Corrigé du DS n° 6

Quelques résultats préliminaires

On prend $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in S_n(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{n,j}x_j\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ et :

$$\boxed{X^{\mathsf{T}}AX=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j}$$

2. Soit $\lambda\in Sp(A)$ une valeur propre réelle ou complexe de A et $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

On a $AZ=\lambda Z$, donc d'une part :

$$\overline{Z}^{\mathsf{T}}AZ=\lambda\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z\,.$$

Et d'autre part, $\overline{AZ}=\overline{\lambda Z}$, soit, avec A réelle, $\overline{A}\overline{Z}=A\overline{Z}=\overline{\lambda}\overline{Z}$ et donc $\overline{Z}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}=\overline{Z}^{\mathsf{T}}A=\overline{\lambda}\overline{Z}^{\mathsf{T}}$, car A est symétrique, ce qui permet d'écrire :

$$\overline{Z}^{\mathsf{T}}AZ=\overline{\lambda}\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z\,.$$

Ainsi, $\lambda\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z=\overline{\lambda}\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z$. Or, si $Z=(z_1\ \cdots\ z_n)^{\mathsf{T}}$, on a $\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z=\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i}z_i=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$, donc $\overline{Z}^{\mathsf{T}}Z\neq 0$ car $Z\neq 0$ et ainsi, $\lambda=\overline{\lambda}$ et donc, les valeurs propres de A sont toutes réelles.

De plus, pour $\lambda\in Sp(A)$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé, on a :

$$X^{\mathsf{T}}AX=X^{\mathsf{T}}(\lambda X)=\lambda X^{\mathsf{T}}X=\lambda\|X\|^2\ge 0\,.$$

La norme est ici la norme canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $X\neq 0$, on a $\|X\|^2>0$ et donc $\lambda\ge 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont des réels positifs ou nuls.}}$$

On prend $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continue.

3. Ici, x est fixé dans $[a,b]$, donc $[a,x]\subset[a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$

- Pour tout $u\in[a,x]$, l'application $t\mapsto f(u,t)$ est continue sur $[c,d]$.
- Pour tout $t\in[c,d]$, l'application $u\mapsto f(u,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[a,x]$.
- Comme $[a,b]\times[c,d]$ est une partie fermée et bornée, donc compacte, de $\mathbb{R}^2$, la continuité de f permet d'affirmer qu'il existe une réel $M\ge 0$ tel que pour tout $(u,t)\in[a,b]\times[c,d]$, $|f(u,t)|\le M$, et la fonction $t\mapsto M$ est continue et intégrable sur $[a,x]$.

Ces trois hypothèses permettent alors de conclure que :

$$\boxed{t \mapsto \varphi(x,t) = \int_a^x f(u,t)\,du \text{ est bien définie et continue sur } [c,d].}$$

4. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose $\psi(x) = \int_c^d \varphi(x,t)\,dt$.

- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[c,d]$ (d'après la question précédente) et intégrable sur ce même segment.
- Pour tout $t \in [c,d]$, $x \mapsto \varphi(x,t) = \int_a^x f(u,t)\,du$ est de classe C^1 sur $[a,b]$, car c'est une primitive de $x \mapsto f(x,t)$ sur ce segment.
- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[c,d]$.
- On a vu que pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [c,d]$, on a $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = |f(x,t)| \leq M$ et la fonction $t \mapsto M$ est continue et intégrable sur $[c,d]$.

Alors :

$$\boxed{\text{La fonction } \psi : x \mapsto \int_c^d \varphi(x,t)\,dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,b], \text{ avec } \psi' : x \mapsto \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_c^d f(x,t)\,dt.}$$

5. Comme ψ est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut écrire, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x \psi'(u)\,du = \psi(x) - \psi(a).$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_a^x \psi'(u)\,du = \int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,dt\right) du.$$

Et, par définition de ψ, on a :

$$\psi(x) - \psi(a) = \int_c^d \varphi(x,t)\,dt - \int_c^d \varphi(a,t)\,dt = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,du\right) dt - \int_c^d 0\,dt = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,du\right) dt.$$

Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,du\right) dt}$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n(f)-\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(u_k,t_\ell)-\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n}f(u_k,t_\ell)-\int_a^b\left(\int_c^d f(u,t)\,dt\right)du\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)(t_{\ell+1}-t_\ell)f(u_k,t_\ell)-\int_a^b\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\right)du\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\right)du\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,dt\right)du-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\right)du\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,dt\right)du-\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\right)du\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,dt-\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\right)du\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}\left[f(u_k,t_\ell)-f(u,t)\right]dt\right)du\right].
\end{aligned}$$

Alors, avec l'inégalité triangulaire (pour sommes et intégrales), on peut écrire :

$$\left|S_n(f)-\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}\left|f(u_k,t_\ell)-f(u,t)\right|dt\right)du\right].$$

Et avec la condition $\mathcal{L}$, on a, pour tous $k,\ell\in[\![0,n-1]\!]$ $\left|f(u_k,t_\ell)-f(u,t)\right|\le M\left(|u_k-u|+|t_\ell-t|\right)$, d'où :

