**_Corrigé du DS de n° 5_**

# *Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)*

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $v_n$ sont des fonctions rationnelles définies et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (les dénominateurs ne s'annulent jamais). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}$ converge :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ convergent simplement sur } \mathbb{R}.}$$

(2) On prend un réel $a > 0$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$u_n'(t) = -\frac{2(t+2\pi n)}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2}.$$

Pour tout $t \in [-a,a]$, on a $t + 2\pi n \geq -a + 2\pi n \geq 0$, soit $u_n'(t) \leq 0$, quand $n \geq N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$.

Dans ce cas, la fonction $u_n$ est décroissante sur $[-a,a]$, et comme elle est positive sur $\mathbb{R}$ :

$$\forall\, t \in [-a,a],\ |u_n(t)| = u_n(t) \leq u_n(-a).$$

Ainsi, avec $N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$ :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq N,\ \sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).}$$

(b) On a $u_n(-a) = \frac{1}{1+(-a+2\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ converge, donc $\sum u_n(-a)$ converge et comme $\lim\limits_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$ à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge uniformément sur } [-a,a].}$$

On a pour tout $t \in [-a,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n'(t)| = \frac{2|t+2\pi n|}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2} \leq \frac{2|t+2\pi n|}{(t+2\pi n)^4} = \frac{2}{|t+2\pi n|^3}.$$

Alors, pour tout $t \in [-a, a]$ et tout $n \geq N$ :

$$|u_n'(t)| \leq \frac{2}{(-a+2\pi n)^3}.$$

Comme $\frac{2}{(-a+2\pi n)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ et $\sum \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ converge, la série $\sum \frac{2}{(-a+2\pi n)^3}$ converge et $\sum u_n'$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[-a, a]$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n' \text{ converge uniformément sur } [-a, a].}$$

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n\geq 1} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n$.

(a) On vient de voir que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n$ et $v_n$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ;
- $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ ;
- $\sum u_n'$ et $\sum v_n'$ convergent uniformément sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$.

Ces hypothèses permettent de conclure que les fonctions $U = \sum_{n\geq 1} u_n$ et $V = \sum_{n\geq 1} v_n$ sont de classe $C^1$ sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}$.

Comme $F = u_0 + U + V$ est une somme de fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n$ et $v_n$, ainsi que la fonction $F$, sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(-t) = \frac{1}{1+(-t)^2} = \frac{1}{1+t^2} = u_0(t)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n(-t) = \frac{1}{1+(-t+2\pi n)^2} = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} = v_n(t).$$

On alors $v_n(-t) = u_n(t)$ et :

$$F(-t) = u_0(-t) + \sum_{n\geq 1} u_n(-t) + \sum_{n\geq 1} v_n(-t) = u_0(t) + \sum_{n\geq 1} v_n(t) + \sum_{n\geq 1} u_n(t) = F(t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est paire.}}$$

(c) Comme vu plus haut, les fonctions $u_n$, $v_n$ (pour tout $n\in\mathbb{N}$) et $F$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et :

$$t\in\mathbb{R} \iff t+2\pi\in\mathbb{R}.$$

De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$u_n(t+2\pi)=\frac{1}{1+(t+2\pi+2\pi n)^2}=\frac{1}{1+\left(t+2\pi(n+1)\right)^2}=u_{n+1}(t)$$

Et pour $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$v_n(t+2\pi)=\frac{1}{1+(t+2\pi-2\pi n)^2}=\frac{1}{1+\left(t-2\pi(n-1)\right)^2}=v_{n-1}(t).$$

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}F(t+2\pi)&=\sum_{n\geq 0}u_n(t+2\pi)+\sum_{n\geq 1}v_n(t+2\pi)\\&=\sum_{n\geq 0}u_{n+1}(t)+\sum_{n\geq 1}v_{n-1}(t)\\&=\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 0}v_n(t)\\&=v_0(t)+\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 1}v_n(t)\end{aligned}$$

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u_0(t)=\dfrac{1}{1+t^2}=v_0(t)$, donc $F(t+2\pi)=u_0(t)+\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 1}v_n(t)=F(t)$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

# *Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2020)*

## I Fonction de Lambert

**Q1.** La fonction $f:x\mapsto xe^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions avec, pour tout $x\in\left[-1,+\infty\right[$, $f'(x)=(x+1)e^x$.

La fonction $f'$ est positive sur $\left[-1,+\infty\right[$ et ne s'y annule qu'une fois, donc $f$ est strictement croissante sur cet intervalle. On a de plus $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

Alors, comme la fonction $f$ est continue (car dérivable) sur $\left[-1,+\infty\right[$, le théorème de la bijection continue permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ réalise une bijection de } \left[-1,+\infty\right[ \text{ vers } \left[-\frac{1}{e},+\infty\right[.}$$

**Q2.** La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $[-1,+\infty[$, comme produit de telles fonctions et $f'$ ne s'annule qu'en – 1 sur cet intervalle. Comme $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$, $f'\circ W$ ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{W \text{ est continue sur } \left[-\frac{1}{e},+\infty\right[ \text{ et de classe } C^\infty \text{ sur } \left]-\frac{1}{e},+\infty\right[.}$$

