Corrigé du DS n° 4

Exercice n° 1

Q1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$ et $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_n\neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\dfrac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\dfrac{n^{n-1}}{n!}}=\frac{(n+1)^n n!}{n^{n-1}(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n}{n+1}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{n}{n+1} .$$

Or, $\dfrac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=n\left[\dfrac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]=1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, donc :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}e .$$

Alors, d'après la règle de d'Alembert appliquée aux séries entières :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de de la série entière } \sum a_nx^n \text{ est } R=\frac{1}{e}.}$$

Q2. La fonction S est la somme d'une série entière réelle. Or, la somme d'une série entière réelle est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \left]-R;R\right[=\left]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right[.}$$

De plus, pour tout $x\in\left]-R;R\right[$, $S(x)$ est égal à son développement en série de Taylor en 0, soit :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Par unicité du développement en série entière, on a $S(0)=0$ et $\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}=a_n=\dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{S(0)=0 \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ S^{(n)}(0)=(-n)^{n-1}.}$$

Q3. Avec la formule de Stirling, on a :

$$|a_n|R^n = \frac{n^{n-1}}{n!}\frac{1}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^n}.$$

Soit $|a_n|R^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1,5}}$. Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ converge (car $1,5>1$), donc $\sum |a_n|R^n$ converge.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[-R;R]}|a_n x^n| = |a_n|R^n$ donc, si on note $f_n : x\mapsto a_n x^n$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-R;R]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues (car polynomiales) sur $[-R;R]$, la somme $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-R;R]$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie et continue sur } [-R;R].}$$

Q4. La fonction S est dérivable sur $]-R;R[$ (d'après la question **Q2**) et pour tout $x\in\,]-R;R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}.$$

Si on pose $a_0=1$, on a alors pour tout $x\in\,]-R;R[$:

$$1+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \quad\text{et}\quad xS'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^n.$$

En effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries entières de même rayon de convergence R, on obtient pour tout $x\in\,]-R;R[$, $xS'(x)\big(1+S(x)\big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b_n=\sum_{k=0}^{n} k\,a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\,a_{n-k}a_k.$$

Soit $b_0=0$, $b_1=a_1=1$ et pour tout $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^{n}(n-k)\,a_{n-k}a_k = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{\big(-(n-k)\big)^{n-k-1}}{(n-k)!}\frac{(-k)^{k-1}}{k!} + n\,a_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n (n-k)^{n-k}k^{k-1}}{k!(n-k)!} + n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} + n\frac{(-n)^{n-1}}{n!}
\end{aligned}$$

Or, en prenant $y=n$ et $a=-1$ dans la formule admise dans l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned}
n\,n^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} \quad &\Leftrightarrow\quad n^n = n^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} \\
&\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} = n^n - n^{n-1} = (n-1)n^{n-1}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n!}(n-1)n^{n-1} + n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left[-(n-1)+n\right] = \frac{(-n)^{n-1}}{n!} = a_n .$$

Ainsi, obtient pour tout $x \in \left]-R;R\right[$, $xS'(x)\left(1+S(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ soit :

$$\boxed{xS'(x)\left(1+S(x)\right) = S(x)}$$

Q5. Soit $x \in \left]0;\frac{1}{e}\right]$.

La série $\sum a_n x^n$, soit $\sum (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}x^n$ et alternée. Comme elle converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{n}{n+1}$, donc, avec $a_n x^n \neq 0$, on a :

$$\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| x = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{n}{n+1}x .$$

Or, par concavité de la fonction ln, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, donc

$$\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} \leq e^{n\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}x \leq ex \leq 1 .$$

Ainsi, la suite $\left(\left|a_n x^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme elle est de limite nulle, la série $\sum a_n x^n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc sa somme est du signe de son premier terme, donc de *x*.

Ainsi, pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{e}\right]$, on a $S(x) \geq 0$.

D'après la question **Q2**, *S* est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e};0\right]$, avec de plus, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e};0\right]$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}(-x)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}|x|^{n-1} > 0 .$$

La fonction *S* est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{e};0\right]$, donc $S(x) < S(0) = 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e};0\right[$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e};0\right[$, $xS'(x) < 0$ et $S(x) < 0$, et avec la question précédente, on obtient :

$$1 + S(x) = \frac{S(x)}{xS'(x)} > 0 .$$

Ceci donne $S(x) > -1$, pour $x \in \left]-\frac{1}{e};0\right[$ et comme, d'après **Q3**, S est continue en $-\frac{1}{e}$, on a $S(x) \geq -1$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e};0\right[$.

Finalement, $S(x) \geq -1$ pour $x \in \left[-\frac{1}{e};0\right[$, $S(0)=0$ et $S(x) \geq 0$ pour $x \in \left]0;\frac{1}{e}\right]$, donc on a bien :

$$\boxed{S(x) \in [-1,+\infty[\text{ pour tout } x \in [-R,R].}$$

Q6. La fonction $f : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est dérivable sur $]-R;R[$ comme produit de telles fonctions et, avec la question **Q4**, on a pour tout $x \in]-R;R[$:

$$x f'(x) = x\left(S'(x)e^{S(x)} + S(x)\left[S'(x)e^{S(x)}\right]\right) = xS'(x)\left(1+S(x)\right)e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = f(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien solution de } xy' - y = 0 \text{ sur }]-R;R[.}$$

Q7. Soit $I =]-R;0[$ ou $]0;R[$ et h une éventuelle solution de $xy' - y = 0$ sur I.

