# Corrigé du DM n° 7

## Partie I - Convergence d'une suite

**Q1.** Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue sur $[0,1]$, donc $I_m$ est bien définie.

De plus :

$$I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} dt - \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = \int_0^1 \left[ (1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} - (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \right] dt$$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{1-t^2} - 1 \right) dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}+1} dt = -\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}+1} dt$$

Comme la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}+1}$ est positive sur $[0,1]$, on a $I_{m+1} - I_m \leq 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bien décroissante.}}$$

**Q2.** Soit $m \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on obtient :

$$I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+2}{2}} dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt$$

$$= \left[ (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} t \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{m}{2} + 1 \right) (-2t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} t \, dt$$

$$= (m+2) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = (m+2) \int_0^1 (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$= (m+2) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt - (m+2) \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$= (m+2) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt - (m+2) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt$$

Donc, $I_{m+2} = (m+2) I_m - (m+2) I_{m+2}$, ce qui donne pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m}$$

**Q3.** Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $I_m \geq 0$ et si on avait $I_m = 0$, alors la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$ serait nulle sur $[0,1]$, ce qui n'est pas.

Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$I_m > 0.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_{2n}\neq 0$ et $I_{2n-1}\neq 0$, et on peut écrire :

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2n+2}{2n+3}\quad\text{et}\quad\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}=\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Donc, par télescopage pour $n\geq 2$ :

$$\frac{I_{2n}}{I_2}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+3}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\big(2(k+1)\big)}{\prod_{k=1}^{n-1}\big(2k+3\big)}=\frac{2^{n-1}n!}{5\times 7\times\ldots\times(2n+1)}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{3}{2(2n+1)}2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{3}{2(2n+1)}\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}=\frac{3}{2(2n+1)}\frac{\sqrt{2n}}{2a_{n,n}}$$

Et :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_1}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\big(2k+1\big)}{2^{n-1}n!}=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}=4\frac{a_{n,n}}{\sqrt{2n}}.$$

Donc :

$$I_{2n}=\frac{3}{2(2n+1)}\frac{\sqrt{2n}}{2a_{n,n}}I_2\quad\text{et}\quad I_{2n-1}=4\frac{a_{n,n}}{\sqrt{2n}}I_1.$$

Comme $a_{1,1}=\frac{\sqrt{2}}{2^3}\binom{2}{1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, on a $\frac{3}{2(2+1)}\frac{\sqrt{2}}{2a_{1,1}}=4\frac{a_{1,1}}{\sqrt{2}}=1$ et les relations ci-dessus restent vraie pour $n=1$.

De plus , avec le changement de variable $t=\sin u$ dans la première intégrale, on a :

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du=\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big(1+\cos 2u\big)du=\frac{\pi}{4}$$

$$I_2=\int_0^1(1-t^2)dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{I_{2n}=\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}\quad\text{et}\quad I_{2n-1}=\frac{\pi}{\sqrt{2n}}a_{n,n}}$$

**Q4.** Comme la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_{2n}\leq I_{2n-1}\leq I_{2n-2}$ et comme $I_{2n}>0$, on peut écrire :

$$\boxed{1\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}\leq\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}}$$

On a $\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}=\frac{2n+1}{2n}$ d'après la question **Q2**, et d'après la question précédente :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}=\pi\frac{2n+1}{n}a_{n,n}^2.$$

Alors :

$$1 \le \pi \frac{2n+1}{n} a_{n,n}^2 \le \frac{2n+1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n}{2n+1} \le 2\pi a_{n,n}^2 \le 1 .$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \le 2\pi a_{n,n}^2 \le 1}$$

**Q5.** Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} > 0$, l'encadrement ci-dessus se récrit :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \le a_{n,n} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

D'après la question **Q2** et ce qui précède :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2(2n)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} .$$

Soit :

$$\boxed{I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

## Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

**Q6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ est continue sur $\left[0, \sqrt{n}\right]$, donc $J_n$ est bien définie et avec le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$, on a :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (1-u^2)^n \sqrt{n}\, du = \sqrt{n} \int_0^1 (1-u^2)^n du = \sqrt{n}\, I_{2n} .$$

Or, d'après la question **Q5**, $I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit :

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge avec } \lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .}$$