**Q3.** On a $f(0)=0$ et $0\in[-1,+\infty[$, donc :

$$\boxed{W(0)=0}$$

Sur $\left]-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$, $W'=\dfrac{1}{f'\circ W}$, donc $W'(0)=\dfrac{1}{f'\big(W(0)\big)}=\dfrac{1}{f'(0)}$, soit avec $f'(0)=1$ :

$$\boxed{W'(0)=1}$$

**Q4.** Comme $W$ est dérivable en 0, on a $W(x)=W(0)+W'(0)\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, donc :

$$\boxed{W(x)\underset{x\to 0}{\sim} x}$$

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t=\lim\limits_{t\to+\infty} W\big(f(t)\big)=+\infty$. Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, donc avec le changement de variable $x=f(t)$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} W(x)=+\infty.$$

Alors, avec le changement de variable $t=W(x)$, soit, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{W(x)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\big(f(t)\big)}{W\big(f(t)\big)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\big(f(t)\big)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t\,e^t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t+t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}+1\right)=1.$$

Ainsi :

$$\boxed{W(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x}$$

**Q5.** Les fonctions $f$ et $W$ sont dérivables en 0, donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_W$ admettent toutes les deux une tangente au point d'abscisse 0, d'équations respectives $y=W'(0)x+W(0)$ et $y=f'(0)x+f(0)$. Or, on a vu que $f(0)=W(0)=0$ et $f'(0)=W'(0)=1$, donc :

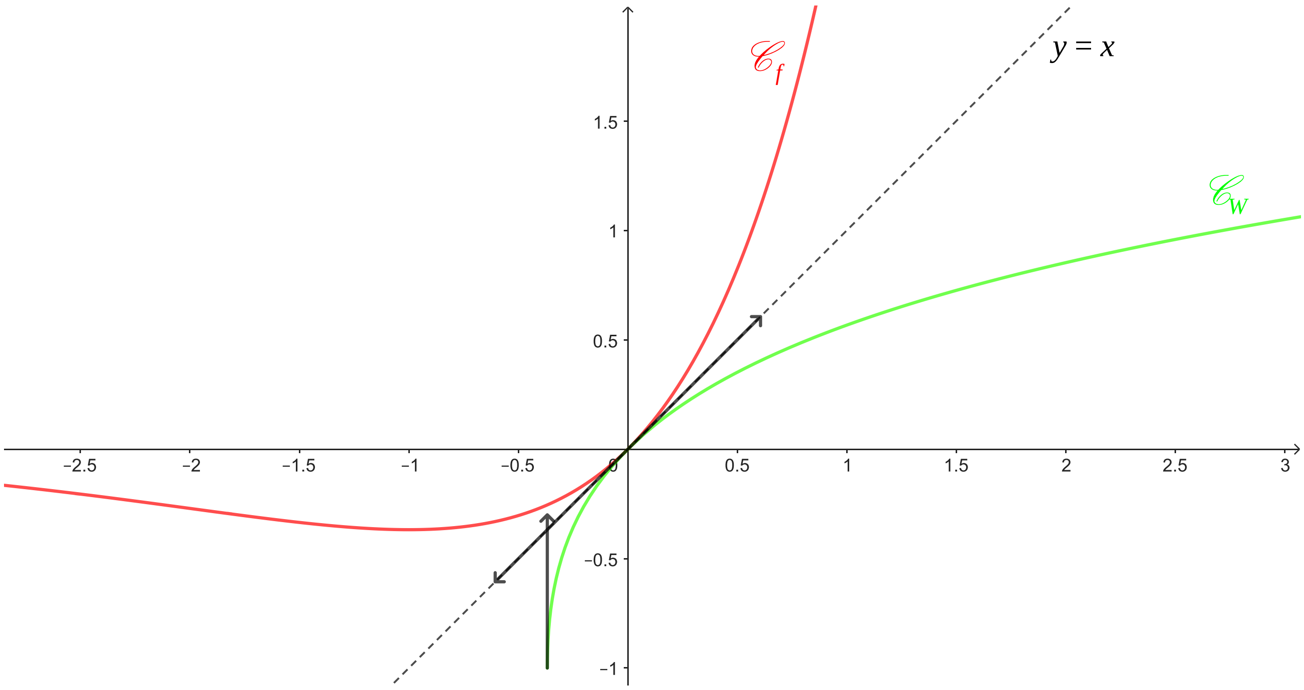
$$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_W \text{ au point d'abscisse 0 est la première bissectrice d'équation } y=x.}$$

La courbe de $\mathscr{C}_W$ est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de la partie de $\mathscr{C}_f$ située dans le demi plan d'inéquation $x \geq -1$.

Comme $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$ et $f'(-1) = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$. Alors, par symétrie :

$$\boxed{\mathscr{C}_W \text{ admet une tangente verticale au point } \left(-\frac{1}{e}, -1\right).}$$

On obtient le graphique :




**Q6.** Pour tout réel $\alpha$, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0,1]$ en tant que produit de telles fonctions. De plus, on a vu dans la question **Q4** que $W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc :

$$x^\alpha W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^{\alpha+1}.$$

Alors, par comparaison à une intégrale de Riemann, $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto x^\alpha W(x) \text{ est intégrable sur } ]0,1] \text{ si et seulement si } \alpha > -2.}$$

**Q7.** Pour tout réel $\alpha$, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et on a vu dans la question **Q4** que $W(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$, donc :

$$x^\alpha W(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^\alpha \ln x.$$