Comme I ne contient pas 0, on peut écrire en posant $g(x) = \frac{h(x)}{x}$ pour tout $x \in I$:

$$xh'(x) - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2} = g'(x) = 0.$$

Donc, g est constante, autrement dit, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) = \frac{h(x)}{x} = K$. La fonction h est alors linéaire sur I et, réciproquement, toute fonction linéaire ($x \mapsto Kx$) est solution de $xy' - y = 0$ sur I. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions de } xy' - y = 0 \text{ sur } I =]-R;0[\text{ ou }]0;R[\text{ sont les fonctions linéaires sur } I.}$$

Remarquons que, de même, toute fonction linéaire est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$.

Soit maintenant une solution h de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$.

- h est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;0[$, donc il existe une constante $K_1 \in \mathbb{R}$ telle que $h(x) = K_1 x$ pour tout $x \in]-R;0[$.
- h est solution de $xy' - y = 0$ sur $]0;R[$, donc il existe une constante $K_2 \in \mathbb{R}$ telle que $h(x) = K_2 x$ pour tout $x \in]0;R[$.

De plus, h est dérivable sur $]-R;R[$, et en particulier en 0. Alors :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)}{x}=K_1=\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)}{x}=K_2=h'(0).$$

Ainsi, en posant $K=K_1=K_2$, on a $h:x\mapsto Kx$ et h est linéaire sur $]-R;R[$. Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } xy'-y=0 \text{ sur }]-R;R[\text{ sont les fonctions linéaires sur cet intervalle.}}$$

Q8. La fonction $V:x\mapsto xe^x$ est définie et dérivable sur $[-1,+\infty[$ comme produit de telles fonctions et pour tout $x\in[-1,+\infty[$, $V'(x)=(x+1)e^x\geq 0$. De plus, V' ne s'annule qu'une fois sur $[-1,+\infty[$, donc V est strictement croissante sur cet intervalle.

Comme la fonction V est continue (car dérivable) sur $[-1,+\infty[$, le théorème de la bijection continue permet d'affirmer que V réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ dans $\left[V(-1),\lim_{+\infty}V\right[=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$ et que sa réciproque est continue sur $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}V \text{ réalise une bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } \left[-\frac{1}{e},+\infty\right[\\ \text{et sa réciproque } W \text{ est continue sur } \left[-\frac{1}{e},+\infty\right[.\end{array}}$$

Q9. D'après **Q6**, la fonction $f:x\mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution de $xy'-y=0$ sur $]-R;R[$ donc, d'après **Q7**, f est linéaire sur cet intervalle. Autrement dit, il existe une constante $K\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in]-R;R[$, $f(x)=Kx$.

Alors, $K=f'(0)=S'(0)\left(1+S(0)\right)e^{S(0)}$ et, comme $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$, on a $S(0)=0$ et $S'(0)=a_1=1$, donc $K=1$. Ainsi, pour tout $x\in]-R;R[$:

$$f(x)=S(x)e^{S(x)}=x.$$

Avec la fonction V de la question précédente, on obtient pour tout $x\in\left]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right[$:

$$V\left(S(x)\right)=x.$$

Or, d'après la question **Q5**, on a, pour tout $x\in\left]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right[\subset\left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right]$, $S(x)\in[-1,+\infty[$ et pour tout $y\in[-1,+\infty[$, $W\circ V(y)=W\left(V(y)\right)=y$ donc, pour tout $x\in\left]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right[$:

$$W(x)=W\left(V\left(S(x)\right)\right)=S(x).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{W(x) = S(x) \text{ pour tout } x \in \left]-R, R\right[.}$$

On a vu que la fonction S est définie et continue sur $[-R;R] = \left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right]$. Or, d'après la question **Q8**, la fonction W est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{e};+\infty\right[$, donc sur $\left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right]$.

Alors, comme S et W coïncident sur $\left]-R;R\right[$ et sont toutes deux continues en $-R$ et R :

$$\boxed{S(x) = W(x) \text{ pour tout } x \in [-R;R].}$$

Exercice n° 2

Q10. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f_n(x) > 0$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ est proportionnelle à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, elle converge et par comparaison de séries positives, la série $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^*.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |f_n(x)| = 1$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \le 1 = f_n(0)$) et la série $\sum 1$ diverge grossièrement, donc :

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^*.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ et la série $\sum 1$ diverge grossièrement. Or, si la convergence de $\sum f_n$ était uniforme sur $\mathbb{R}^*$, le théorème d'interversion des limites permettrait de conclure que la série $\sum \lim_{x\to 0} f_n(x)$ converge, ce qui est faux. Ainsi :

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^*.}$$

Q11. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(-nx)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2} = f(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, note $f_n : x\mapsto \dfrac{1}{1+(nx)^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car elle est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on peut écrire $f_n(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{inx+1}-\dfrac{1}{inx-1}\right)$ et :

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(x) &= \frac{(in)^k(-1)^k k!}{2}\left(\frac{1}{(inx+1)^{k+1}}-\frac{1}{(inx-1)^{k+1}}\right)\\
&= \frac{(-in)^k k!}{2}\frac{(inx-1)^{k+1}-(inx+1)^{k+1}}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}}\\
&= \frac{(-in)^k k!}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}}\left(\sum_{\ell=0}^{k+1}\binom{k+1}{\ell}\frac{(-1)^\ell-1}{2}(inx)^{k+1-\ell}\right)\\
&= -\frac{(-in)^k k!}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}}\left(\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell \text{ impair}}}^{k+1}\binom{k+1}{\ell}(inx)^{k+1-\ell}\right)\\
&= -\frac{(-in)^k k!}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}}\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}(inx)^{k-2p}\right)\\
&= (-1)^{k+1}k!\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{(in)^{2k}x^k}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}(inx)^{2p}}\right)
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in[a,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f_n^{(k)}(x)\right| &\le k!\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{n^{2k}x^k}{\left(1+(nx)^2\right)^{k+1}(nx)^{2p}}\right)\le k!\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{n^{2k}x^k}{\left((nx)^2\right)^{k+1}(nx)^{2p}}\right)\\
&\le k!\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{1}{n^2x^{k+2+2p}n^{2p}}\right)\le\frac{k!}{n^2}\left(\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{1}{a^{k+2+2p}}\right)=\frac{K}{n^2}
\end{aligned}$$

avec $K=k!\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k+1}{2p+1}\frac{1}{a^{k+2+2p}}$.