**Q7.** Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n > t^2$, on a $0 \le \dfrac{t^2}{n} < 1$ (et $1 - \dfrac{t^2}{n} > 0$) et $0 \le t < \sqrt{n}$, donc :

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{t^2}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t^2 + \underset{n \to +\infty}{o}(1)}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(t) = e^{-t^2}$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+ \text{ vers la fonction } t \mapsto e^{-t^2}.}$$

**Q8.** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe représentative est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0, qui admet pour équation $y = x + 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{1 + x \le e^x}$$

En appliquant le résultat à $x = -\dfrac{t^2}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, on obtient $0 \le 1 - \dfrac{t^2}{n} \le e^{-\frac{t^2}{n}}$ et en élevant à la puissance $n$ (tout est positif) :

$$0 \le \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2}.$$

Ceci donne $0 \le u_n(t) \le e^{-t^2}$ pour tout $t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, et cet encadrement reste vrai quand $t > \sqrt{n}$ car alors $u_n(t) = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\boxed{0 \le u_n(t) \le e^{-t^2}}$$

**Q9.** La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $e^{-\frac{t^2}{2}} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $e^{-\frac{t^2}{2}} = \underset{t \to -\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, car par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-\frac{X}{2}} = 0$.

Comme $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergent, alors :

$$\boxed{K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ converge.}}$$

Pour les mêmes raisons, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et converge et comme $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on a, avec le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ :

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

D'autre part, d'après les deux questions précédentes, on a :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t\mapsto e^{-t^2}$, qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ ;
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a $|u_n(t)|\le e^{-t^2}$ et $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée, $u_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt.$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^{+\infty}u_n(t)\,dt=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt=J_n.$$

Et d'après la question **Q6**, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc :

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Avec $K=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$, on obtient finalement :

$$\boxed{K=1}$$

## Partie III - Calcul d'une majoration

**Q10.** Pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $\dfrac{1-x}{1+x}>0$, donc $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est défini et si on pose $g(x)=2x+\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, on a $\dfrac{1-x}{1+x}=e^{-2x+g(x)}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien une fonction } g:x\mapsto 2x+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\text{ définie sur }\left[0,\frac{1}{2}\right]\text{ et telle que pour tout }x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ \frac{1-x}{1+x}=e^{-2x+g(x)}.}$$

La fonction $g$ est de classe $C^1$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a :

$$g'(x)=2-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=2-\frac{2}{1-x^2}=\frac{2x^2}{x^2-1}.$$

Alors, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\frac{g'(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2 - 1}$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$ est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (et vaut $-2$ en 0 et $-\frac{8}{3}$ en $\frac{1}{2}$), on obtient, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ :

$$-\frac{8}{3} \leq \frac{g'(x)}{x^2} \leq -2.$$

Alors, $-\frac{8}{3}x^2 \leq g'(x) \leq -2x^2$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et comme $g'(0) = 0$, l'encadrement reste vrai en 0.

Comme $g$ est de classe $C^1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = g(x)$ et par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ :

$$-\frac{8}{3}\int_0^x t^2 dt \leq \int_0^x g'(t)dt \leq -2\int_0^x t^2 dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{8}{9}x^3 \leq g(x) \leq -\frac{2}{3}x^3.$$

Ceci permet de conclure que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ :

$$\boxed{|g(x)| \leq \frac{8}{9}x^3}$$

**Q11.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![ n+1, 2n ]\!]$, on a d'une part :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}}{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{n!n!}{k!(2n-k)!}.$$

Et d'autre part :

$$\frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}(n-i)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}(n+i)} \times \frac{n}{k}$$

Et en posant $j = n - i$ au numérateur et $j = n + i$ au dénominateur, on obtient :

$$\frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k} = \frac{\prod_{j=2n-k+1}^{n-1} j}{\prod_{j=n+1}^{k-1} j} \times \frac{n}{k} = \frac{\prod_{j=2n-k+1}^{n} j}{\prod_{j=n+1}^{k} j} = \frac{\frac{n!}{(2n-k)!}}{\frac{k!}{n!}} = \frac{n!n!}{k!(2n-k)!}.$$

Et ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![ n+1, 2n ]\!]$ :

$$\boxed{\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}}$$

*Remarquons que l'expression de droite n'est pas bien définie pour* $k = n+1$ *…*

