :

$$B_{dia}\subset A_{dia}.$$

On a :

$$A_{dia}=\big[A_{dia}\cap(Z_3=0)\big]\cup\big[A_{dia}\cap(Z_3=1)\big].$$

Et l'union est disjointe car $(Z_3=0)$ et $(Z_3=1)$ sont incompatibles.

De plus, d'après la question 4, on a $A_{dia}=(Z_1=0)$, donc $A_{dia}=(Z_1=0,Z_3=0)\cup(Z_1=0,Z_3=1)$ et ainsi :

$$A_{dia}=\{\omega\in\Omega,\ B(\omega)\in\{B_1,B_2,B_3,B_4\}\}$$

avec :

- $B_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3$, qui est diagonalisable (car diagonale !) ;

- $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est diagonalisable car elle est triangulaire inférieure et tous ses coefficients diagonaux (donc ses valeurs propres) sont distincts deux à deux ;
- $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est diagonalisable, car $\dim\ker B_3 = \dim \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2\right) = 2$ et 1 est valeur propre simple, donc $\dim\ker\left(B_3 - I_3\right) = 1$, et ainsi, $\dim\ker B_3 + \dim\ker\left(B_3 - I_3\right) = 3$ ;
- $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas diagonalisable, car on a $\chi_{B_4} = (X-1)\chi_{A_{0,1}} = (X-1)^2(X+1)$ et $rg\left(B_4 - I_3\right) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (deux colonnes proportionnelles et deux colonnes non proportionnelles), donc $\dim\ker\left(B_4 - I_3\right) = 3 - 1 < 2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} B_{dia} &= \left\{\omega \in \Omega,\, B(\omega) \in \left\{B_1, B_2, B_3\right\}\right\} \\ &= \left(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 0\right) \cup \left(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0\right) \cup \left(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1\right) \\ &= \left(Z_1 = 0, Z_3 = 0\right) \cup \left(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1\right) \end{aligned}$$

Et comme l'union est disjointe et les variables $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P\left(B_{dia}\right) &= P\left(Z_1 = 0, Z_3 = 0\right) + P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1\right) \\ &= P\left(Z_1 = 0\right) P\left(Z_3 = 0\right) + P\left(Z_1 = 0\right) P\left(Z_2 = 0\right) P\left(Z_3 = 1\right) \\ &= (1 - p_1)(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2) p_3 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P\left(B_{dia}\right) = (1 - p_1)(1 - p_2 p_3)}$$

9) Comme indiqué, on note $p_{i,j} = P\left(Z_1 = i, Z_2 = j\right)$ pour tous $i, j \in \{0,1\}$.

On a alors :

$$\begin{cases} P\left(Z_1 = 0\right) = P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right) + P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) \\ P\left(Z_1 = 1\right) = P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 0\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 1\right) \\ P\left(Z_2 = 0\right) = P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 0\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 0\right) \\ P\left(Z_2 = 1\right) = P\left(Z_1 = 0, Z_2 = 1\right) + P\left(Z_1 = 1, Z_2 = 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - p_1 = p_{0,0} + p_{0,1} \\ p_1 = p_{1,0} + p_{1,1} \\ 1 - p_2 = p_{0,0} + p_{1,0} \\ p_2 = p_{0,1} + p_{1,1} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} p_{0,0} = 1 - p_1 - p_2 + p_{1,1} \\ p_{1,0} = p_1 - p_{1,1} \\ p_{0,1} = p_2 - p_{1,1} \end{cases}$$

Or, $Z_1$ et $Z_2$ suivent toujours une loi de Bernoulli, donc on a encore $D = Z_1 - Z_2 + Z_1 Z_2$ et :

$$E(D) = E(Z_1) - E(Z_2) + E(Z_1 Z_2) = p_1 - p_2 + E(Z_1 Z_2) .$$

Or, on suppose ici que l'on a encore $E(D) = p_1 - p_2 + p_1 p_2$, donc :

$$E(Z_1 Z_2) = p_1 p_2 .$$

Or, $Z_1 Z_2(\Omega) = \{0,1\}$ avec $P(Z_1 Z_2 = 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = p_{1,1}$ (car si l'une ou l'autre des deux variables vaut 0, le produit aussi). Donc, $Z_1 Z_2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_{1,1}$ et :

$$E(Z_1 Z_2) = p_{1,1} .$$

On a donc $p_{1,1} = p_1 p_2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} p_{0,0} = 1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 = (1-p_1)(1-p_2) \\ p_{1,0} = p_1 - p_1 p_2 = p_1(1-p_2) \\ p_{0,1} = p_2 - p_1 p_2 = (1-p_1) p_2 \\ p_{1,1} = p_1 p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = P(Z_1 = 0) P(Z_2 = 0) \\ P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) = P(Z_1 = 1) P(Z_2 = 0) \\ P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) = P(Z_1 = 0) P(Z_2 = 1) \\ P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(Z_1 = 1) P(Z_2 = 1) \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\boxed{Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont indépendantes.}}$$

10) On a ici $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec pour $i \in \{1,2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_i = n) = (1-p_i)^{n-1} p_i$, avec $Z_1$ et $Z_2$ indépendantes.

