Concours Blanc de Mathématiques

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Problème 1

Extrait adapté de CCINP 2016 - MP - Math 1

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et en déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$ où γ est une constante réelle (*la constante d'Euler*).

Q2. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^1 sur cet intervalle.

Q3. Montrer que Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la suite de ce problème, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. La fonction ψ est appelée fonction Digamma.

Q4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{pour } t \in \left]0, n\right] \\ 0 & \text{pour } t \in \left]n, +\infty\right[\end{cases}$$

a. Justifier brièvement que pour tout réel $h<1$, $\ln(1-h)\leq -h$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $0\leq f_n(t)\leq e^{-t}t^{x-1}$.

b. Prouver alors que $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$.

c. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}du=\dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(k+x)}$. Montrer alors que :

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(k+x)}\quad(\textit{formule de Gauss}).$$

d. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{x}{k}\right)=e^{xH_n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\left(1+\dfrac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$ et en déduire que :

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\,e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\quad(\textit{formule de Weierstrass}).$$

Q4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $g_n: x\mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n}$.

Montrer que la fonction $g=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_n$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On exprimera g' comme somme d'une série de fonctions.

Q5. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

Q6. Calculer $\psi(1)$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt$.

Q7. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi(x+1)-\psi(x)$, puis prouver que pour tout entier $n\geq 2$:

$$\psi(n)=-\gamma+H_{n-1}.$$

Q8. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h_n telle que :

$$h_n: t\mapsto\frac{1}{n+t+1}-\frac{1}{n+t+x}.$$

Démontrer que la série $\sum h_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\psi(x+n)-\psi(1+n)\right)$.

Q9. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(f(x+n) - f(1+n)\big) = 0$.

Q10. *Une application en probabilités.*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant.

Si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k. Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au second tirage).

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\big(Y = k\big) = \frac{1}{n}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k}\right).$$

c. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big)$, puis calculer l'espérance $E(Y)$.

Problème 2

Inspiré de l'agrégation Interne de Maths 2021

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$, isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note D la droite dirigée par le vecteur $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation cartésienne $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

Enfin, on donne le théorème de Burnside :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, contenant id_E et stable par produit. Si les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

PARTIE I - *Matrices magiques*

On dit qu'une matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, est magique si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante, autrement dit s'il existe un réel $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\alpha$ et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=\alpha$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne est nulle.

Q11. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note f_i, (*resp.* g_i) la forme linéaire qui à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe la somme des coefficients de la ligne i (*resp.* de la colonne i).

Prouver que la famille $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n)$ est liée, mais que $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_{n-1})$ est libre.

Q12. Montrer que $\mathcal{M}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer sa dimension.

Q13. Prouver que $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0\oplus\mathrm{Vect}(I_n)$ ($\mathcal{M}$ est donc aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et en déduire sa dimension.

Q14. Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, alors $M\in\mathcal{M}$ si et seulement si H et D sont stables par m.

PARTIE II - *Matrices de permutation*

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ (bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$).

On rappelle que la composée de deux permutations de $[\![1,n]\!]$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, et donc si $\sigma\in S_n$, alors $\sigma^k\in S_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Pour toute permutation $\sigma\in S_n$, on appelle p_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que $p_\sigma(e_j)=e_{\sigma(j)}$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ et on note $P_\sigma=M_{\mathcal{B}_c}(p_\sigma)$ la matrice de p_σ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$. Les matrices de ce type sont appelées matrices de permutation.

Q15. Prouver que pour toutes permutations $\sigma,\sigma'\in S_n$, $p_{\sigma\circ\sigma'}=p_\sigma\circ p_{\sigma'}$ (et donc $P_{\sigma\circ\sigma'}=P_\sigma P_{\sigma'}$).

Q16. Démontrer que pour toute permutation $\sigma\in S_n$ il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k=id$.

Q17. Soit $\sigma\in S_n$. Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1}=P_{\sigma^{-1}}=P_\sigma^{\top}$.

Q18. Soit $\sigma\in S_n$. Prouver que P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q19. Soit $\sigma\in S_n$. Prouver que P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si c'est une matrice de symétrie.

Q20. Soit M une matrice de symétrie. On veut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit semblable à une matrice de permutation.

(a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On suppose qu'il existe $\sigma \in S_n$ telle que M est semblable à P_σ. Justifier que $\sigma^2 = id_{[\![1,n]\!]}$.

Montrer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_q\right)$$

avec $q \in [\![0,n]\!]$.

En déduire que $\dim(M + I_n) \leq \dim(M - I_n)$.

(c) Prouver que si $\dim(M + I_n) \leq \dim(M - I_n)$, alors M est semblable à une matrice de permutation et conclure.

Q21. Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on note :

- $\tau_{i,j}$ la permutation de $[\![1,n]\!]$ qui intervertit i et j et laisse invariant les autres éléments de $[\![1,n]\!]$, soit $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et $\tau_{i,j}(k) = k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i, j\}$;
- c_i la permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$c_i(k) = \begin{cases} k+i & \text{si } k \leq n-i \\ k+i-n & \text{si } k > n-i \end{cases}$$

On veut prouver que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n sont $\{0\}$, $\mathbb{C}^n$, la droite D et l'hyperplan H (définis plus haut).

Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les endomorphismes p_σ, quand σ décrit S_n, distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$.

On rappelle que $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ et $D = \mathrm{Vect}(u)$.

(a) Prouver que D et H sont stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n.

(b) Montrer que s'il existe deux entiers distincts de $[\![1,n]\!]$, i et j, tels que $e_i - e_j \in F$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_i - e_k \in F$.

(c) Prouver que si $u \in F$, alors $F = D$.

☺ *Pour* $x \in F$, *évaluer* $p_{\tau_{i,j}}(x) - x$.

(d) Prouver que si $u \notin F$, alors $F = H$.

☺ *Pour* $x \in F$, *évaluer* $\sum_{i=1}^{n} p_{c_i}(x)$.

(e) Conclure.

Partie III - *Matrices magiques et matrices de permutation*

Le but de cette partie est de prouver que $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}\left(P_\sigma, \sigma \in S_n\right)$.

Q22. Prouver que $\mathrm{Vect}\left(P_\sigma, \sigma \in S_n\right) \subset \mathcal{M}$.

Q23. Pour $\sigma \in S_n$, on note $\tilde{p}_\sigma$ l' endomorphisme induit par p_σ sur H.

Démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme :

$$f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \tilde{p}_{\sigma_j}$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ et $\sigma_j \in S_n$.

On utilisera le théorème de Burnside donné dans l'introduction de ce problème.

Q24. Soit $M \in \mathcal{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M. On appelle φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.

Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_N \in S_n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que :

$$m = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{\sigma_j} + \alpha\varphi .$$

☺ *On pourra commencer par justifier que* $\mathbb{C}^n = H \oplus D$.

Q25. Etablir un lien entre l'endomorphisme φ et $\sum_{\sigma \in S_n} p_\sigma$, puis conclure.

Fin de l'énoncé