Ainsi, pour tous $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in[a,+\infty[$, on a $\left|f_n^{(k)}(x)\right|\le\dfrac{K}{n^2}$.

Comme la série $\sum\dfrac{K}{n^2}$ converge, la série $\sum f_n^{(k)}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a,+\infty[$, donc converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Finalement, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, f_n est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, donc $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$.

Alors, comme $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*} [a,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme elle est paire, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

Q12. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$.

La fonction rationnelle g est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [n-1,n],\ \dfrac{1}{1+n^2x^2} \le \dfrac{1}{1+t^2x^2} \\ \forall\, t \in [n,n+1],\ \dfrac{1}{1+t^2x^2} \le \dfrac{1}{1+n^2x^2} \end{cases}$$

Et, par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \le \frac{1}{1+n^2x^2} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{1+t^2x^2}.$$

En sommant de $n=1$ à $n=N \in \mathbb{N}^*$ et en ajoutant 1, et avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2x^2} \le \int_0^1 dt = 1$, on obtient :

$$\int_0^{N+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \le 1 + \int_1^{N+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \le \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2} \le 1 + \int_0^N \frac{dt}{1+t^2x^2} \qquad \textbf{(*)}$$

On a :

$$\int_0^N \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x}\int_0^N \frac{x\,dt}{1+(xt)^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan(xt)\right]_0^N = \frac{\arctan(xN)}{x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{2x}.$$

De même, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{\pi}{2x}$, et avec $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2} = f(x)$, on obtient en passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans **(*)**, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\pi}{2x} \le f(x) \le 1 + \frac{\pi}{2x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2x} = +\infty$, on a $1 + \dfrac{\pi}{2x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$, et le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents donne :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

Q14. On a vu que *f* est de classe C^∞, donc dérivable, sur $\mathbb{R}_+^*$ et, de surcroît, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\,'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2x}{\left(1+(nx)^2\right)^2}\right)<0.$$

Ainsi, *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente que $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{\pi}{2x}$, donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

De plus, on a vu dans la question **Q12** que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

Or, $f_0 : x\mapsto 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+(nx)^2}=0$. Le théorème d'interversion des limites permet alors de conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

On peut alors construire le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}^*$ (complété par parité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Q14. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)-1=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+(nx)^2}$.

En remarquant que $\dfrac{1}{1+(nx)^2}\underset{x\to}{\sim}\dfrac{1}{n^2x^2}$, on conjecture $f(x)-1\underset{x\to}{\sim}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2x^2}=\dfrac{\pi^2}{6x^2}$.

Pour cela, considérons $g_n : x\mapsto \dfrac{x^2}{1+(nx)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0<g_n(x)\le\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum g_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}_+^*$, donc converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=\dfrac{1}{n^2}$, on peut utiliser le théorème d'interversion des limites pour conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+(nx)^2}=x^2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=x^2\left(f(x)-1\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(f(x)-1\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et ainsi, on a bien :

$$\boxed{f(x)-1\underset{x\to}{\sim}\frac{\pi^2}{6x^2}}$$

Exercice n° 3

Question préliminaire

Q15. Soient A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$ et :

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det\left(XI_n - B\right) = \det\left(XI_n - P^{-1}AP\right)\\ &= \det\left(P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(XI_n - A)P\right) = \det\left(XI_n - A\right) = \chi_A\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Deux matrices semblables (dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\text{) ont le même polynôme caractéristique.}}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique, si A et B sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique, et donc :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ ont le même spectre.}}$$

Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La relation de similitude matricielle étant transitive, la matrice B est aussi semblable à D, donc elle est aussi diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Soit } A \text{ et } B \text{ sont toutes deux diagonalisables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ soit aucune des deux ne l'est.}}$$

Partie I – Étude de quelques exemples

Q16. Comme A et B sont triangulaires supérieures avec les mêmes coefficients diagonaux, tous non nuls, on a :

$$\begin{aligned}&tr\,(A) = tr\,(B) = 5\\ &\det A = \det B = 4\\ &rg\,(A) = rg\,(B) = 3\\ &\chi_A = \chi_B = \left(X-1\right)\left(X-2\right)^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.}}$$

Comme 1 est valeur propre simple de A et B, on a $\dim\ker\left(A - 2I_3\right) = \dim\ker\left(B - 2I_3\right) = 1$.

- $rg\left(A - 2I_3\right) = rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1$, donc, d'après le théorème du rang, $\dim\ker\left(A - 2I_3\right) = 3 - 1 = 2$ et ainsi, $\dim\ker\left(A - I_3\right) + \dim\ker\left(A - 2I_3\right) = 3 = \dim\mathbb{R}^3$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $rg\left(B-2I_3\right)=rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$, donc $\dim\ker\left(B-2I_3\right)=3-2=1$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres de B n'est pas égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni même dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B ne l'est pas, donc d'après la question **Q15** :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables.}}$$

Q17. *Première méthode* :

Posons $\mathcal{B}=(e'_1,e'_2,e_3)$ avec $e'_1=e_2$ et $e'_2=e_1$.