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}\left|f(u_k,t_\ell)-f(u,t)\right|dt\right)du\le\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}M\left(|u_k-u|+|t_\ell-t|\right)dt\right)du.$$

Et :

$$\begin{aligned}
\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}M\left(|u_k-u|+|t_\ell-t|\right)dt\right)du &= M\int_{u_k}^{u_{k+1}}(u-u_k)\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}dt\right)du+M\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}(t-t_\ell)\,dt\right)du\\
&=M\,(t_{\ell+1}-t_\ell)\int_{u_k}^{u_{k+1}}(u-u_k)\,du+M\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left[\frac{1}{2}(t-t_\ell)^2\right]_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}du\\
&=M\,(t_{\ell+1}-t_\ell)\left[\frac{1}{2}(u-u_k)^2\right]_{u_k}^{u_{k+1}}+M\left[\frac{1}{2}(t_{\ell+1}-t_\ell)^2\right]\left(\int_{u_k}^{u_{k+1}}du\right)\\
&=M\,(t_{\ell+1}-t_\ell)\left[\frac{1}{2}(u_{k+1}-u_k)^2\right]+M\left[\frac{1}{2}(t_{\ell+1}-t_\ell)^2\right](u_{k+1}-u_k)\\
&=M\left(\frac{d-c}{n}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right]+M\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d-c}{n}\right)^2\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&=\frac{K}{n^3}
\end{aligned}$$

avec $K=\dfrac{M}{2}(b-a)^2(d-c)+\dfrac{M}{2}(b-a)(d-c)^2$.

Alors :

$$\left|S_n(f)-\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{K}{n^3}=\sum_{k=0}^{n-1}n\frac{K}{n^3}=n^2\frac{K}{n^3}=\frac{K}{n}.$$

Ainsi, il existe une constante $K\geq 0$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|S_n(f)-\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du\right|\leq\frac{K}{n}$ et comme $\frac{K}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,dt\,du}$$

Noyaux de type positif

7. On a ici $\Omega=H$.

Le produit scalaire est par définition symétrique, donc *K* est symétrique, autrement dit, *K* vérifie (i).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in H^n$. Notons $A=\mathrm{Cov}_K(x_1,\dots,x_n)=\left(\langle x_i\mid x_j\rangle_H\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Comme *K* est symétrique, $A\in S_n(\mathbb{R})$. Pour que K vérifie (ii), il faut donc montrer que *A* est positive.

Soit $X=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question 1, on a :

$$X^\top AX=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle x_i\mid x_j\rangle_H\,z_iz_j=\sum_{i=1}^n z_i\sum_{j=1}^n\langle x_i\mid z_jx_j\rangle_H=\sum_{i=1}^n z_i\left\langle x_i\,\middle|\,\sum_{j=1}^n z_jx_j\right\rangle_H=\left\langle\sum_{i=1}^n z_ix_i\,\middle|\,\sum_{j=1}^n z_jx_j\right\rangle_H.$$

Donc, en posant $Y=\sum_{k=1}^n z_kx_k$, on a $X^\top AX=\langle Y\mid Y\rangle_H\geq 0$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $(x_1,\dots,x_n)\in H^n$, $A=\mathrm{Cov}_K(x_1,\dots,x_n)\in S_n^+(\mathbb{R})$ et *K* vérifie (ii) et donc :

$$\boxed{\text{Le produit scalaire } K=\langle\cdot\mid\cdot\rangle_H \text{ est un NTP.}}$$

8. Soit $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ vérifiant $(\mathcal{R})$, autrement dit, il existe un espace préhilbertien réel *H* et une application $\varphi:\Omega\to H$ tels que pour tous $x,y\in\Omega$, $K(x,y)=\langle\varphi(x)\mid\varphi(y)\rangle_H$ où $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_H$ désigne le produit scalaire sur *H*.

Par symétrie du produit scalaire, on a pour tous $x,y\in\Omega$:

$$K(x,y)=\langle\varphi(x)\mid\varphi(y)\rangle_H=\langle\varphi(y)\mid\varphi(x)\rangle_H=K(y,x).$$

Donc, *K* vérifie (i).

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega^n$, on a $A=\mathrm{Cov}_K(x_1,\dots,x_n)=\left(\langle\varphi(x_i)\mid\varphi(x_j)\rangle_H\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique par symétrie de *K*.

Soit $X=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exactement comme dans la question précédente, on a $X^{\top}AX=\left\langle Y \mid Y\right\rangle_H \geq 0$ en posant $Y=\sum_{k=1}^{n} z_k \varphi(x_k)$.

Donc A est positive et K vérifie (ii).

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R} \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{R})\text{, alors } K \text{ est un NTP.}}$$

9. On prend ici $\Omega=\{x_1,\dots,x_n\}$ fini (avec $n\in\mathbb{N}^*$) et $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ un NTP sur Ω.

Posons $A=\mathrm{Cov}_K\left(x_1,\dots,x_n\right)=\left(K(x_i,x_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Comme K est un NTP, on a $A\in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Dans cette question, il faut « inventer » un espace vectoriel réel H et le munir d'un produit scalaire adéquat (tel que K vérifie $(\mathcal{R})$ pour ce produit scalaire). Comme Ω est fini de cardinal n, il ne faut pas une intuition délirante pour penser que l'on peut choisir H de dimension finie n, et dans ce cas, autant choisir le espace vectoriel réel de dimension n le plus simple possible : $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Considérons $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique : pour tous $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left\langle X \mid Y\right\rangle = X^{\top}Y$.