On a toujours $D = \det A = Z_1^2 - Z_2^2 + Z_1 Z_2$, donc :

$$\begin{aligned} E(D) &= E(Z_1^2) - E(Z_2^2) + E(Z_1 Z_2) \\ &= \left(E(Z_1^2) - E(Z_1)^2\right) + E(Z_1)^2 - \left(E(Z_2^2) - E(Z_2)^2\right) - E(Z_2)^2 + E(Z_1)E(Z_2) \\ &= V(Z_1) + E(Z_1)^2 - V(Z_2) - E(Z_2)^2 + E(Z_1)E(Z_2) \\ &= \frac{1-p_1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^2} - \frac{1-p_2}{p_2^2} - \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(D) = \frac{2p_2^2 - 2p_1^2 - p_1 p_2^2 + p_1^2 p_2 + p_1 p_2}{p_1^2 p_2^2}}$$

On a toujours $T = tr(A) = 2Z_1$, donc $E(T) = 2E(Z_1)$, soit :

$$\boxed{E(T) = \frac{2}{p_1}}$$

Remarquons que si $a$ et $b$ sont deux entiers naturels non nuls, on a :

$$a^2 - b^2 + ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{5}{4}b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a+b}{b} = \sqrt{5}.$$

Ceci est impossible car $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel, donc $a^2 - b^2 + ab \neq 0$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Ceci veut dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $D(\omega) \neq 0$, donc $A(\omega)$ est inversible, soit $R(\omega) = 2$ et ainsi, R est constante et vaut toujours 2, d'où :

$$\boxed{E(R) = 2}$$

En gardant la notation de la question 3 et avec $D(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a immédiatement :

$$\boxed{P(A_{inv}) = 1}$$

Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned}\chi_{A(\omega)} &= X^2 - 2Z_1(\omega)X + Z_1^2(\omega) - Z_2^2(\omega) + Z_1(\omega)Z_2(\omega) \\ &= \left(X - Z_1(\omega)\right)^2 - Z_2(\omega)\left(Z_2(\omega) - Z_1(\omega)\right)\end{aligned}$$

Trois cas se présentent.

- Si $Z_2(\omega) > Z_1(\omega)$, alors $\chi_{A(\omega)}$ admet deux racines réelles distinctes, donc la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si $Z_2(\omega) < Z_1(\omega)$, alors $\chi_{A(\omega)}$ admet deux racines complexes, non réelles, distinctes, donc la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si $Z_2(\omega) = Z_1(\omega) = a$, alors $A(\omega) = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = aA_{1,1}$ et on a vu dans la question 4 que $A_{1,1}$ n'est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (donc dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non plus). Ainsi, $A(\omega)$ n'est diagonalisable ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Notons $A_{dia}^{\mathbb{C}}$ (*resp.* $A_{dia}^{\mathbb{R}}$) l'évènement : « $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) ».

On a alors :

$$P\left(A_{dia}^{\mathbb{C}}\right) = P\left(Z_2 \neq Z_1\right) \quad \text{et} \quad P\left(A_{dia}^{\mathbb{R}}\right) = P\left(Z_2 < Z_1\right).$$

Calculons ces deux probabilités.

On a :

$$P\left(Z_2 \neq Z_1\right)=1-P\left(Z_2=Z_1\right)=1-\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(Z_1=n, Z_2=n\right)=1-\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(Z_1=n\right) P\left(Z_2=n\right)$$

$$=1-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p_1)^{n-1} p_1 (1-p_2)^{n-1} p_2=1-p_1 p_2 \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1}$$

$$=1-p_1 p_2 \sum_{k=0}^{+\infty}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^k \quad \text{(en posant } k=n-1\text{)}$$

$$=1-p_1 p_2 \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=1-\frac{p_1 p_2}{p_2+p_1-p_1 p_2}=\frac{p_2+p_1-2 p_1 p_2}{p_2+p_1-p_1 p_2}$$

Et :

$$P\left(Z_2<Z_1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(Z_1>n, Z_2=n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(Z_1>n\right) P\left(Z_2=n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p_1)^n(1-p_2)^{n-1} p_2$$

$$=(1-p_1) p_2 \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1}=(1-p_1) p_2 \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{p_2-p_1 p_2}{p_2+p_1-p_1 p_2}$$

Ainsi :

$$\boxed{P\left(A_{dia}^{\mathbb{C}}\right)=\frac{p_2+p_1-2 p_1 p_2}{p_2+p_1-p_1 p_2} \quad \text{et} \quad P\left(A_{dia}^{\mathbb{R}}\right)=\frac{p_2-p_1 p_2}{p_2+p_1-p_1 p_2}}$$