La famille $\mathcal{B}$ est encore une base (changer des vecteurs d'une famille n'altère ni le caractère générateur, ni la liberté) et :

$$\begin{cases}u(e'_1)=u(e_2)=e_1+e_3=e'_2+e_3\\u(e'_2)=u(e_1)=e_2+2e_3=e'_1+2e_3\\u(e_3)=e_1=e'_2\end{cases}$$

On a alors $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}=B$. Ainsi, A et B représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

Deuxième méthode :

On a, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&-1&-1\\-1&X&0\\-2&-1&X\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&X\\-2&-1\end{vmatrix}+X\begin{vmatrix}X&-1\\-1&X\end{vmatrix}=X^3-3X-1$$

$$\chi_B=\begin{vmatrix}X&-1&0\\-1&X&-1\\-1&-2&X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X&-1\\-1&-2\end{vmatrix}+X\begin{vmatrix}X&-1\\-1&X\end{vmatrix}=X^3-3X-1$$

Donc, A et B ont le même polynôme caractéristique.

La fonction polynômiale $f:x\mapsto x^3-3x-1$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$f':x\mapsto 3(x-1)(x+1).$$

Sur $\left]-\infty,-1\right]$, $f'(x)\geq 0$ et ne s'annule qu'en – 1, donc f est strictement croissante de $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ à $f(-1)=1>0$. Comme f est continue sur $\left]-\infty,-1\right]$, elle s'y annule exactement une fois d'après le théorème de la bijection continue.

Avec $f'(x)<0$ sur $]-1,1[$, $f'(x)>0$ sur $]1,+\infty[$, $f(1)=-3<0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, on montre de la même façon, avec le théorème de la bijection continue, que *f* s'annule exactement une fois sur $]-1,1[$ et exactement une fois sur $]1,+\infty[$.

Ainsi, *f* s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$, et donc $\chi_A=\chi_B$ est scindé à racines simples, donc *A* et *B* sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et comme elles ont même spectre (car même polynôme caractéristique), elles sont toutes deux semblables à une même matrice réelle diagonale.
Alors, par transitivité de la relation de similitude matricielle :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

Q18. Soit *u*, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice *A*.

On a $rg\,(u)=1$, donc par le théorème du rang, $\dim(\ker u)=n-1$. Soit alors $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de $\ker u$ que l'on complète en une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

On a $u(e_k)=0$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, et si on pose $u(e_n)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, on obtient :

$$M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}=U\,.$$

Ainsi, *A* et *U* représentent le même endomorphisme *u* dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } U \text{ sont semblables.}}$$

Q19. D'après ce qui précède, il existe une base $\mathcal{B}$ de l'espace *E* dans laquelle la matrice de *u* est de la forme $U=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Or, on a $U^2=a_nU$. Ainsi, le polynôme $X^2-a_nX=X(X-a_n)$ est annulateur de la matrice *U*, donc de l'endomorphisme *u*.

De plus, $u^2\neq 0$, donc $U^2=a_nU\neq 0_n$. Ceci entraine que $a_n\neq 0$ et donc que $X(X-a_n)$ est scindé à racines simples.
Ainsi, *u* admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

Q20. Posons $A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. On a $\chi_A=(X-i)(X+i)-1=X^2$. Donc, $Sp(A)=\{0\}$.

Si A était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice nulle, donc serait nulle. Ce n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable. Or, A est une matrice symétrique à coefficients complexes.

On peut généraliser en dimension $n\geq 3$, en posant $A=\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right)$ (on a alors $\chi_A=X^n$).

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.}}$$

Q21. Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. On a $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}\left(C_1, C_2, C_3, C_4\right)$ (où $\mathbb{C}^4$ est identifié à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$).

Or, $C_1=C_3\neq 0$ et $C_2=C_4\neq 0$ (car α et β sont non nuls). Donc, $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}\left(C_1, C_2\right)$.

Si C_1 et C_2 sont colinéaires, il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $C_2=\lambda C_1$ (car $C_1\neq 0$).

Ceci donne $\begin{cases} \beta=\lambda\alpha \\ \alpha=\lambda\beta \end{cases}$. Ceci donne $\alpha=\lambda^2\alpha$, donc $\lambda^2=1$, soit $\lambda=\pm 1$. On a alors $\beta=\pm\alpha$, ce qui contredit l'hypothèse (α et β sont différents et non opposés). Ainsi, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, et ainsi, la famille $\left(C_1, C_2\right)$ est libre et génératrice de $\operatorname{Im} A$, donc c'est une base de $\operatorname{Im} A$ et :

$$\boxed{rg(A)=2}$$

Comme $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et $rg(A)<4$, A n'est pas inversible, donc $\ker A\neq\{0\}$ et ainsi :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$$

On peut remarquer que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta \\ 2\beta+2\alpha \\ 2\alpha+2\beta \\ 2\beta+2\alpha \end{pmatrix}=2(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha-2\beta \\ 2\beta-2\alpha \\ 2\alpha-2\beta \\ 2\beta-2\alpha \end{pmatrix}=2(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{2(\alpha+\beta) \text{ et } 2(\alpha-\beta) \text{ sont aussi valeurs propres de } A.}$$

Comme $\beta\neq\pm\alpha$, on a $2(\alpha+\beta)\neq 0$ et $2(\alpha-\beta)\neq 0$, et comme $\beta\neq 0$, on a $2(\alpha+\beta)\neq 2(\alpha-\beta)$.