Cherchons alors $\varphi:\Omega\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x,y\in\Omega$, $\left\langle \varphi(x)\mid\varphi(y)\right\rangle=K(x,y)$, autrement dit, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $\left\langle \varphi(x_i)\mid\varphi(x_j)\right\rangle=K(x_i,x_j)$.

Remarquons que définir une application φ de Ω dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ revient à donner $X_i=\varphi(x_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Avec cette notation, $\left\langle \varphi(x_i)\mid\varphi(x_j)\right\rangle=K(x_i,x_j)$ revient à $X_i^{\top}X_j=K(x_i,x_j)$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, donc à $A=\left(X_i^{\top}X_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Ainsi, pour prouver que K vérifie $(\mathcal{R})$, avec $H=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\left\langle X \mid Y\right\rangle_H=X^{\top}Y$ pour tous $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une famille $\left(X_1,\dots,X_n\right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left(X_i^{\top}X_j\right)_{1\leq i,j\leq n}=A$.

Si on note $\left(E_i\right)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors, pour toute matrice $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$a_{i,j}=\left\langle E_i \mid AE_j\right\rangle=E_i^{\top}AE_j.$$

Ainsi, on cherche une famille $\left(X_1,\dots,X_n\right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tell que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$X_i^{\top}X_j=E_i^{\top}AE_j.$$

Or A est symétrique réelle, donc A est diagonalisable dans une base orthonormée (d'après le théorème spectral). Autrement dit, il existe une matrice orthogonale $P\in O_n(\mathbb{R})$ telle que $D=P^{\top}AP$, ou bien $A=PDP^{\top}$, avec $D=diag\left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right)$ où les λ_k sont les valeurs propres de A. Alors, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$X_i^{\top}X_j=E_i^{\top}AE_j \quad\Leftrightarrow\quad X_i^{\top}X_j=E_i^{\top}\left(PDP^{\top}\right)E_j=\left(E_i^{\top}P\right)D\left(P^{\top}E_j\right)=\left(P^{\top}E_i\right)^{\top}D\left(P^{\top}E_j\right).$$

De plus, comme A est positive, on a $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$. On peut donc poser $\Delta = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et on a alors $D = \Delta^2 = \Delta^{\top}\Delta$ donc :

$$X_i^{\top} X_j = E_i^{\top} A E_j \quad \Leftrightarrow \quad X_i^{\top} X_j = \left(P^{\top} E_i\right)^{\top} \Delta^{\top}\Delta\left(P^{\top} E_j\right) = \left(\Delta P^{\top} E_i\right)^{\top}\left(\Delta P^{\top} E_j\right).$$

Ainsi, en prenant $\varphi : \Omega \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(x_i) = \Delta P^{\top} E_i$, on a bien $A = \left(X_i^{\top} X_j\right)_{1 \le i, j \le n}$ et donc, avec $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, ce permet de conclure que :

$$\boxed{K \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{R}).}$$

Définition :

> On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) est ***de classe C^1 par morceaux*** sur $[a,b]$ lorsqu'il existe un entier $p \ge 1$ et une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a,b]$ (dite adaptée à *f*) tels que pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, *f* est de classe C^1 sur $]\, a_k, a_{k+1} \,[$ et f' admet des limites finies en $a_k^{\,+}$ et $a_{k+1}^{\,-}$.

10. Ici, *H* est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, de classe C^1 par morceaux sur ce segment et qui s'annulent en 0 et on pose pour toutes $f, g \in H$:

$$\left\langle f \mid g \right\rangle_H = \int_0^1 f'(t) g'(t)\, dt.$$

L'application $(f, g) \mapsto \left\langle f \mid g \right\rangle_H$ est bien définie sur *H*, car si $f, g \in H$, alors $f'g'$ est continue par morceaux sur $[0,1]$, donc l'intégrale existe bien et il existe une subdivision de $[0,1]$ adaptée à *f* et *g*.

De plus, $(f, g) \mapsto \left\langle f \mid g \right\rangle_H$ est symétrique ($f'g' = g'f'$) et bilinéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

Enfin, pour toute fonction *f* de *H*, on a $\left\langle f \mid f \right\rangle_H = \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt \ge 0$ et si $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ est une subdivision de $[0,1]$ adaptée à *f* (avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0 = 0$ et $a_p = 1$), alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle f \mid f \right\rangle_H = \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(f'(t)\right)^2 dt = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![0, p-1]\!],\ \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(f'(t)\right)^2 dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![0, p-1]\!],\ f' = 0 \text{ sur }]\, a_k, a_{k+1} \,[\\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![0, p-1]\!],\ f \text{ est constante sur }]\, a_k, a_{k+1} \,[\\
&\Leftrightarrow \quad f \text{ est constante sur } [0,1] \text{ (car } f \text{ est continue sur } [0,1])
\end{aligned}$$

Enfin, comme $f(0) = 0$, on a bien $\left\langle f \mid f \right\rangle_H = 0$ si et seulement si $f = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'application } (f, g) \mapsto \left\langle f \mid g \right\rangle_H \text{ est bien un produit scalaire sur } H.}$$

11. Tel qu'indiqué, posons pour tout $x \in [0,1]$:

$$\varphi(x) = K_x : [0,1] \to \mathbb{R} \; ; \; y \mapsto K(x,y) = \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{quand } y \in [0,x] \\ x & \text{quand } y \in [x,1] \end{cases}$$

La fonction K_x est linéaire sur $[0,x]$ et constante sur $[x,1]$.