- Si $-1\leq\alpha$, alors $-1\leq\dfrac{\alpha-1}{2}\leq\alpha$, donc $x^{\frac{\alpha-1}{2}}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^{\alpha}\ln x\right)$ et $\int^{+\infty}x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx=\int^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{-\frac{\alpha-1}{2}}}$ diverge (car $-\dfrac{\alpha-1}{2}\leq 1$). Ainsi, $\int^{+\infty}x^{\alpha}\ln x\,dx$, et donc $\int^{+\infty}x^{\alpha}W(x)\,dx$ divergent par comparaison de fonctions positives.
- Si $\alpha<-1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}\ln x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{\alpha+1}{2}}\ln x=0$ par croissances comparées (avec $\dfrac{\alpha+1}{2}<0$). Alors, $x^{\alpha}\ln x\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$ et $\int^{+\infty}x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx=\int^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{-\frac{\alpha-1}{2}}}$ converge (car $-\dfrac{\alpha-1}{2}>1$), et ainsi, $\int^{+\infty}x^{\alpha}\ln x\,dx$, et donc $\int^{+\infty}x^{\alpha}W(x)\,dx$ convergent par comparaison de fonctions positives.

Finalement, $\int^{+\infty}x^{\alpha}W(x)\,dx$ converge si et seulement si $\alpha<-1$ et comme la fonction $x\mapsto x^{\alpha}W(x)$ est positive sur $[1,+\infty[$ :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto x^{\alpha}W(x) \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[ \text{ si et seulement si } \alpha<-1.}$$

**Q8.** On procède comme dans la question **Q1**.

La fonction $f:x\mapsto xe^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f':x\mapsto(x+1)e^{x}$, négative sur $]-\infty,-1]$ et ne s'annulant qu'en – 1. Ainsi, De plus, *f* est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

De plus, *f* est continue sur $]-\infty,-1]$, $\lim\limits_{-\infty}f=0$ et $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$ .

Le théorème de la bijection continue permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ réalise une bijection de } ]-\infty,-1] \text{ vers } \left[-\frac{1}{e},0\right[ .}$$

**Q9.** L'équation (I.1) se récrit : $f(x)=m$.

D'après les questions **Q1** et **Q8**, *f* réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ vers $\left[-\dfrac{1}{e},0\right[$, et de $[-1,+\infty[$ vers $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$, avec, de plus, *f* strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. Ceci implique que :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq-\dfrac{1}{e}$, donc $f(x)=m$ n'admet pas de solution quand $m<-\dfrac{1}{e}$ ;
- $-\dfrac{1}{e}$ est le minimum de *f*, atteint uniquement en – 1, donc $f(x)=-\dfrac{1}{e}$ si et seulement si $x=-1$ ;

- si $m \in \left]-\frac{1}{e},0\right[$, alors $f(x)=m$ admet une solution, $V(m)$, dans $]-\infty,-1[$ et une solution, $W(m)$, dans $]-1,+\infty[$ ;
- si $m \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x)=m$ n'admet pas de solution dans $]-\infty,-1[$ et une solution, $W(m)$, dans $]-1,+\infty[$.

Finalement :

L'équation (I.1) admet :

- 0 solution si $m < -\frac{1}{e}$ ;
- 1 solution, $W(m)$, si $m = -\frac{1}{e}$ ou $m \geq 0$ ;
- 2 solutions, $V(m)$ et $W(m)$, si $-\frac{1}{e} < m < 0$.

**Q10.** L'inéquation (I.2) se récrit : $f(x) \leq m$.

Les variations de $f$ données plus haut et le résultat de la question précédente permettent alors de conclure que :

L'inéquation (I.2) admet pour ensemble solution :

- $\varnothing$ si $m < -\frac{1}{e}$ ;
- $\{-1\}$ si $m = -\frac{1}{e}$ ;
- $[V(m),W(m)]$ si $-\frac{1}{e} < m < 0$ ;
- $]-\infty,W(m)]$ si $m \geq 0$.

**Q11.** Comme $a$ et $b$ sont non nuls, l'équation (I.3) se récrit $-ax\,e^{-ax} = \frac{a}{b}$, soit $f(-ax) = \frac{a}{b}$.

En utilisant la question **Q9** avec $m = \frac{a}{b}$, l'équation (I.3) admet :

- 0 solution si $\frac{a}{b} < -\frac{1}{e}$ ;
- 1 solution $x_1$ telle que $-ax_1 = W\left(\frac{a}{b}\right)$, si $\frac{a}{b} = -\frac{1}{e}$ ou $\frac{a}{b} \geq 0$ ;
- 2 solutions $x_1$ et $x_2$ telle que $-ax_1 = W\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-ax_2 = V\left(\frac{a}{b}\right)$, si $-\frac{1}{e} < \frac{a}{b} < 0$.

Finalement :

> L'équation (I.3) admet :
> - 0 solution si $\frac{a}{b} < -\frac{1}{e}$ ;
> - 1 solution, $-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$, si $\frac{a}{b} = -\frac{1}{e}$ ou $\frac{a}{b} = -\frac{1}{e}$ ;
> - 2 solutions, $-\frac{1}{a}V\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$, si $-\frac{1}{e} < \frac{a}{b} < 0$.

## IV Approximation de $W$

**Q35.** On a $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $t \mapsto x e^{-xe^{-t}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \subset [-1, +\infty[$, $W(x)$ est défini et $f\left(W(x)\right) = W(x) e^{W(x)} = x$, donc $W(x) = x e^{-W(x)}$.