**Q12.** Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $n+1\leq k\leq \frac{3n}{2}+1$.

Si $n\geq 2$, on a alors $\frac{3n}{2}+1\leq 2n$, donc $k\in[\![n+1,2n]\!]$ et d'après la question précédente :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}}=\frac{n}{k}\times\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(\frac{1-\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}}\right).$$

Or, $k-n-1\leq\frac{3n}{2}+1-n-1=\frac{n}{2}$, donc pour tout $i\in[\![1,k-n-1]\!]$, on a $\frac{1}{n}\leq\frac{i}{n}\leq\frac{k-n-1}{n}\leq\frac{1}{2}$ et on peut utiliser la question **Q10** :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}}=\frac{n}{k}\times\prod_{i=1}^{k-n-1}e^{-2\frac{i}{n}+g\left(\frac{i}{n}\right)}=\frac{n}{k}\times\prod_{i=1}^{k-n-1}e^{g\left(\frac{i}{n}\right)}\times\prod_{i=1}^{k-n-1}e^{-2\frac{i}{n}}=\frac{n}{k}\times e^{\sum_{i=1}^{k-n-1}g\left(\frac{i}{n}\right)}\times e^{-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k-n-1}i}.$$

Comme $-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k-n-1}i=-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)$, on obtient en posant $b_{k,n}=\sum_{i=1}^{k-n-1}g\left(\frac{i}{n}\right)$ :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}}=\frac{n}{k}\times e^{b_{k,n}}\times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

De plus, pour tout $i\in[\![1,k-n-1]\!]$, $\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq\frac{8}{9}\left(\frac{i}{n}\right)^3\leq\frac{8}{9}\left(\frac{k-n-1}{n}\right)^3$, donc :

$$\left|b_{k,n}\right|=\left|\sum_{i=1}^{k-n-1}g\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq\sum_{i=1}^{k-n-1}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq\sum_{i=1}^{k-n-1}\frac{8}{9}\left(\frac{k-n-1}{n}\right)^3=\frac{8}{9}\left(\frac{k-n-1}{n}\right)^3=\frac{8}{9}\frac{(k-n-1)^4}{n^3}.$$

Pour $n=1$, si $2\leq k\leq\frac{3}{2}+1$, on a $k=2$, donc $\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}}=\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}=\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{k}\times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}=\frac{1}{2}$, donc en posant $b_{2,1}=0$, on a $\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}=\frac{1}{2}\times e^{b_{2,1}}\times e^{0}$ avec $\left|b_{2,1}\right|=0=\frac{8}{9}\frac{(2-2-1)^4}{1^3}$, donc le résultat reste valable.

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $n+1\leq k\leq\frac{3n}{2}+1$ :

$$\boxed{\text{Il existe bien } b_{k,n}\in\mathbb{R} \text{ tel que } \left|b_{k,n}\right|\leq\frac{8}{9}\frac{(k-n-1)^4}{n^3} \text{ et } \frac{a_{k,n}}{a_{n,n}}=\frac{n}{k}\times e^{b_{k,n}}\times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.}$$

## Partie IV - Vers le théorème de Moivre-Laplace

**Q13.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

La variable $X_n$ suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$, donc $X_n(\Omega)=[\![0,2n]\!]$, et pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$, $P\left(X_n=k\right)=\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}$.

Avec $Z_n = \dfrac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}$, on a :

$$Z_n(\Omega) = \left\{ \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}},\ k \in [\![0, 2n]\!] \right\} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{2n}}\, j,\ j \in [\![-n, n]\!] \right\}.$$

De plus, pour tout $j \in [\![-n, n]\!]$, $\left( Z_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n}}\, j \right) = \left( X_n = j+n \right)$, donc :

$$\boxed{Z_n(\Omega) = \left\{ \frac{2}{\sqrt{2n}}\, j,\ j \in [\![-n, n]\!] \right\} \text{ avec pour tout } j \in [\![-n, n]\!],\ P\left( Z_n = \frac{2}{\sqrt{2n}}\, j \right) = \binom{2n}{j+n} \frac{1}{2^{2n}}.}$$

On a $E(X_n) = 2n\dfrac{1}{2} = n$ et $V(X_n) = 2n\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$, donc :

$$E(Z_n) = E\left( \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2n}}\left( E(X_n) - n \right)$$

$$V(Z_n) = E\left( \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}} \right) = \left( \frac{2}{\sqrt{2n}} \right)^2 V(X_n)$$