Elle est donc de classe C^1 sur $[0,x[$ et sur $]x,1]$. De plus :

- $\lim\limits_{y \to x^-} K_x(y) = \lim\limits_{y \to x^+} K_x(y) = x = K_x(x)$, donc K_x est continue en x et ainsi, K_x est continue sur $[0,1]$.
- $\lim\limits_{y \to x^-} K_x'(y) = \lim\limits_{y \to x^-} 1 = 1$ et $\lim\limits_{y \to x^+} K_x'(y) = \lim\limits_{y \to x^+} 0 = 0$, donc K_x' admet des limites finies en x^+ et x^-.
- $0 \in [0,x]$ donc $K_x(0) = 0$.

Tout ceci permet de conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $K_x \in H$.

On veut montrer que $K : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \min(x,y) \end{cases}$ vérifie $(\mathcal{R})$ pour l'espace H et le produit scalaire considérés, autrement dit, qu'il existe une application $\varphi : [0,1] \to H$ telle que pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :

$$K(x,y) = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y) \rangle_H .$$

Vérifions que cela est le cas pour l'application $\varphi : [0,1] \to H \; ; \; x \mapsto \varphi(x) = K_x$, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :

$$K(x,y) = \min(x,y) = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y) \rangle_H = \langle K_x \mid K_y \rangle_H = \int_0^1 K_x'(t) K_y'(t)\, dt .$$

Soient $x, y \in [0,1]$. Comme K est symétrique, on peut supposer que $x \le y$ sans nuire à la généralité.

D'après ce que l'on a vu plus haut, $\sigma_x = (0, x, 1)$ et $\sigma_y = (0, y, 1)$ sont des subdivisions de $[0,1]$ adaptées à K_x et K_y respectivement, donc $\sigma_x = (0, x, y, 1)$ est adaptée à K_x et K_y, et on a :

$$K_x'(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t \in [0,x[\\ 0 & \text{quand } t \in]x,1] \end{cases} \quad \text{et} \quad K_y'(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t \in [0,y[\\ 0 & \text{quand } t \in]y,1] \end{cases}$$

Donc :

$$K_x'(t) K_y'(t) = \begin{cases} 1 \times 1 = 1 & \text{quand } t \in [0,x[\\ 1 \times 0 = 0 & \text{quand } t \in]x,y[\\ 0 \times 0 = 0 & \text{quand } t \in]y,1] \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\langle \varphi(x) \mid \varphi(y) \rangle_H = \langle K_x \mid K_y \rangle_H = \int_0^1 K_x'(t) K_y'(t)\, dt = \int_0^x dt = x = \min(x,y) = K(x,y) .$$

Ainsi, $\varphi : [0,1] \to H \; ; \; x \mapsto \varphi(x) = K_x$ réalise la propriété voulue, donc :

$$\boxed{K : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \min(x,y) \end{cases} \text{ vérifie } (\mathcal{R}).}$$

Opérateurs à noyau

On a ici :

- $I=[a,b]$, $E=C(I,\mathbb{R})$, $\langle f \mid g\rangle=\int_a^b fg$, $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2}$.
- $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ symétrique et continue sur $[a,b]\times[a,b]$.
- $\forall f\in E, \forall x\in[a,b], u_K(f)(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt=\langle K_x \mid f\rangle$ avec $K_x:[a,b]\to\mathbb{R}$; $t\mapsto K(x,t)$.

12. On considère $K':[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ symétrique et continue sur $[a,b]\times[a,b]$ telle que $u_K=u_{K'}$.

On alors, pour $x\in[a,b]$ et toute $f\in E$:

$$u_K(f)(x)=u_K(f)(x) \quad\Leftrightarrow\quad \langle K_x \mid f\rangle=\langle K'_x \mid f\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \langle K_x-K'_x \mid f\rangle=0.$$

Ainsi, à x fixé, $K_x-K'_x\in E$ est orthogonal à tout vecteur de E, donc $K_x-K'_x=0$, soit $K_x=K'_x$. Ceci étant vrai pour tout $x\in[a,b]$ se traduit par $K_x(t)=K'_x(t)$, soit $K(x,t)=K'(x,t)$ pour tout $(x,t)\in[a,b]\times[a,b]$, et ainsi :

$$\boxed{K=K'}$$

13. On a $u_K:f\in E\to u_K(f):x\mapsto\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$.

Soit $f\in E$. La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc $(x,t)\mapsto f(t)$ est continue sur $[a,b]\times[a,b]$. Comme K l'est aussi par hypothèse, l'application $(x,t)\mapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur $[a,b]\times[a,b]$ en tant que produit de telles fonctions. D'après la question 3, l'application $x\mapsto\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$ est alors continue sur $[a,b]$, donc pour toute $f\in E$, $u_K(f)\in E$. De plus, u_K est linéaire par linéarité de l'intégrale, et ainsi :

$$\boxed{u_K \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour toutes $f,g\in E$:

$$\langle f \mid g\rangle^2=\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2\le\|f\|_2^2\,\|g\|_2^2.$$

