DS de Mathématiques n° 5

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A

(1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$

(b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u_n' convergent uniformément sur $[-a,a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v_n'.

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.

(b) Démontrer que F est paire.

(c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2020)

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x e^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -e^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscise $-e^{-1}$.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x e^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x e^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

IV Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.
Pour tout réel positif x, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x \exp(-x \exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|.$$

Q 38. Pour tout réel $a \in]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, \mathrm{e}]$?

Exercice 3 (extrait : Centrale 1 - PSI - 2021)

II Matrices stochastiques et distributions de probabilité

Définitions

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. On dit que X est une distribution de probabilité si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geq 0$ et $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice stochastique si chaque ligne de M est une distribution de probabilité.

II.A –

Q 12. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que M est une matrice stochastique si et seulement si

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.B –

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques, $X \in \mathbb{R}^n$ une distribution de probabilité et $\alpha \in [0, 1]$.

Q 14. Montrer que XM est une distribution de probabilité.

Q 15. Montrer que MN est une matrice stochastique.

Q 16. Montrer que $\alpha M + (1 - \alpha)N$ est une matrice stochastique.

II.C –

Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre (réelle ou complexe) de M. On note $(u_1, ..., u_n)$ les composantes (réelles ou complexes), dans la base canonique, d'un vecteur propre u associé à λ.

II.C.1)

Q 17. Soit $h \in \{1, ..., n\}$ tel que $|u_h| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i|$. Montrer que $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$. En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q 18. Soit $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,i}$. Montrer que $|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat et montrer que, si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

II.C.2)

On suppose désormais que tous les coefficients $m_{i,j} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de la matrice stochastique M sont strictement positifs.

Q 19. Démontrer que $\dim(\ker(M - I_n)) = 1$.

Si $(u_1, ..., u_n)$ désigne les composantes (réelles) dans la base canonique d'un vecteur de $\ker(M - I_n)$, on pourra utiliser $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} u_i$.

Q 20. En déduire qu'il existe au plus une distribution de probabilité X invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $XM = X$.

On pose $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}$.

On s'intéresse à la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de M. On note $m_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la matrice M^k situé à la ligne i et la colonne j.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,j}^{(k)}, \\ \beta_j^{(k)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,j}^{(k)}. \end{cases}$$

Dans les quatre questions suivantes, j est un entier fixé dans $[\![1, n]\!]$ et k est fixé dans $\mathbb{N}$.

Q 21. Démontrer les inégalités $\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}$.

Q 22. Démontrer qu'il existe un couple $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geqslant m_{i_0,j_0}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 23. Démontrer qu'il existe un couple $(i_1, j_1) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geqslant m_{i_1,j_1}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 24. En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leqslant (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.

Q 25. Démontrer que la suite (M^k) converge vers une matrice stochastique $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales.

On note P^∞ la ligne $(b_1, ..., b_n)$.

Q 26. Démontrer que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i > 0$.

Q 27. Démontrer que la suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (P^{(0)}M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers P^∞, quelle que soit la distribution de probabilité initiale $P^{(0)}$.

Q 28. Démontrer que P^∞ est l'unique distribution de probabilité P invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $PM = P$.

Fin de l'énoncé