Alors :

$$\phi_x\left(W(x)\right) = x e^{-xe^{-W(x)}} = x e^{-W(x)} = W(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{W(x) \text{ est bien un point fixe de } \phi_x.}$$

**Q36.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $g : t \mapsto -xe^{-t}$ et $h : t \mapsto xe^{t}$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car toutes deux sont proportionnelles à une fonction exponentielle, donc, comme composée de fonctions $C^\infty$ :

$$\boxed{\text{La fonction } \phi_x \text{ est de classe } C^\infty \text{, donc de classe } C^2 \text{, sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_x'(t) = x^2 e^{-t} e^{-xe^{-t}} \geq 0$ et

$$\phi_x'(t) = -x\left(-xe^{-t}\right)e^{-xe^{-t}} = -x f(-xe^{-t}).$$

Or, on a vu que $-\frac{1}{e}$ est le minimum de *f*, donc $f(-xe^{-t}) \geq -\frac{1}{e}$. En multipliant cette inégalité par $-x \leq 0$, on obtient $\phi_x'(t) \leq (-x)\left(-\frac{1}{e}\right)$, soit, avec $\phi_x'(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{0 \leq \phi_x'(t) \leq \frac{x}{e}}$$

**Q37.** Soit $x \in [0, e]$.

On a vu dans la question précédente que $\phi_x$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis en deux réels *a* et *b* quelconques : il existe un réel *c*, compris entre *a* et *b*, tel que $\phi_x(a) - \phi_x(b) = \phi_x'(c)(a-b)$. D'après la question précédente, $|\phi_x'(c)| = \phi_x'(c) \leq \frac{x}{e}$ et donc :

$$|\phi_x(a) - \phi_x(b)| \leq \frac{x}{e}|a-b|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer le résultat ci-dessus à $a = w_n(x)$ et $b = W(x)$, ce qui donne :

$$|\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leq \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|.$$

Or, d'après la question **Q35**, on a $\phi_x(W(x)) = W(x)$, donc avec $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$ :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \leq \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|.$$

Prouvons alors le résultat demandé par récurrence sur *n*.

- Pour $n = 0$, on a $\left(\frac{x}{e}\right)^n = \left(\frac{x}{e}\right)^0 = 1$ et $w_0(x) = 1$, donc :

  $$|w_0(x) - W(x)| = \left(\frac{x}{e}\right)^0 |1 - W(x)|.$$

  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$ (l'inégalité est même une égalité).

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

  Avec le résultat précédent, on a $|w_{n+1}(x) - W(x)| \leq \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|$, donc avec l'hypothèse de récurrence, on obtient :

  $$|w_{n+1}(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)\left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| = \left(\frac{x}{e}\right)^{n+1} |1 - W(x)|.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, e] \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|.}$$

**Q38.** Soit $a \in \left]0, e\right[$. Pour tout $x \in [0, a]$, on a $0 \leq \frac{x}{e} \leq \frac{a}{e}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n |1 - W(x)|.$$

Or, d'après la question **Q2**, la fonction $W$ est continue sur $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc sur $[0,e]$. Il en va alors de même de la fonction $|1-W|$ (valeur absolue d'un d'différence de fonctions continues) et ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, $|1-W|$ admet un maximum $M \geq 0$ sur le segment $[0,e]$.

Alors, pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|w_n(x)-W(x)| \leq M\left(\frac{a}{e}\right)^n.$$

Comme $0 < a < e$, on a $0 < \frac{a}{e} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M\left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$. Par hypothèse de domination, on peut alors conclure que :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } W \text{ sur } [0,a].}$$

**Q39.** Remarquons déjà que $f(1) = 1\times e^1 = e$ et $1 \in [-1,+\infty[$, donc $W(e)=1$ et $W$ est continue en $e$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to e}|1-W(x)| = 0$. Soit alors un réel $\varepsilon > 0$.

Par continuité (à gauche) de $W$ en $e$, il existe $a \in ]0,e[$ tel que pour tout $x \in [a,e]$, $|1-W(x)| \leq \varepsilon$.

Alors, d'après la question **Q37**, pour tout $x \in [a,e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|w_n(x)-W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1-W(x)| \leq |1-W(x)| \leq \varepsilon \quad \textbf{(1)}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|w_n(x)-W(x)| \leq M\left(\frac{a}{e}\right)^n.$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M\left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $M\left(\frac{a}{e}\right)^n \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,a]$ et tout entier $n \geq N$, on a :

$$|w_n(x)-W(x)| \leq M\left(\frac{a}{e}\right)^n \leq \varepsilon \quad \textbf{(2)}$$

Finalement, avec **(1)** et **(2)**, on obtient pour tout $|w_n(x)-W(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0,e]$ et tout $n \geq N$. Ceci prouve que $w_n - W$ est bornée sur $[0,e]$ (on pouvait établir ce résultat avec le théorème des bornes atteintes en ayant prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n$ est continue sur $[0,e]$) avec de plus, pour tout entier $n \geq N$, $\sup\limits_{x\in[0,e]}|w_n(x)-W(x)| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\sup\limits_{x\in[0,e]}|w_n(x)-W(x)| \leq \varepsilon$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } W \text{ sur } [0,e].}$$

# *Exercice 3 (extrait : Centrale 1 - PSI - 2021)*

## II Matrices stochastiques et distributions de probabilité

***II.A –***

Dans tout le problème, pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Q12.** Posons $M = \left(m_{i,j}\right)$ avec $m_{i,j} \geq 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par définition, $M$ est une matrice stochastique si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (car tous ses coefficients sont positifs). Or, $MU = \left( \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \ \ \sum_{j=1}^{n} m_{2,j} \ \ \cdots \ \ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \right)^{\mathsf{T}}$, donc :

$$MU = U \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in \llbracket 1, n \rrbracket,\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{M \text{ est une matrice stochastique si et seulement si } MU = U.}$$

***II.B –***

On note $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, $N = \left(\eta_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = \left(x_1 \ \ x_2 \ \ \cdots \ \ x_n\right)$.