Alors, A possède au moins trois valeurs propres distinctes : 0, $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$, et on a :

$$\dim\ker A+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\leq 4.$$

Or, $\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\geq 1$, $\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\geq 1$ et, d'après le théorème dur rang, $\dim\ker A = 4-rg\,(A)=2$, donc :

$$\dim\ker A+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\geq 4\,.$$

Finalement, $\dim\ker A+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)+\dim\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)=4=\dim\mathbb{C}^4$ et on a :

$$\ker A\oplus\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\oplus\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)=\mathbb{C}^4\,.$$

Alors, $\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)$ et $\ker\left(A-2(\alpha-\beta)I_4\right)$ sont des droites, dirigées respectivement par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. De plus, $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\ker A$, qui est un plan.

Comme $\ker A\oplus\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)\oplus\ker\left(A-2(\alpha+\beta)I_4\right)=\mathbb{C}^4$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base } \mathbb{C}^4 \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$$

Partie II – Deux résultats

Q22. On a $B=P^{-1}AP$, donc $PB=AP$, soit :

$$(R+iS)B=A(R+iS)\quad\Leftrightarrow\quad RB+iSB=AR+iAS\,.$$

Or, les matrices A, B, R et S sont réelles, donc RB, SB, AR, AS le sont aussi et la relation ci-dessus donne en égalant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\boxed{RB=AR \text{ et } SB=AS\,.}$$

Q23. Notons $\varphi : x\mapsto\det\left(R+xS\right)$. Les coefficients de $R+xS$ sont affines en x. Or le déterminant d'une matrice est polynomial en les coefficients de la matrice. Comme la composée de fonctions polynomiales est polynomiale, $\varphi : x\mapsto\det\left(R+xS\right)$ est une fonction polynomiale (réelle car les matrices R et S sont réelles).

On a donc $\varphi\in\mathbb{R}[X]\subset\mathbb{C}[X]$ et φ était identiquement sur $\mathbb{R}$, elle le serait sur $\mathbb{C}$ aussi. Or :

$$\varphi(i)=\det\left(R+iS\right)=\det P\neq 0$$

car $P\in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto\det\left(R+xS\right) \text{ est une fonction polynomiale non identiquement nulle.}}$$

Comme $x \mapsto \det(R+xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle, elle admet un nombre fini de racines réelles. Ainsi, il existe des réels qui n'annulent pas φ. Autrement dit, il existe un réel a tel que $\varphi(a) = \det(R+aS) \neq 0$. On a alors $R+aS \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } a \text{ tel que la matrice } R+aS \text{ soit inversible.}}$$

Q24. Avec le réel a de la question précédente et posant $Q = R+aS \in GL_n(\mathbb{R})$, on a :

$$QB = (R+aS)B = RB + aSB = AR + aAS = A(R+aS) = AQ.$$

Comme Q est inversible, on peut écrire $B = Q^{-1}AQ$ et comme Q est réelle, ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q25. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_A = \chi_B$.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les racines complexes (distinctes ou pas) de $\chi_A = \chi_B$, alors A et B sont toutes les deux semblables à $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Mais, comme la relation de similitude matricielle est transitive, A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Or, A et B sont réelles, donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Partie III – Dimension 2

Q26. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - Tr(M)X + \det(M).$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\chi_A = \chi_B \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - Tr(A)X + \det(A) = X^2 - Tr(B)X + \det(B).$$

Et deux polynômes sont égaux si et seulement si leur coefficients sont égaux deux à deux, d'où :

$$\boxed{\chi_A = \chi_B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Tr(A) = Tr(B) \\ \det(A) = \det(B) \end{cases}}$$

Q27. On a $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$, de discriminant $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.

Alors, si $\operatorname{tr}(A)^2 \neq 4\det(A)$, χ_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, et donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Avec $Tr(A)=Tr(B)$ et $\det(A)=\det(B)$, on a $\chi_A=\chi_B$, et de même que A, la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Ainsi, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique et diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. D'après la question **Q25** :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Q28. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A et $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Avec $A=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{cases} u(e_1)=\lambda e_1\\ u(e_2)=ae_1+\lambda e_2\end{cases}$$

Comme $b\neq 0$, on peut poser $e_1'=\frac{a}{b}e_1$ et comme $a\neq 0$, e_1' est un vecteur non nul colinéaire à e_1, donc la famille $\mathcal{B}=(e_1',e_2)$ est encore une base de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\begin{cases} u(e_1')=u\left(\frac{a}{b}e_1\right)=\frac{a}{b}u(e_1)=\frac{a}{b}\lambda e_1=\lambda e_1'\\ u(e_2)=ae_1+\lambda e_2=b\frac{a}{b}e_1+\lambda e_2=be_1'+\lambda e_2\end{cases}$$

Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=B.$$

Ainsi, A et B représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

On a $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda I_2$ et pour tout $P\in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1}(\lambda I_2)P=\lambda P^{-1}I_2P=\lambda I_2$. Donc, la seule matrice semblable à λI_2 est elle-même. Alors, si A (ou B) était semblable à λI_2, on aurait $A=\lambda I_2$ (ou $B=\lambda I_2$) et donc $a=0$ (ou $b=0$). Ce n'est pas le cas, donc :

$$\boxed{\text{Ni } A, \text{ ni } B \text{ ne sont semblables à } \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.}$$

Q29. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Supposons que $\chi_A=\chi_B$.

- Si $\mathrm{tr}(A)^2\neq 4\det(A)$, A et B sont semblables d'après **Q27**.

- Si $\operatorname{tr}(A)^2 = 4\det(A)$, alors $\chi_A = \chi_B$, admet une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\chi_A = \chi_B = (X-\lambda)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}$, donc A et B sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Ainsi, A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et B est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.
  - Si a et b sont non nuls, alors $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et A et B le sont aussi par transitivité.
  - Si a et b sont nuls, alors $A = B = \lambda I_2$, donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  - Si a ou b est nul est pas l'autre, alors A ou B est scalaire et pas l'autre, et A et B ne sont pas semblables.

