DS de Mathématiques n° 4

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

****

Les trois exercices sont complètement indépendants.

Exercice n° 1

(*extrait de Centrale Maths 2 - PSI - 2020*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$.

Q1. Déterminer le rayon de convergenece R de la série entière $\sum a_n x^n$.

On appelle S la somme de cette série entière quand elle est définie. Pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n .$$

Q2. Justifier que la fonction S est de classe C^∞ sur $\left]-R, R\right[$ et exprimer $S^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q3. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $\left[-R, R\right]$.

Q4. Démontrer que pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, on a :

$$x\big(1 + S(x)\big) S'(x) = S(x).$$

☺ *On pourra utiliser sans la prouver la formule suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a, y) \in \mathbb{C}^2$:*

$$n y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}$$

Q5. Prouver que pour tout $x \in \left[-R, R\right]$, $S(x) \in \left[-1, +\infty\right[$.

☺ *On pourra considérer deux cas :* $x > 0$ *et* $x \leq 0$.

Q6. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q7. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]-R,0[$, $]0,R[$, puis sur l'intervalle $]-R,R[$.

Q8. Montrer La fonction $V : x \mapsto xe^x$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Justifier que la bijection réciproque, notée *W*, est continue sur $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Q9. Prouver que $W(x) = S(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R,R]$?

Exercice n° 2

(*extrait très adapté de E3A B - PSI - 2013*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+(nx)^2}$.

Q10. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}^*$? uniforme sur $\mathbb{R}^*$?

Dans la suite, on note *f* la somme de la série $\sum f_n$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+(nx)^2}$.

Q11. Prouver que *f* est paire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Q12. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0^+.

☺ *On pourra penser à la comparaison série-intégrale.*

Q13. Dresser le tableau de variations complet de *f* sur $\mathbb{R}^*$.

Q14. Déterminer un équivalent simple de $f(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 3

(*extrait adapté de CCINP Maths 2 - MP - 2019*)

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables.

Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier naturel avec $n \geq 2$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de *M* et $Sp(M)$ son spectre *complexe*.

On rappelle que rang, trace et déterminant sont des invariants de similitude matricielle.

Question préliminaire

Q15. Montrer que deux matrices semblables (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) ont le même polynôme caractéristique et même spectre.

Montrer de plus que soit elles sont toutes deux diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit aucune des deux ne l'est.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q16. On donne les deux matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique. Ces deux matrices sont-elles semblables ?

☺ *On pourra vérifier que l'une de ces deux matrices est diagonalisable.*

Q17. On donne les deux matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes.

Première méthode : En construisant, à partir de $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et sans calculs, une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A a une matrice « agréable ».

Deuxième méthode : En étudiant les racines du polynôme caractéristique de A et de B.

Q18. Démontrer que toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice de la forme :

$$U=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&0&a_2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

☺ *On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.*

Q19. *Application* : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n\geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u\circ u\neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

☺ *On pourra calculer U^2 où U est la matrice de la question précédente.*

Q20. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q21. On donne une matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha & \beta & \alpha\\ \alpha & \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha & \beta & \alpha\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice A. En déduire que 0 est valeur propre de A. Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres et préciser une base de vecteurs propres de A.

☺ *Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.*

Partie II – Deux résultats

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc une matrice $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B=P^{-1}AP$. On pose $P=R+iS$ avec $R,S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q22. Démontrer que $RB=AR$ et $SB=AS$.

Q23. Justifier que la fonction $x\mapsto\det\left(R+xS\right)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel a tel que la matrice $R+aS$ soit inversible.

Q24. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q25. *Application* : Prouver que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique et diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III – Dimension 2

Q26. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont même trace et même déterminant si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

Q27. Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant le même trace et même déterminant. Justifier que si $\operatorname{tr}(A)^2\neq 4\det(A)$, alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q28. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais pas semblables à $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Q29. Donner alors une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie IV – Dimension 3

Q30. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique ont la même trace et le même déterminant. La réciproque est-elle vraie ?

Dans la suite, on considère A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique.

On appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

On appelle m la plus grande multiplicité dans le polynôme caractéristique de A (donc de u), et λ_m une valeur propre de A (donc de u) de multiplicité m.

Q31. Montrer que $m \in \{1, 2, 3\}$.

Q32. Prouver que si $m = 1$, alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q33. Prouver que si $m \neq 1$, alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}$ et que λ_m est unique.

☺ *On pourra utiliser directement le fait que tout polynôme réel de degré 3 admet au moins une racine réelle.*

Dans les questions **Q34** et **Q35**, on suppose que $m \neq 1$ et on pose :

$$F = \ker(A - \lambda_m I_3) = \ker\left(u - \lambda_m id_{\mathbb{R}^3}\right) \text{ et } r = rg\,(A - \lambda_m I_3) = rg\left(u - \lambda_m id_{\mathbb{R}^3}\right).$$

Q34. Dans cette question, on suppose que $m = 2$.

a. Prouver que $r = 1$ ou 2 et que A est diagonalisable si et seulement si $r = 1$.

b. Prouver que $\ker(A - \lambda_m I_3)^2 \oplus \ker(A - \mu I_3) = \mathbb{R}^3$ où μ est la seconde valeur propre de A.

c. Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\begin{pmatrix} \lambda_m & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda_m & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha = 0$ si et seulement si $r = 1$.

d. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $rg\,(B - \lambda_m I_3) = r$.

Q35. Dans cette question, on suppose que $m = 3$.

a. Prouver que $r = 0, 1$ ou 2. Que dire de A si $r = 0$?

b. Montrer que $A - \lambda_m I_3$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon, \varepsilon') = (0,0)$, $(0,1)$ ou $(1,1)$.

☺ *On pourra raisonner suivant les valeurs possibles de r.*

c. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $rg\,(B - \lambda_m I_3) = r$.

Q36. Prouver alors que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique et pour tout $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on a $rg\,(A - \lambda I_3) = rg\,(B - \lambda I_3)$.

- FIN DU SUJET -