DM de Mathématiques n° 6

Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires sur un univers Ω.

Sauf dans la dernière question, on suppose que Z_1 et Z_2 suivent toutes deux une loi de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, tous deux dans $]0,1[$ (on a donc pour $i \in \{1,2\}$, $Z_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z_i = 1) = p_i$)

Sauf dans l'avant-dernière question, on suppose de plus que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_1 \\ Z_2 & Z_1 - Z_2 \end{pmatrix},\ D = \det A\ ,\ T = tr\,(A) \text{ et } R = rg\,(A).$$

On a admet que *A*, *D*, *T* et *R* sont des variables aléatoires sur Ω.

1) Calculer les espérances de *D*, *T* et *R*.
2) Calculer les variances de *D*, *T* et *R*.
3) Calculer la probabilité que *A* soit inversible.
4) Calculer la probabilité que *A* soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puis dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5) Calculer la probabilité que *A* soit inversible, sachant qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6) Calculer la probabilité que *A* soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sachant qu'elle est inversible.
7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \det(A^n)$, $T_n = tr\,(A^n)$ et $R_n = rg\,(A^n)$. Calculer les espérances de D_n, T_n et R_n.
8) Soit Z_3 une troisième variable aléatoire sur Ω suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_3 et telle que Z_1, Z_2 et Z_3 soient mutuellement indépendantes.

   Déterminer la probabilité que $B = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_1 & Z_3 \\ Z_2 & Z_1 - Z_2 & Z_3 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9) Dans cette question seulement, on ne suppose plus a priori que Z_1 et Z_2 sont indépendantes, mais on suppose que $E(D)$, l'espérance de *D*, a la valeur trouvée dans la question 2 (en fonction de p_1 et p_2). Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

   On introduira $p_{i,j} = P(Z_1 = i, Z_2 = j)$ pour tous $i, j \in \{0,1\}$.
10) Reprendre les questions 1, 3 et 4 en supposant maintenant que Z_1 et Z_2 suivent toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, tous deux dans $]0,1[$.