**Q14.** On a $XM = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i m_{i,1} \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i m_{i,2} \ \ \cdots \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i m_{i,n} \right)$.

Comme $M$ est une matrice stochastique et $X$ est une distribution de probabilité, on a $m_{i,j} \geq 0$ et $x_i \geq 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, $\sum_{i=1}^{n} x_i m_{i,j} \geq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left( x_i \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \left(\text{car } M \text{ est stochastique donc } \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!]\right)$$

$$= 1 \qquad (\text{car } X \text{ est une distribution de probabilité})$$

Ainsi, tous les coefficients de $XM$ sont tous positifs et leur somme vaut 1, donc :

$$\boxed{XM \text{ est une distribution de probabilité.}}$$

**Q15.** On a $MN = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\eta_{k,j}\right)_{1\le i,j\le n}$.

Comme $M$ et $N$ sont des matrices stochastiques, on a $m_{i,j} \ge 0$ et $\eta_{i,j} \ge 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$. Alors, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\eta_{k,j} \ge 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$. De plus, d'après la question **Q12**, $MU = NU = U$ et :

$$(MN)U = M(NU) = MU = U\,.$$

Ainsi, à nouveau grâce à la question **Q12**, on peut conclure que :

$$\boxed{MN \text{ est une matrice stochastique.}}$$

**Q16.** On a $\alpha M + (1-\alpha)N = \left(\alpha m_{i,j} + (1-\alpha)\eta_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$.

Comme $M$ et $N$ sont des matrices stochastiques, on a $m_{i,j} \ge 0$ et $\eta_{i,j} \ge 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, et comme $\alpha \in [0,1]$, on a $\alpha \ge 0$ et $1-\alpha \ge 0$, donc $\alpha m_{i,j} + (1-\alpha)\eta_{i,j} \ge 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

De plus, on a toujours $MU = NU = U$ (d'après la question **Q12**) et :

$$\left(\alpha M + (1-\alpha)N\right)U = \alpha MU + (1-\alpha)NU = \alpha U + (1-\alpha)U = U\,.$$

Ainsi, encore grâce à la question **Q12**, on peut conclure que :

$$\boxed{\alpha M + (1-\alpha)N \text{ est une matrice stochastique.}}$$

***II.C –***

**II.C.1)**

**Q17.** Comme $\lambda$ est une valeur propre de $M$ et $X = \left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)$ est un vecteur propre associé, on a $MX = \lambda X$, soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}u_j = \lambda u_i$.

En particulier pour $i = h$ :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{h,j}u_j = \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} m_{h,j}u_j + m_{h,h}u_h = \lambda u_h \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} m_{h,j}u_j = (\lambda - m_{h,h})u_h .$$

Alors :

$$|\lambda - m_{h,h}||u_h| = |(\lambda - m_{h,h})u_h| = \left|\sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} m_{h,j}u_j\right| \leq \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} |m_{h,j}u_j| = \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} |m_{h,j}||u_j| \leq \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} |m_{h,j}||u_h| .$$

Or, $M$ est stochastiques, donc $m_{i,j} \geq 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\sum_{j=1}^{n} m_{h,j} = \sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} m_{h,j} + m_{h,h} = 1$, donc :

$$\sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} |m_{h,j}||u_h| = \left(\sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} |m_{h,j}|\right)|u_h| = \left(\sum_{j=1,\, j\neq h}^{n} m_{h,j}\right)|u_h| = (1 - m_{h,h})|u_h| .$$

Ainsi :

$$|\lambda - m_{h,h}||u_h| \leq (1 - m_{h,h})|u_h| .$$

Or, $|u_h| = \max_{1\leq i\leq n} |u_i|$ et le vecteur propre $X$ n'est pas nul, donc $|u_h| > 0$ et ainsi, on peut diviser l'inégalité ci-dessus par $|u_h|$ sans changer le sens, ce qui donne :

$$\boxed{|\lambda - m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h}}$$

On a alors :

$$|\lambda| = |\lambda - m_{h,h} + m_{h,h}| \leq |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h} + m_{h,h} = 1 .$$

Donc :

$$\boxed{|\lambda| \leq 1}$$

**Q18.** Comme $\delta = \max_{1\leq i\leq n} m_{i,i}$, on a $\delta \leq m_{h,h}$, donc $m_{h,h} - \delta \geq 0$, soit $|m_{h,h} - \delta| = m_{h,h} - \delta$.