En particulier pour tout $x\in[a,b]$ et pour $g=K_x:t\mapsto K(x,t)$, on obtient :

$$\left(u_K(f)(x)\right)^2=\left(\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt\right)^2\le\|f\|_2^2\,\|K_x\|_2^2.$$

Comme $[a,b]\times[a,b]$ est une partie fermée et bornée, donc compacte, de $\mathbb{R}^2$, la continuité de K permet d'affirmer qu'il existe une réel $M\ge 0$ tel que pour tout $(x,t)\in[a,b]\times[a,b]$, $|K(x,t)|\le M$.

Alors, pour tout $x\in[a,b]$:

$$\|K_x\|_2^2=\int_a^b\left(K_x(t)\right)^2dt=\int_a^b\left(K(x,t)\right)^2dt\le\int_a^b M^2dt=M^2(b-a).$$

Donc, pour tout $x\in[a,b]$, $\left(u_K(f)(x)\right)^2\leq M^2(b-a)\|f\|_2^2$ et :

$$\|u_K(f)\|_2^2=\int_a^b\left(u_K(f)(x)\right)^2dx\leq\int_a^b M^2(b-a)\|f\|_2^2\,dx=M^2(b-a)^2\,\|f\|_2^2\,.$$

Ainsi, pour toute $f\in E$:

$$\|u_K(f)\|_2\leq M(b-a)\|f\|_2\,.$$

Comme l'application u_K est linéaire, ceci prouve qu'elle est lipschitzienne, et donc que :

$$\boxed{u_K \text{ est continue de } \left(E,\|\cdot\|_2\right) \text{ dans lui-même.}}$$

14. Par définition, montrer que u_K est symétrique revient à montrer que pour toutes $f,g\in E$:

$$\begin{aligned}\left\langle u_K(f)\mid g\right\rangle=\left\langle f\mid u_K(g)\right\rangle &\Leftrightarrow \int_a^b u_K(f)(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)u_K(g)(x)\,dx\\ &\Leftrightarrow \int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt\right)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b K(x,t)g(t)\,dt\right)dx\\ &\Leftrightarrow \int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(t)g(x)\,dt\right)dx=\int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(x)g(t)\,dt\right)dx\end{aligned}$$

Et dans les intégrales les variables étant muettes, on a encore :

$$\left\langle u_K(f)\mid g\right\rangle=\left\langle f\mid u_K(g)\right\rangle \Leftrightarrow \int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(t)g(x)\,dt\right)dx=\int_a^b\left(\int_a^b K(t,x)f(t)g(x)\,dx\right)dt\,.$$

Enfin, comme K est symétrique :

$$\left\langle u_K(f)\mid g\right\rangle=\left\langle f\mid u_K(g)\right\rangle \Leftrightarrow \int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(t)g(x)\,dt\right)dx=\int_a^b\left(\int_a^b K(x,t)f(t)g(x)\,dx\right)dt\,.$$

Or, pour toutes $f,g\in E$, $(x,t)\mapsto K(x,t)f(t)g(x)$ est continue sur $[a,b]\times[a,b]$ en tant que produit de telles fonctions. On peut donc appliquer le théorème de Fubini établi plus haut, qui donne le résultat voulu. Ainsi :

$$\boxed{u_K \text{ est un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien } E.}$$

Soient alors λ et μ deux éventuelles valeurs propres distinctes de u_K, et f_λ et f_μ des vecteurs propres associés à λ et μ respectivement. On a alors :

$$\left\langle u_K(f_\lambda)\mid f_\mu\right\rangle=\left\langle f_\lambda\mid u_K(f_\mu)\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \lambda f_\lambda\mid f_\mu\right\rangle=\left\langle f_\lambda\mid \mu f_\mu\right\rangle \Leftrightarrow (\lambda-\mu)\left\langle f_\lambda\mid f_\mu\right\rangle=0\,.$$

Et comme $\lambda\neq\mu$, on a $\lambda-\mu\neq0$ et donc, $\left\langle f_\lambda\mid f_\mu\right\rangle=0$. Ainsi :

$$\boxed{f_\lambda \text{ et } f_\mu \text{ sont orthogonaux.}}$$

15. Soit $f\in E$. On a $\left\langle u_K(f)\mid f\right\rangle=\int_a^b\int_a^b K(x,t)f(t)f(x)\,dt\,dx$.

Posons $h:(x,t)\mapsto K(x,t)f(x)f(t)$. Comme produit de telles fonctions, h est continue sur $[a,b]\times[a,b]$.