Soit :

$$\boxed{E(Z_n) = 0 \quad \text{et} \quad V(Z_n) = 1.}$$

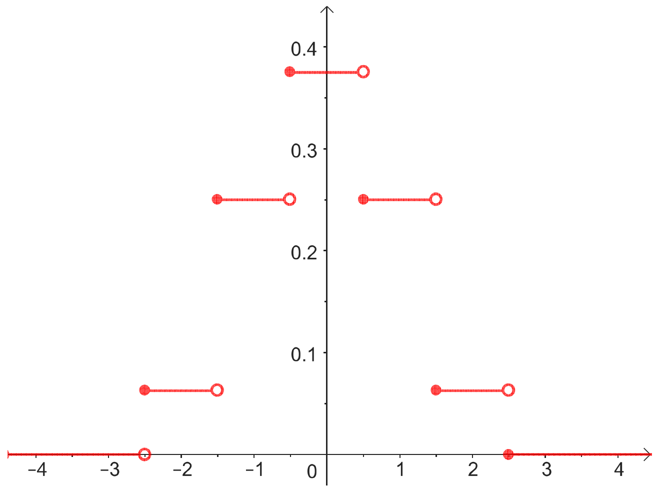
**Q14.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $J_n = \bigcup\limits_{k=0}^{2n} J_{k,n}$ avec pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $t_{k,n} = \dfrac{2(k-n)}{\sqrt{2n}}$ et :

$$J_{k,n} = \left[ t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right[ = \left[ \frac{2k-1-2n}{\sqrt{2n}}, \frac{2k+1-2n}{\sqrt{2n}} \right[.$$

On considère ici $n = 2$, donc $J_2 = \bigcup\limits_{k=0}^{4} J_{k,2} = \bigcup\limits_{k=0}^{4} \left[ k - \dfrac{5}{2}, k - \dfrac{3}{2} \right[$ et pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$ et tout $t \in J_{k,2}$, on a $h_2(t) = P\left( X_2 = k \right) = \dbinom{4}{k} \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}\dbinom{4}{k}$, soit pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{quand } t < -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{16} \quad \text{quand } t \in \left[ -\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{2} \right[ \\ \dfrac{4}{16} \quad \text{quand } t \in \left[ -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2} \right[ \\ \dfrac{6}{16} \quad \text{quand } t \in \left[ -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right[ \\ \dfrac{4}{16} \quad \text{quand } t \in \left[ \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} \right[ \\ \dfrac{1}{16} \quad \text{quand } t \in \left[ \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2} \right[ \\ 0 \quad \text{quand } t \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

On obtient la courbe :




**Q15.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$ et tout $t \in J_{k,n}$, on a $h_n(t) = \frac{\sqrt{2n}}{2} P(X_n = k) = \frac{\sqrt{2n}}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} \geq 0$ et $h_n(t) = 0$ quand $t \notin J_n = \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}$, donc $h_n(t)$ est maximal quand $\binom{2n}{k}$ l'est.

Or, pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, on a :

$$\binom{2n}{k+1} - \binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} - \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \frac{(2n)!(2n-k)}{(k+1)!(2n-k)!} - \frac{(2n)!(k+1)}{(k+1)!(2n-k)!}$$
$$= \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k)!}(2n-1-2k)$$

Donc :

- $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{k+1}$ quand $k \leq n - \frac{1}{2}$, soit $k \leq n-1$ ;
- $\binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{k+1}$ quand $k \geq n - \frac{1}{2}$, soit $k \geq n$.