Alors, avec $|\lambda - m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h}$, on a :

$$|\lambda - \delta| = |\lambda - m_{h,h} + m_{h,h} - \delta| \leq |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h} - \delta| \leq 1 - m_{h,h} + m_{h,h} - \delta = 1 - \delta .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{|\lambda - \delta| \leq 1 - \delta}$$

Dans le plan complexe, l'inégalité ci-dessus veut dire que :

| |
|---|
| Le point d'affixe $\lambda$ est à l'intérieur du disque fermé de centre le point d'affixe $\delta$ et de rayon $1 - \delta$. |

Si $\lambda$ est une valeur propre de module 1, on a :

$$1=|\lambda|=|\lambda-\delta+\delta|\leq|\lambda-\delta|+|\delta|\leq 1-\delta+\delta=1.$$

Toutes les inégalités ci-dessus sont donc des égalités et ainsi :

$$|\lambda-\delta|=1-\delta.$$

Or, avec $\delta=\overline{\delta}$ et $|\lambda|=1$, on a :

$$\begin{aligned}|\lambda-\delta|^2&=(\lambda-\delta)\left(\overline{\lambda-\delta}\right)=(\lambda-\delta)\left(\overline{\lambda}-\overline{\delta}\right)=\lambda\overline{\lambda}-\delta\overline{\lambda}-\lambda\overline{\delta}+\delta\overline{\delta}\\&=|\lambda|^2-\delta\overline{\lambda}-\lambda\delta+\delta^2=1-(\lambda+\overline{\lambda})\delta+\delta^2=1-2\delta+\delta^2+2\delta-(\lambda+\overline{\lambda})\delta\\&=(1-\delta)^2+2\left(1-\mathrm{Re}(\lambda)\right)\delta\end{aligned}$$

Comme $|\lambda-\delta|^2=(1-\delta)^2$, ceci donne :

$$\left(1-\mathrm{Re}(\lambda)\right)\delta=0.$$

Or, on suppose ici que pour tout $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $m_{i,i}>0$, donc $\delta=\min\limits_{1\leq i\leq n}m_{i,i}>0$. Alors, $\delta\neq 0$ et donc l'égalité ci-dessus donne $\mathrm{Re}(\lambda)=1$. Alors :

$$1=|\lambda|^2=\left(\mathrm{Re}(\lambda)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(\lambda)\right)^2=1+\left(\mathrm{Im}(\lambda)\right)^2.$$

Ceci donne $\mathrm{Im}(\lambda)=0$ et donc $\lambda=\mathrm{Re}(\lambda)=1$.

Ceci prouve que si tous les coefficients diagonaux de $M$ sont strictement positifs, alors :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } M \text{ de module 1 est 1.}}$$

**Q19.** Soit $X=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre 1.

On a $MX=X$, soit, pour tout $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\sum\limits_{j=1}^{n}m_{i,j}u_j=u_i$.

En posant $u_\alpha=\min\limits_{1\leq i\leq n}u_i$, on a, avec $\sum\limits_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}=1$ :

$$\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}u_j=u_\alpha=\left(\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}\right)u_\alpha=\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}u_\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}u_j-\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}u_\alpha=\sum_{j=1}^{n}m_{\alpha,j}\left(u_j-u_\alpha\right)=0.$$

Or, pour tout $j\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $m_{\alpha,j}>0$ et $u_j\geq u_\alpha$, donc $m_{\alpha,j}\left(u_j-u_\alpha\right)\geq 0$. Ceci permet de conclure que pour tout $j\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $m_{\alpha,j}\left(u_j-u_\alpha\right)=0$ et comme $m_{\alpha,j}=0$, on a $u_j=u_\alpha$.

Ainsi, avec $U=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, on obtient :

$$X=\begin{pmatrix}u_\alpha & u_\alpha & \cdots & u_\alpha\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=u_\alpha U\in\mathrm{Vect}(U).$$

Ceci prouve que $\underline{\ker\left(M-I_n\right)\subset\mathrm{Vect}\left(U\right)}$ (où $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$).

Or, on a vu dans la question **Q12** que $MU = U$, donc $U \in \ker\left(M - I_n\right)$ et $\underline{\mathrm{Vect}\left(U\right) \subset \ker\left(M - I_n\right)}$.

Finalement, on a :

$$\boxed{\ker\left(M - I_n\right) = \mathrm{Vect}\left(U\right) \text{ est de dimension 1.}}$$

**Q20.** Supposons qu'il existe une distribution de probabilité $X$ invariante par $M$, donc telle que $XM = X$. On a alors $(XM)^\top = M^\top X^\top = X^\top$, donc $X^\top \in \ker\left(M^\top - I_n\right)$.

Or, deux matrices transposées l'une de l'autre ont le même rang donc, avec le théorème du rang et la question précédente, on a :

$$\dim\ker\left(M^\top - I_n\right) = n - rg\left(M^\top - I_n\right) = n - rg\left((M - I_n)^\top\right) = n - rg\left(M - I_n\right) = \dim\ker\left(M - I_n\right) = 1.$$

Ainsi, il existe $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\ker\left(M^\top - I_n\right) = \mathrm{Vect}\left(V\right)$. Alors :

$$X^\top = \gamma\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^\top \quad \Leftrightarrow \quad X = \gamma\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

Et comme $X$ est une distribution de probabilité, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Deux cas se présentent alors :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0$, et $\gamma = \dfrac{1}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}$, donc $X = \dfrac{1}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ existe et est unique ;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$, et $X$ n'existe pas.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe au plus une distribution de probabilité } X \text{ invariante par } M.}$$