Ainsi, si $\chi_A = \chi_B$, et A et B sont soit toutes deux non scalaires, soit toutes deux scalaires alors, A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on a vu dans la question **Q15**, que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\chi_A = \chi_B$ et, on vient de voir que l'on ne peut pas avoir A ou B est scalaire et pas l'autre.

Finalement :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique et sont soit toutes deux non scalaires, soit toutes deux scalaires.

Partie IV – Dimension 3

Q30. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres complexes, distinctes ou pas, de M.

On a alors $Tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\det(M) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ et :

$$\begin{aligned}\chi_M &= X^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= X^3 - Tr(M)X^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)X - \det(M)\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coefficients d'un polynôme (notamment ici celui de X^2 et le terme constant) :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique et sont soit toutes deux non scalaires, soit toutes deux scalaires.

Si deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique, alors elles ont la même trace et le même déterminant.

Par contre, si $A = 0_3$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} Tr(A) = Tr(B) = 0 \\ \det(A) = \det(B) = 0 \end{cases}$$

Mais, $\chi_A = X^3$ et $\chi_B = X(X-1)(X+1)$, donc $\chi_A \neq \chi_B$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

Q31. χ_A est un polynôme unitaire de degré 3, donc la multiplicité de toute racine complexe de χ_A, donc de toute valeur propre de χ_A, est comprise entre 1 (car on a une racine) et 3 (le degré de χ_A).

Il en va de même pour *m*, et donc :

$$\boxed{m \in \{1, 2, 3\}}$$

Q32. La multiplicité de toute valeur propre complexe de *A* (et *B*) est comprise entre 1 et *m* (la plus grande multiplicité), donc si $m=1$, toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1, donc racines simples du polynôme caractéristique de *A* (et *B*).

Ainsi, $\chi_A = \chi_B$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc *A* et *B* sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Comme $\chi_A = \chi_B$, la question **Q25** permet de conclure que :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Q33. Si $m \neq 1$, alors $m=2$ ou 3 et χ_A est un polynôme réel de degré 3, donc admet au moins une racine réelle.

- Si $m=2$, alors $(X-\lambda_m)^2$ divise χ_A, donc $\chi_A = (X-\lambda_m)^2(X-\mu)$ car χ_A est unitaire et de degré 3. De plus, $\mu \neq \lambda_m$, sinon la multiplicité de λ_m serait 3 et non $m=2$.

  De plus, χ_A est admet au moins une racine réelle, donc λ_m ou μ est réel, et, dans un cas comme l'autre, la seconde racine est alors aussi réelle, car χ_A est réel, donc $Tr(A) = 2\lambda_m + \mu \in \mathbb{R}$.

  Enfin, λ_m est la seule racine de χ_A de multiplicité 2, donc λ_m est unique.

- Si $m=3$, alors $(X-\lambda_m)^3$ divise χ_A, donc $\chi_A = (X-\lambda_m)^3$ car χ_A est unitaire et de degré 3.

  De plus, λ_m est réel car χ_A est réel, donc $Tr(A) = 3\lambda_m \in \mathbb{R}$.

  Enfin, λ_m est la seule racine de χ_A (de multiplicité 3), donc λ_m est unique.

Ainsi, dans les deux cas :

$$\boxed{Sp(A) \subset \mathbb{R} \text{ et que } \lambda_m \text{ est unique.}}$$

Q34. On suppose que $m=2$, donc, d'après la question **Q33**, on a $\chi_A = (X-\lambda_m)^2(X-\mu)$, avec $\lambda_m, \mu \in \mathbb{R}$ et $\mu \neq \lambda_m$.

a. Comme $A - \lambda_m I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $r = rg\left(A - \lambda_m I_3\right) \in \{0, 1, 2, 3\}$ et :

- $A-\lambda_m I_3 \neq 0_3$ (sinon $\chi_A=(X-\lambda_m)^3$ et $m=3$), donc $r\neq 0$.
- $\lambda_m \in Sp(A)$, donc $r \neq 3$.

Ainsi :

$$\boxed{r=1 \text{ ou } 2.}$$

La multiplicité de μ dans $\chi_A=(X-\lambda_m)^2(X-\mu)$ étant égale à 1, on a : $\dim\ker(A-\mu I_3)=1$.

De plus, d'après le théorème du rang, on a : $\dim\ker(A-\lambda_m I_3)=3-rg(A-\lambda_m I_3)=3-r$.

Alors, A est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker(A-\lambda_m I_3)+\dim\ker(A-\mu I_3)=3-r+1=3$. Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } r=1.}$$

b. Soit $x\in\ker(A-\lambda_m I_3)^2\cap\ker(A-\mu I_3)=\ker(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})^2\cap\ker(u-\mu id_{\mathbb{R}^3})$.

On a $u(x)=\mu x$ et $(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})(x)=u(x)-\lambda_m x=(\mu-\lambda_m)x$, donc :

$$\begin{aligned}(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})^2(x)&=(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})\left((u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})(x)\right)\\&=(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})\left((\mu-\lambda_m)x\right)\\&=(\mu-\lambda_m)(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})(x)\\&=(\mu-\lambda_m)^2 x\end{aligned}$$

Or, $(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3})^2(x)=0$ et $(\mu-\lambda_m)^2\neq 0$ (car $\mu\neq\lambda_m$), donc $x=0$. Ainsi :

$$\underline{\ker(A-\lambda_m I_3)^2\cap\ker(A-\mu I_3)=\{0\}} \quad \textbf{(1)}$$

De surcroit, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=(A-\lambda_m I_3)^2(A-\mu I_3)=0_3$, donc $\operatorname{Im}(A-\mu I_3)\subset\ker(A-\lambda_m I_3)^2$ et $rg(A-\mu I_3)\leq\dim\left[\ker(A-\lambda_m I_3)^2\right]$.