D'après le résultat admis à l'issue de la question 6, on a donc :

$$\langle u_K(f) \mid f \rangle = \int_a^b \int_a^b h(x,t)\, dt\, dx = \lim_{n\to+\infty} S_n(h).$$

Avec les notations de la question 6, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k = t_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et :

$$S_n(h) = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} h(u_k, t_\ell) = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} h(u_k, u_\ell) = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} K(u_k, u_\ell) f(u_k) f(u_\ell).$$

Posons $A = \mathrm{Cov}_K(u_0, \dots, u_{n-1}) = \left(K(u_k, u_\ell)\right)_{0\le k,\ell \le n-1}$ et $X = \begin{pmatrix} f(u_0) \\ \vdots \\ f(u_{n-1}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question 1 :

$$X^\top A X = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} K(u_k, u_\ell) f(u_k) f(u_\ell).$$

Comme K est un NTP, on a $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc $X^\top A X \ge 0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(h) = \frac{(b-a)^2}{n^2} X^\top A X \ge 0.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{\langle u_K(f) \mid f \rangle \ge 0}$$

Soient alors λ une éventuelle valeur propre réelle de u_K et f_λ un vecteur propre associé à λ. On a alors :

$$\langle u_K(f_\lambda) \mid f_\lambda \rangle = \langle \lambda f_\lambda \mid f_\lambda \rangle = \lambda \langle f_\lambda \mid f_\lambda \rangle = \lambda \|f_\lambda\|_2^2 \ge 0.$$

Et comme $f_\lambda \ne 0$, on a $\|f_\lambda\|_2^2 > 0$ et donc, $\lambda \ge 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les (éventuelles) valeurs propres (réelles) de } u_K \text{ sont positives ou nulles.}}$$

On a maintenant : $I = [0,1]$, $E = C(I, \mathbb{R})$, $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 fg$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$.

16. Soit g une éventuelle solution de $(\mathcal{P})$.

On a alors $g \in C^2([0,1], \mathbb{R})$, $g'' = -f$ et $g'(1) = g(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0,1]$:

$$g'(x) = g'(x) - g'(1) = \int_1^x \left(-f(t)\right) dt = -\int_1^x f(t)\, dt$$

$$g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(u)\, du = \int_0^x \left(-\int_1^u f(t)\, dt\right) du = -\int_0^x \left(\int_1^u f(t)\, dt\right) du$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1]$:

$$u_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt + \int_x^1 x f(t)\, dt.$$

Avec une intégration par parties dans la première intégrale ($t \mapsto t$ et $t \mapsto \int_1^t f(u)\,du$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$), on obtient, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} u_K(f)(x) &= \left[t \int_1^t f(u)\,du \right]_0^x - \int_0^x \left(\int_1^t f(u)\,du \right) dt + x \int_x^1 f(t)\,dt \\ &= x \int_1^x f(u)\,du - \int_0^x \left(\int_1^t f(u)\,du \right) dt + x \int_x^1 f(t)\,dt \\ &= -\int_0^x \left(\int_1^t f(u)\,du \right) dt \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, si g est solution de $(\mathcal{P})$, alors $g = u_K(f)$ et donc g est unique.

Réciproquement, on vient de voir que $u_K(f) : x \mapsto -\int_0^x \left(\int_1^t f(u)\,du \right) dt$.

La fonction $F : t \mapsto \int_1^t f(u)\,du$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ (comme primitive de *f* qui est continue sur $[0,1]$).

Or, $u_K(f)$ est l'opposée d'une primitive de cette fonction *F*, donc $u_K(f) \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ et $u_K(f)' = -F$ et $u_K(f)'' = -f$.

De plus, $u_K(f)(0) = -\int_0^0 F(t)\,dt = 0$ et $u_K(f)'(1) = -F(1) = -\int_1^1 f(u)\,du = 0$.

Ainsi, $u_K(f)$ est solution de $(\mathcal{P})$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le problème } (\mathcal{P}) \text{ possède une unique solution : } u_K(f).}$$

17. Soient λ une éventuelle valeur propre réelle de u_K et *f* un vecteur propre (non nul) associé à λ.

D'après la question 15, on a $\lambda \geq 0$ car *K* est un NTP et, par définition, $u_K(f) = \lambda f$.

D'après la question précédente, $u_K(f)$ est solution de $(\mathcal{P})$, soit $u_K(f)'' = -f$ et $u_K(f)'(1) = u_K(f)(0) = 0$.

Avec $u_K(f) = \lambda f$, on obtient $u_K(f)'' = \lambda f'' = -f$.

Si $\lambda = 0$, alors $f = 0$, qui est absurde, donc $\lambda > 0$ et en posant $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, on peut écrire :

$$f'' + \omega^2 f = 0.$$

On a alors $f : x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec *A* et *B* des réels.

Avec $u_K(f) = \lambda f$ et $\lambda \neq 0$, les conditions aux limites $u_K(f)'(1) = u_K(f)(0) = 0$ se récrivent :

$$f'(1) = f(0) = 0.$$

Or, avec l'expression de *f* trouvée ci-dessus, on a alors $f(0) = A = 0$ et $f'(1) = -A\omega\sin\omega + B\omega\cos\omega = 0$.