**Q21.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ :

$$m_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{n} m_{i,p} m_{p,j}^{(k)}.$$

Or, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_j^{(k)} \leq m_{p,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)}$ et $m_{i,p} > 0$, donc $m_{i,p}\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,p} m_{p,j}^{(k)} \leq m_{i,p}\beta_j^{(k)}$ et :

$$\sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,j}^{(k+1)} \leq \sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\beta_j^{(k)}.$$

Et, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\alpha_j^{(k)} = \left(\sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\right)\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\beta_j^{(k)} = \left(\sum_{p=1}^{n} m_{i,p}\right)\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)}$, donc :

$$\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,j}^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}.$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, on obtient :

$$\alpha_j^{(k)} \leq \min_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k+1)} \leq \max_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}.$$

Soit, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$ :

$$\boxed{\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}}$$

**Q22.** Comme $\alpha_j^{(k+1)} = \min_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k+1)}$ et $\beta_j^{(k)} = \max_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k)}$, il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ tel que :

$$\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0,j}^{(k+1)} \quad \text{et} \quad \beta_j^{(k)} = m_{j_0,j}^{(k)}.$$

Alors, avec $\sum_{p=1}^{n} m_{i_0,p} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} = m_{i_0,j}^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} &= \sum_{p=1}^{n} m_{i_0,p} m_{p,j}^{(k)} - \sum_{p=1}^{n} m_{i_0,p} \alpha_j^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} m_{i_0,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) \\
&= m_{i_0,j_0} \left(m_{j_0,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) + \sum_{p=1,\, p \neq j_0}^{n} m_{i_0,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) \\
&= m_{i_0,j_0} \left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) + \sum_{p=1,\, p \neq j_0}^{n} m_{i_0,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right)
\end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in \llbracket 1,n \rrbracket$, on a $m_{i_0,p}\left(m_{p,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) \geq 0$, donc $\sum_{p=1,\, p \neq j_0}^{n} m_{i_0,p}\left(m_{p,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) \geq 0$, d'où :

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0,j_0}\left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } (i_0, j_0) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \text{ tel que } \alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0,j_0}\left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right).}$$

**Q23.** Comme $\alpha_j^{(k)} = \min_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k)}$ et $\beta_j^{(k+1)} = \max_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} m_{i,j}^{(k+1)}$, il existe $(i_1, j_1) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ tel que :

$$\alpha_j^{(k)} = m_{j_1,j}^{(k)} \quad \text{et} \quad \beta_j^{(k+1)} = m_{i_1,j}^{(k+1)}.$$

Alors, avec $\sum_{p=1}^{n} m_{i_1,p} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\beta_j^{(k+1)} - \beta_j^{(k)} = m_{i_1,j}^{(k+1)} - \beta_j^{(k)} &= \sum_{p=1}^{n} m_{i_1,p} m_{p,j}^{(k)} - \sum_{p=1}^{n} m_{i_1,p} \beta_j^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} m_{i_1,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \beta_j^{(k)}\right) \\
&= m_{i_1,j_1} \left(m_{j_1,j}^{(k)} - \beta_j^{(k)}\right) + \sum_{p=1,\, p \neq j_1}^{n} m_{i_1,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \beta_j^{(k)}\right) \\
&= m_{i_1,j_1} \left(\alpha_j^{(k)} - \beta_j^{(k)}\right) + \sum_{p=1,\, p \neq j_1}^{n} m_{i_1,p} \left(m_{p,j}^{(k)} - \beta_j^{(k)}\right)
\end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on a $m_{i_1,p}\left(m_{p,j}^{(k)}-\beta_j^{(k)}\right)\leq 0$, donc $\displaystyle\sum_{p=1,\,p\neq j_1}^{n} m_{i_1,p}\left(m_{p,j}^{(k)}-\beta_j^{(k)}\right)\leq 0$, d'où :

$$\beta_j^{(k+1)}-\beta_j^{(k)}\leq m_{i_1,j_1}\left(\alpha_j^{(k)}-\beta_j^{(k)}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \beta_j^{(k)}-\beta_j^{(k+1)}\geq m_{i_1,j_1}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } (i_1,j_1)\in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } \beta_j^{(k)}-\beta_j^{(k+1)}\geq m_{i_1,j_1}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).}$$

**Q24.** En additionnant membre à membre les inégalités établies dans les deux questions précédentes, on obtient :

$$\alpha_j^{(k+1)}-\alpha_j^{(k)}+\beta_j^{(k)}-\beta_j^{(k+1)}\geq m_{i_0,j_0}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right)+m_{i_1,j_1}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Soit :

$$\alpha_j^{(k+1)}-\beta_j^{(k+1)}\geq\left(m_{i_0,j_0}+m_{i_1,j_1}-1\right)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Or, $\varepsilon=\min\limits_{i,j\in[\![1,n]\!]} m_{i,j}$, donc $m_{i_0,j_0}+m_{i_1,j_1}-1\geq 2\varepsilon-1$, d'où, avec $\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\geq 0$ :

$$\left(m_{i_0,j_0}+m_{i_1,j_1}-1\right)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right)\geq(2\varepsilon-1)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Ainsi :

$$\alpha_j^{(k+1)}-\beta_j^{(k+1)}\geq(2\varepsilon-1)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Et donc :

$$\boxed{\beta_j^{(k+1)}-\alpha_j^{(k+1)}\leq(1-2\varepsilon)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right)}$$

**Q25.** Tous les coefficients de *M* sont strictement positifs et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=1$.