Avec ce que l'on a vu dans la question a., on a $rg(A-\mu I_3)=3-\dim\ker(A-\mu I_3)=2$ par le théorème du rang. Ainsi :

$$2\leq\dim\left[\ker(A-\lambda_m I_3)^2\right].$$

Or, $(A-\lambda_m I_3)^2\neq 0_3$, sinon μ $(\neq\lambda_m)$ ne serait pas valeur propre de A, donc :

$$\dim\left[\ker(A-\lambda_m I_3)^2\right]\leq 2.$$

On a donc $\dim\left[\ker\left(A-\lambda_m I_3\right)^2\right]=2$ et ainsi :

$$\underline{\dim\left[\ker\left(A-\lambda_m I_3\right)^2\right]+\dim\ker\left(A-\mu I_3\right)=2+1=3.}\quad \textbf{(2)}$$

Finalement, **(1)** et **(2)** permettent de conclure que :

$$\boxed{\ker\left(A-\lambda_m I_3\right)^2 \oplus \ker\left(A-\mu I_3\right)=\mathbb{R}^3}$$

c. Comme l'endomorphisme $\left(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3}\right)^2$ est polynômial en *u*, il commute avec *u* et donc $G=\ker\left(u-\lambda_m id_{\mathbb{R}^3}\right)^2$ est stable par *u*. Si on note $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par *u* sur *G*, on a $\chi_{\tilde{u}}=\left(X-\lambda_m\right)^2$ (car $\dim G=2$, donc $\chi_{\tilde{u}}$ est unitaire de degré 2 et $\left(\tilde{u}-\lambda_m id_G\right)^2=0$, donc λ_m est la seul valeur propre de $\tilde{u}$). Alors, d'après la question **Q29**, il existe une base $\mathcal{B}_G$ de *G* dans laquelle la matrice de $\tilde{u}$ est de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha\\ 0 & \lambda_m\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et si $\mathcal{B}_1$ est une base $\ker\left(A-\mu I_3\right)$, la famille $\mathcal{B}=\mathcal{B}_G\cup\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $G\oplus\ker\left(A-\mu I_3\right)=\mathbb{R}^3$ et on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}.$$

Comme $M_{\mathcal{B}_c}(u)=A$, on en déduit que :

$$\boxed{A \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ à } \begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}.}$$

Si *A* est semblable $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$, alors $A-\lambda_m I_3$ est semblable à $\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu-\lambda_m\end{pmatrix}$ et :

$$r=rg\left(A-\lambda_m I_3\right)=rg\left(\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\mu-\lambda_m\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \alpha=0\\ 2 & \text{si } \alpha\neq 0\end{cases}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\alpha=0 \text{ si et seulement si } r=1.}$$

d. Si *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors il existe $P\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$.

Alors, $B-\lambda_m I_3=P^{-1}AP-\lambda_m I_3=P^{-1}\left(A-\lambda_m I_3\right)P$, donc $A-\lambda_m I_3$ et $B-\lambda_m I_3$ sont semblables et par conséquent, elles ont le même rang, soit $rg\left(B-\lambda_m I_3\right)=r$.

Supposons que $rg\left(B-\lambda_m I_3\right)=r$.

Dans les trois questions précédentes, nous avons établi que si $m=2$, ce qui équivaut à $\chi_A=(X-\lambda_m)^2(X-\mu)$ avec $\lambda_m,\mu\in\mathbb{R}$, alors $r=1$ ou 2 et A est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, avec $\alpha=0$ si et seulement si $r=1$.

Or, $\chi_B=\chi_A=(X-\lambda_m)^2(X-\mu)$, donc B est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_m & \beta & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$ avec $\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha=0$ si et seulement si $rg\left(B-\lambda_m I_3\right)=r=1$.

De plus, d'après la question **Q28**, les matrices $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha\\ 0 & \lambda_m\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\lambda_m & \beta\\ 0 & \lambda_m\end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ quand α et β sont non nuls. Alors, quand α et β sont non nuls, $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\lambda_m & \beta & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- si $r=2$, on a $\alpha\neq 0$ et $\beta\neq 0$, donc A est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_m & \alpha & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$, qui est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_m & \beta & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$, qui est semblable à *B*, donc *A* et *B* sont semblables par transitivité de la relation de similitude matricielle.
- si $r=1$, A est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_m & 0 & 0\\ 0 & \lambda_m & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$, qui est semblable à *B*, donc *A* et *B* sont semblables toujours par transitivité de la relation de similitude matricielle.

Ainsi, dans les deux cas possibles, *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et finalement, on a bien :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } rg\left(B-\lambda_m I_3\right)=r.}$$

Q35. On suppose que $m=3$, donc, d'après la question **Q33**, on a $\chi_A=(X-\lambda_m)^3$ avec $\lambda_m\in\mathbb{R}$.

a. Comme dans la question **Q34.**a., on a $r=\{0,1,2,3\}$ et $r\neq 3$, car $\lambda_m\in Sp(A)$. Ainsi :

$$\boxed{r=0,1 \text{ ou } 2.}$$

Si $r=0$, soit $rg\left(A-\lambda_m I_3\right)=0$, on a $A-\lambda_m I_3=0_3$, donc :

$$\boxed{\text{Si } r=0, \text{ on a } A=\lambda_m I_3.}$$

b. Posons $v = u - \lambda_m id_{\mathbb{R}^3}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A - \lambda_m I_3$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = \left(A - \lambda_m I_3\right)^3 = 0_3$, donc $v^3 = 0$.