Ceci implique que la suite $\left(\binom{2n}{k}\right)_{k \in [\![0,2n]\!]}$ est croissante jusqu'au rang $n$, puis décroissante ensuite, donc que $\binom{2n}{k}$ est maximal quand $k = n$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h_n(t) \leq \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$ avec $h_n(t) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$ quand $t \in J_{n,n}$ et donc :

$$\boxed{h_n \text{ possède un maximum sur } \mathbb{R}\text{, qui vaut } \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\text{, atteint en tout point de } J_{n,n}.}$$

**Q16.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n} = \left[ -\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right[$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left( \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $\sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} > x$. Comme $x > 0$ (et $-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), ceci veut dire que pour tout entier $n \geq n_0$, $x \in J_n$ et donc qu'il existe $k_n \in [\![0, 2n]\!]$, $x \in J_{k_n,n}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout entier } n \geq n_0, \text{ Il existe } k_n \in [\![0, 2n]\!],\ x \in J_{k_n,n}.}$$

On a alors pour tout entier $n \geq n_0$, $x \in J_{k_n,n}$ soit :

$$t_{k_n,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq x < t_{k_n,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{\sqrt{2n}} < t_{k_n,n} \leq x + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left( x - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left( x + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = x$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \to +\infty} t_{k_n,n} = x$ et comme $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\boxed{t_{k_n,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} x}$$

On a $t_{k_n,n} = \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}}$, donc $k_n - n = \frac{t_{k_n,n}\sqrt{2n}}{2}$ et ainsi :

$$\boxed{k_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2}}$$

Enfin, $\frac{k_n}{n} - 1 = \frac{k_n - n}{n} = \frac{t_{k_n,n}\sqrt{2n}}{2n} = \frac{t_{k_n,n}}{\sqrt{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2n}}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{k_n}{n} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{2n}} = 0$, soit $\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et ainsi :

$$\boxed{k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$$

**Q17.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $t_{k,n} \in J_{k,n}$ donc :

$$h_n(t_{k,n}) = \frac{\sqrt{2n}}{2} P\left(X_n = k\right) = \frac{\sqrt{2n}}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Soit :

$$\boxed{h_n(t_{k,n}) = a_{k,n}}$$

Prenons dans un premier temps $x \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question **Q16**, pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, Il existe $k_n \in [\![0,2n]\!]$, $x \in J_{k_n,n}$, donc :

$$h_n(x) = h_n(t_{k_n,n}) = a_{k_n,n}.$$

On a aussi $k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\sqrt{2n}}{2}$, donc à partir d'un certain rang :

$$\frac{x\sqrt{2n}}{2}\frac{1}{2} \leq k_n - n \leq \frac{x\sqrt{2n}}{2}\frac{3}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{2n}}{2}\dfrac{1}{2} = +\infty$ et $\dfrac{x\sqrt{2n}}{2}\dfrac{1}{2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$, on a $1 \leq k_n - n \leq \dfrac{n}{2}+1$ pour $n$ assez grand, soit $n+1 \leq k_n \leq \dfrac{3n}{2}+1$. On peut donc utiliser le résultat de la question **Q5**, autrement dit, il existe $b_{k_n,n} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k_n} \times e^{b_{k_n,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)} \quad \text{et} \quad \left|b_{k_n,n}\right| \leq \frac{8}{9}\frac{(k_n-n-1)^4}{n^3}.$$

Toujours avec $(k_n-n-1)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{x\sqrt{2n}}{2}\right)^4 = \dfrac{x^4n^2}{4}$, on a :

$$\frac{8}{9}\frac{(k_n-n-1)^4}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{9}\frac{1}{n^3}\frac{x^4n^2}{4} = \frac{2}{9}\frac{x^4}{n}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{9}\dfrac{(k_n-n-1)^4}{n^3} = 0$ et par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} b_{k_n,n} = 0.$$

De plus, avec une fois de plus $k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\sqrt{2n}}{2}$, on a :

$$-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\left(\frac{x\sqrt{2n}}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

Enfin, avec $k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 1.$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = 1 \times e^0 \times e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

D'après la question **Q12**, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,n} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n,n} = \lim_{n\to+\infty} a_{n,n}\frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi, avec $h_n(x) = a_{k_n,n}$, on obtient :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_-$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} < x$, et comme dans la question **Q16**, il existe $k_n \in [\![0, 2n]\!]$, $x \in J_{k_n,n}$.

Toujours comme plus haut, on a alors pour tout entier $n \geq n_0$, $x - \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} \leq x + \frac{1}{\sqrt{2n}}$

et donc, $k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 1$. On montre alors comme pour $x > 0$, que :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Enfin, pour $x = 0$, on a $x \in J_{n,n} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n(x) = a_{n,n}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim_{n\to+\infty} a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0^2}{2}}.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, et donc :

| |
|---|
| La suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. |