Pour $i\in[\![1,n]\!]$ donné, s'il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,k}\geq 1$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n} m_{i,j}+m_{i,k}>0+1=1$, ce qui est absurde. Ainsi, $0<m_{i,j}<1$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

Comme $\varepsilon=\min\limits_{i,j\in[\![1,n]\!]} m_{i,j}$, ε est l'un des coefficients de *M*, donc $0<\varepsilon<1$ et :

$$-1<1-2\varepsilon<1.$$

Soit $j\in[\![1,n]\!]$ fixé.

Prouvons par récurrence sur *k* que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\leq(1-2\varepsilon)^k\left(\beta_j^{(0)}-\alpha_j^{(0)}\right)$.

- Pour $k=0$, on a $\beta_j^{(0)}-\alpha_j^{(0)}=(1-2\varepsilon)^0\left(\beta_j^{(0)}-\alpha_j^{(0)}\right)$, donc la relation est vraie au rang $k=0$.

- Supposons la relation vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$.

  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \geq 0$, donc l'égalité trouvée dans la question **Q24** impose $1-2\varepsilon \geq 0$.

  Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$(1-2\varepsilon)\left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) \leq (1-2\varepsilon)(1-2\varepsilon)^k \left(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)}\right) = (1-2\varepsilon)^{k+1}\left(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)}\right).$$

  Et avec $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1-2\varepsilon)\left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right)$, on obtient :

$$\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1-2\varepsilon)^{k+1}\left(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)}\right).$$

  La relation est donc vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, et ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \leq (1-2\varepsilon)^k \left(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)}\right).$$

On a vu que $0 \leq 1-2\varepsilon < 1$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} (1-2\varepsilon)^k \left(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)}\right) = 0$, et avec le théorème des gendarmes, on peut conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

De plus, d'après la question **Q21**, on a $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$, donc :

La suite $\left(\alpha_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $\left(\beta_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante **(2)**

Les résultats **(1)** et **(2)** permettent de conclure que les suites $\left(\alpha_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\beta_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent toutes les deux vers la même limite que nous noterons $b_j$.

Or, pour tout $i \in \; 1,n \;$, $\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)}$, donc le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} m_{i,j}^{(k)} = b_j.$$

Ainsi, pour tous $i, j \in \; 1,n \;$, la suite $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $b_j$, ce qui permet de conclure que la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$.

De plus, $M^1 = M$ est stochastique et si $M^k$ l'est alors $M^{k+1} = M^k M$ l'est aussi d'après la question **Q15**. Ceci prouve par récurrence que $M^k$ est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors :

- pour tous $i, j \in \; 1,n \;$, $m_{i,j}^{(k)} \geq 0$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} m_{i,j}^{(k)} = b_j \geq 0$ ;
- pour tout $i \in \; 1,n \;$, $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^{(k)} = 1$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^{(k)} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 1$.

Ceci prouve que $B$ est stochastique et finalement :

$$\boxed{\text{La suite } \left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une matrice stochastique } B \text{ dont toutes les lignes sont égales.}}$$

**Q26.** On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = B$, donc :

$$\lim_{k\to+\infty} M^{k+1} = B.$$

Or, l'application $X \mapsto XM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue (car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie), donc :

$$\lim_{k\to+\infty} M^{k+1} = \lim_{k\to+\infty}(M^k M) = (\lim_{k\to+\infty} M^k)M = BM.$$

Ainsi, on a :

$$\underline{BM = B}.$$

Avec $P_\infty = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, la première ligne de cette égalité donne $P_\infty M = P_\infty$, soit $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i m_{i,j} = b_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Supposons qu'il existe $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel que $b_\ell = 0$. Alors, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i m_{i,\ell} = 0$. Mais, pour tous, $i \in [\![1,n]\!]$, on a $b_i m_{i,\ell} \geq 0$. Or, si une somme de nombres positifs est nulle, alors tous les termes sont nuls, donc $b_i m_{i,\ell} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et comme $m_{i,\ell} > 0$, ceci donne $b_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Ce résultat est absurde car $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 1$, donc il n'existe pas d'entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel que $b_\ell = 0$ et comme $b_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a bien :

$$\boxed{b_i > 0 \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!].}$$

**Q27.** Soit $P^{(0)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ une distribution de probabilité.

L'application $X \mapsto P^{(0)}X$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et à images dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, est continue (car elle est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie), donc :

$$\lim_{k\to+\infty}(P^{(0)}M^k) = P^{(0)}(\lim_{k\to+\infty} M^k) = P^{(0)}B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_i = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right) b_i = 1 \times b_i = b_i$. Ainsi, $P^{(0)}B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = P_\infty$, donc :

$$\boxed{\text{Quelle que soit la distribution de probabilité } P^{(0)}\text{, la suite } \left(P^{(0)}M^k\right)_{k\notin\mathbb{N}} \text{ converge vers } P_\infty.}$$

**Q28.** D'après la question **Q25**, $P_\infty$ est une distribution de probabilité.

On a vu dans la question **Q26**, que $P_\infty M = P_\infty$, donc $P_\infty$ est une distribution de probabilité invariante par *M*. Or, d'après la question **Q20**, il en existe au plus une, donc :

$$\boxed{P_\infty \text{ est l'unique distribution de probabilité invariante par } M.}$$