Comme $\omega \neq 0$ et $B \neq 0$ (sinon *f* serait nulle), la deuxième condition devient (avec $A = 0$) :

$$\cos\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}, k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les valeurs propre de } u_K \text{ sont les termes de la suite } (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ avec } \lambda_k = \frac{1}{(k+½)^2\pi^2} \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}.}$$

Remarquons que l'on a aussi établi que pour tout $k\in\mathbb{N}$, le sous-espace propre associé à λ_k est la droite $\ker\left(u_K-\lambda_k id_E\right)=\mathrm{Vect}\left(f_k\right)$ avec $f_k : x\mapsto \sin\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi x\right]$.

On a :

$$\|f_k\|_2^2=\int_0^1\left(f_k(t)\right)^2dt=\int_0^1\sin^2\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\right]dt=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\cos\left[(2k+1)\pi t\right]-1\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin\left[(2k+1)\pi t\right]-t\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

Donc, $e_k=\sqrt{2}f_k$ est un vecteur propre unitaire associé à λ_k et ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}\text{, le sous-espace propre associé à } \lambda_k \text{ est la droite}\\ \text{dirigée par le vecteur unitaire } e_k : x\mapsto\sqrt{2}\sin\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi x\right].\end{array}}$$

18. On a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lambda_k=\dfrac{1}{(k+½)^2\pi^2}$, donc $\lambda_k^2\sim\dfrac{1}{\pi^4k^4}$ et la série $\sum\lambda_k^2$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\dfrac{1}{k^4}$, et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+½)^4\pi^4}=\frac{1}{\pi^4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+½)^4}=\frac{1}{\pi^4}\frac{\pi^4}{6}=\frac{1}{6}.$$

Par ailleurs :

$$\int_0^1\int_0^1K(x,t)^2dx\,dt=\int_0^1\left(\int_0^1K(x,t)^2dx\right)dt=\int_0^1\left(\int_0^1\left(\min(x,t)\right)^2dx\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^t x^2dx+\int_t^1t^2dx\right)dt=\int_0^1\left(\frac{t^3}{3}+t^2(1-t)\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(t^2-\frac{2}{3}t^3\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{6}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1K(x,t)^2dx\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k^2}$$

19. Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, la famille $\left(e_0,\dots,e_n\right)$ est une base orthonormée de F_n (orthonormée, donc libre, par construction des e_k et d'après la question 14, et génératrice de F_n par définition).

On a donc pour toute $g \in E$:

$$p_n(g) = \langle e_0 \mid g \rangle e_0 + \ldots + \langle e_n \mid g \rangle e_n \text{ et } \|p_n(g)\|_2^2 = \langle e_0 \mid g \rangle^2 + \ldots + \langle e_n \mid g \rangle^2 .$$

Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $(K_x - p_n(K_x)) \perp p_n(K_x)$, donc le théorème de Pythagore permet d'écrire $\|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 + \|p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2$ et avec $p_n(K_x) = \langle e_0 \mid K_x \rangle e_0 + \ldots + \langle e_n \mid K_x \rangle e_n$, on obtient :

$$\|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2 - \|p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid K_x \rangle^2 .$$

Alors :

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx = \int_0^1 \left(\|K_x\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid K_x \rangle^2 \right) dx = \int_0^1 \|K_x\|_2^2 \, dx - \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \langle e_k \mid K_x \rangle^2 \, dx .$$

D'après la question précédente :

$$\int_0^1 \|K_x\|_2^2 \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 K_x(t)^2 \, dt \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,t)^2 \, dt \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2 \, dt \, dx = \int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2 \, dx \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 .$$

Par ailleurs, par définition de u_K et des e_k, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\langle e_k \mid K_x \rangle = u_K(e_k)(x) = \lambda_k e_k(x)$, donc :

$$\int_0^1 \langle e_k \mid K_x \rangle^2 \, dx = \int_0^1 \lambda_k^2 e_k(x)^2 \, dx = \lambda_k^2 \|e_k\|_2^2 = \lambda_k^2 .$$

Alors :

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^2 .$$

Ainsi, $\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx$ est le reste d'ordre n d'une série convergente, donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx = 0}$$

20. Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
u_K(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k(x) &= \langle K_x \mid f \rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid f \rangle \langle e_k \mid K_x \rangle \\
&= \langle K_x \mid f \rangle - \sum_{k=0}^{n} \left\langle \langle e_k \mid K_x \rangle e_k \,\middle|\, f \right\rangle \\
&= \langle K_x \mid f \rangle - \left\langle \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid K_x \rangle e_k \,\middle|\, f \right\rangle \\
&= \left\langle K_x - p_n(K_x) \,\middle|\, f \right\rangle
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left| u_K(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k(x) \right| \le \|K_x - p_n(K_x)\|_2 \, \|f\|_2 .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2^2 = \int_0^1 \left(u_K(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k(x) \right)^2 dx \le \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, \|f\|_2^2 \, dx .$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx.$$

Comme d'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \, dx = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2^2 = 0}$$

21. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, toujours avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \langle e_k \mid f \rangle \right| \leq \|e_k\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2.$$

Donc, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left| \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k(x) \right| = \lambda_k \left| \langle e_k \mid f \rangle \right| \left| \sqrt{2} \sin\left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x \right] \right| \leq \sqrt{2} \|f\|_2 \lambda_k.$$