- Si $r = 0$, on a $A - \lambda_m I_3 = 0_3$, donc $A - \lambda_m I_3$ est égale (donc semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$!) à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (0,0)$.

- Si $r = 1$, alors $\dim\ker\left(A - \lambda_m I_3\right) = 3 - 1 = 2$ et il existe $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(e_3) \neq 0$, où $v = u - \lambda_m id_{\mathbb{R}^3}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A - \lambda_m I_3$.

  Comme $rg\,(v) = r = 1$, on a $\operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}\left(v(e_3)\right)$. Alors, comme $v^2(e_3) \in \operatorname{Im} v$, il existe un réel α tel que $v^2(e_3) = \alpha\, v(e_3)$. Mais alors $v^3(e_3) = \alpha\, v^2(e_3) = \alpha^2\, v(e_3) = 0$, donc $\alpha = 0$ car $v(e_3) \neq 0$. Ainsi, $v^2(e_3) = 0$. En posant alors $e_2 = v(e_3) \in \ker v \setminus \{0\}$, on peut compléter ce vecteur en une base $\left(e_1, e_2\right)$ de $\ker v$.

  Soient alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. En appliquant v, avec $v(e_1) = v(e_2) = 0$, on obtient $c\,v(e_3) = 0$, donc $c = 0$ et $ae_1 + be_2 = 0$, soit $a = b = 0$ car $\left(e_1, e_2\right)$ est libre. Ainsi, la famille $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ est libre, et comme elle contient $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

  Avec $v(e_1) = v(e_2) = 0$ et $v(e_3) = e_2$, la matrice de v dans la base $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $A - \lambda_m I_3$ est la matrice de v dans la base canonique, $A - \lambda_m I_3$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (0,1)$.

- On prend maintenant $r = 2$.

  Supposons que $v^2 = 0$. On aurait alors $\operatorname{Im} v \subset \ker v$, donc $r = rg\,(v) \leq \dim\ker v = 3 - r$, ce qui donne $2r \leq 3$, ce qui est absurde pour $r = 2$. Ainsi, $v^2 \neq 0$ et il existe $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $v^2(e_3) \neq 0$.

  Soient alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ae_3 + b\,v(e_3) + c\,v^2(e_3) = 0$.

  En appliquant v^2, et avec $v^3 = 0$, on obtient $a\,v^2(e_3) = 0$, donc $a = 0$ car $v^2(e_3) \neq 0$, et $b\,v(e_3) + c\,v^2(e_3) = 0$. En appliquant v, on obtient $b\,v^2(e_3) = 0$, donc $b = 0$ car $v^2(e_3) \neq 0$, et $c\,v^2(e_3) = 0$, donc $c = 0$. Ainsi, avec $e_1 = v^2(e_3)$ et $e_2 = v(e_3)$, la famille $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ est libre, et comme elle contient $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

  On a $v(e_1) = v^3(e_3) = 0$, $v(e_2) = v^2(e_3) = e_1$ et $v(e_3) = e_2$, donc la matrice de v dans la base $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ainsi, $A - \lambda_m I_3$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (1,1)$.

Comme $r = 0, 1$ ou 2, nous avons balayé tous les cas possibles ici et donc :

> La matrice $A-\lambda_m I_3$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (0,0),\ (0,1)$ ou $(1,1)$.

c. Comme dans la question **Q34.**d., si *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $rg\left(B-\lambda_m I_3\right) = r$.

Si $rg\left(B-\lambda_m I_3\right) = r = rg\left(A-\lambda_m I_3\right)$ (avec $\chi_B = \chi_A = (X-\lambda_m)^3$), alors, d'après la question précédente, les matrices $A-\lambda_m I_3$ et $B-\lambda_m I_3$ sont toutes les deux semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la même matrice $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (0,0),\ (0,1)$ ou $(1,1)$. Par transitivité, $A-\lambda_m I_3$ et $B-\lambda_m I_3$ sont alors semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B-\lambda_m I_3 = P^{-1}\left(A-\lambda_m I_3\right)P = P^{-1}AP - \lambda_m I_3$ et donc

$B = P^{-1}AP$. Ainsi, *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Finalement, dans le cas où $m = 3$, on a bien :

> *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $rg\left(B-\lambda_m I_3\right) = r$.

Q36. Soient *A* et *B* deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $\chi_B = \chi_A$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $A-\lambda I_3$ et $B-\lambda I_3$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc $rg\left(A-\lambda I_3\right) = rg\left(B-\lambda I_3\right)$ et ceci est en particulier, vrai pour toute valeur propre réelle ou complexe de *A* et *B*.

Réciproquement, supposons que *A* et *B* ont le même polynôme caractéristique et que pour tout $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on a $rg\left(A-\lambda I_3\right) = rg\left(B-\lambda I_3\right)$.

Avec les notations de l'énoncé, on a $m \in \{1, 2, 3\}$ d'après la question **Q31** et $\lambda_m \in Sp(A) = Sp(B)$, donc par hypothèse, $rg\left(A-\lambda_m I_3\right) = rg\left(B-\lambda_m I_3\right)$. Or, dans les questions **Q32**, **Q34** et **Q35**, on a prouvé que pour tout $m \in \{1, 2, 3\}$, si $\chi_B = \chi_A$ et si $rg\left(A-\lambda_m I_3\right) = rg\left(B-\lambda_m I_3\right)$, alors *A* et *B* sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Finalement, on a bien :

> Deux matrices *A* et *B* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique et pour tout $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on a $rg\left(A-\lambda I_3\right) = rg\left(B-\lambda I_3\right)$.