Or, on a $\sqrt{2}\|f\|_2 \lambda_k = \dfrac{\sqrt{2}\|f\|_2}{(k + ½)^2 \pi^2} \sim \dfrac{\sqrt{2}\|f\|_2}{\pi^2 k^2}$, donc la série $\sum \sqrt{2}\|f\|_2 \lambda_k$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{k^2}$. Ainsi, par hypothèse de domination, la série de fonctions $\sum \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k$ converge normalement sur $[0,1]$, donc :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

Pour toute $g \in E$, on a :

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 g(x)^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 \|g\|_\infty^2 \, dx} = \|g\|_\infty.$$

En particulier, si $F = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k$ (limite pour la norme infinie) on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_K(f) - F\|_2 = \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k - F \right\|_2$$

Donc :

$$\|u_K(f) - F\|_2 \leq \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2 + \left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k - F \right\|_2.$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_K(f) - F\|_2 \leq \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2 + \left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k - F \right\|_\infty$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| u_K(f) - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k \right\|_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle e_k - F \right\|_\infty = 0$, donc en passant à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\|u_K(f) - F\|_2 \leq 0$, soit $\|u_K(f) - F\|_2 = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{u_K(f)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k}$$

Autre méthode :

En posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n=\left(F-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k\right)^2$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ (car les e_k le sont et la série converge uniformément sur $[0,1]$, donc F est continue sur $[0,1]$) qui converge uniformément vers la fonction nulle. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left\|F-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k\right\|_2^2 &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(F(x)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k(x)\right)^2 dx\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\right)dx=0\end{aligned}$$

Donc, $\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers F pour $\|\cdot\|_2$. Or, d'après la question précédente, cette même suite de fonctions converge vers $u_K(f)$ pour $\|\cdot\|_2$, donc par unicité de la limite :

$$u_K(f)=F=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k\left\langle e_k \mid f\right\rangle e_k .$$

22. Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour tous $x,y\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}e_k(x)e_k(y)&=\left(\sqrt{2}\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right]\right)\left(\sqrt{2}\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y\right]\right)\\ &=2\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right]\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y\right]\\ &=\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y\right]-\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y\right]\\ &=\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x-y)\right]-\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x+y)\right]\end{aligned}$$

Notons $h_k : t\mapsto\lambda_k\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\right]$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $|h_k(t)|\le\lambda_k$ et on a vu que la série $\sum\lambda_k$ converge, donc la série de fonctions $\sum h_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions h_k sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $H=\sum_{k=0}^{+\infty}h_k$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Alors, comme $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto x-y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (donc sur $[0,1]\times[0,1]$) et à valeurs réelles, la fonction $K':(x,y)\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k e_k(x)e_k(y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[h_k(x-y)-h_k(x+y)\right]=H(x-y)-H(x+y)$ est définie et continue sur $[0,1]\times[0,1]$ en tant que différence de telles fonctions.

De plus, pour toute $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$:

$$u_K(f)(x) = \int_0^1 K'(x,t) f(t)\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(t) f(t) \right) dt .$$

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|\lambda_k e_k(x) e_k(t) f(t)| \leq 2\|f\|_\infty \lambda_k$, où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$. Comme la série $\sum \lambda_k$ converge, la série de fonctions $\sum \lambda_k e_k(x) e_k f$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k e_k(x) e_k f$ est continue sur $[0,1]$, donc :

$$u_{K'}(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\lambda_k e_k(x) e_k(t) f(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \left(\int_0^1 e_k(t) f(t)\, dt \right) e_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \left\langle e_k \mid f \right\rangle e_k(x) = u_K(f)(x) .$$

Ceci étant vrai pour toute $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a $u_{K'} = u_K$.

Enfin, comme K et K' sont toutes deux symétriques et continues sur $[0,1] \times [0,1]$ (par hypothèse pour K ; la symétrie de K' est une conséquence de la commutativité du produit de réels et on vient de prouver sa continuité), la question 12 permet de conclure que $K = K'$, autrement dit que pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$\boxed{K(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y)}$$

23. En prenant $x = y$ dans la formule ci-dessus, on obtient pour tout $x \in [0,1]$:

$$K(x,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x)^2 .$$

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k e_k^2$ est continue sur $[0,1]$ et $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| \lambda_k e_k(x)^2 \right| \leq 2\lambda_k$. Comme la série $\sum \lambda_k$ converge, la série de fonctions $\sum \lambda_k e_k^2$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. On peut alors écrire :

$$\int_0^1 K(x,x)\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x)^2 \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \lambda_k e_k(x)^2\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \int_0^1 e_k(x)^2\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \|e_k\|_2^2 .$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^1 K(x,x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k}$$

Or, on a $\int_0^1 K(x,x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \dfrac{1}{2}$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+½)^2 \pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+½)^2}$, donc :

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+½)^2} = \frac{1}{2} .$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+½)^2} = \frac{\pi^2}{2}}$$

Remarque :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(k+½\right)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{\left(2k+1\right)^2}=4\sum_{\substack{k=1\\k\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-4\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Donc, le résultat ci-dessus permet de retrouver la formule $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.