Corrigé du Concours Blanc

Problème 1

Q1. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$. On a :

$$u_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et la série positive $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge (car elle est proportionnelle à une série de Riemann convergente), et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on a avec un télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln k - \ln(k-1)\right) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln n - \ln 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1\right) = \ln n - H_n + 1.$$

Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite $(H_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge e si on note g sa limite, on obtient bien :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$$

Q2. Posons $f(x,t) = e^{-t} t^{x-1}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions).
- De plus, toujours à $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé :
  - $f(x,t) = e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable en 0^+ (car $x-1 > -1$) donc, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0^+ ;
  - $f(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (par croissances comparées) et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$.

  Ainsi, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$).

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\mapsto f(x,t)=\dfrac{e^{-t}}{t}e^{(\ln t)x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car proportionnelle à une fonction exponentielle, avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x,t)=(\ln t)\,e^{-t}t^{x-1}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions).
- Pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $a\le 1\le b$ et tout $(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\ln t\right|e^{-t}t^{x-1}\le\varphi(t)=\begin{cases}\left|\ln t\right|e^{-t}t^{a-1} & \text{pour } t\le 1\\ \left|\ln t\right|e^{-t}t^{b-1} & \text{pour } t\ge 1\end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

  - $\varphi(t)t^{-\left(\frac{a}{2}-1\right)}=\left|\ln t\right|e^{-t}t^{\frac{a}{2}}\xrightarrow[t\to 0]{}0$ par croissances comparées (avec $\dfrac{a}{2}>0$ et $\lim\limits_{t\to 0}e^{-t}=1$), donc $\varphi(t)=\underset{t\to 0}{o}(t^{\frac{a}{2}-1})$ et, comme l'intégrale de Riemann $\int_0 t^{\frac{a}{2}-1}dt$ converge (car $\dfrac{a}{2}-1>-1$), la fonction φ est intégrable en 0^+ ;
  - $t^2\varphi(t)=\left(\left|\ln t\right|e^{-t/2}\right)\left(e^{-t/2}t^{b+2}\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ par croissances comparées (deux fois), soit $\varphi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc, φ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Toutes les hypothèses du théorème de classe C^1 pour les intégrales à paramètre sont ainsi réunies pour conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et de classe } C^1 \text{ sur cet intervalle.}}$$

On a de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma'(t)=\int_0^{+\infty}(\ln t)\,e^{-t}t^{x-1}dt$.

Q3. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (on l'a vu plus haut) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\ge 0.$$

De plus, si on a avait $\Gamma(x)=0$, alors la fonction positive et continue $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ serait nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas, donc $\Gamma(x)\ne 0$ et ainsi, $\Gamma(x)>0$ et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q4. (a) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa courbe représentative est en dessous de la tangente au point d'abscisse 1, qui admet pour équation $y = x-1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln x \le x-1$. En posant $h = 1-x$, on obtient pour tout réel $h<1$:

$$\boxed{\ln(1-h) \le -h}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a (avec $f_n(n)=0$) :

- si $t \in [n, +\infty[$, $f_n(t) = 0$ donc $0 \le f_n(t) \le e^{-t}t^{x-1}$;
- si $t \in]0, n[$, $\frac{t}{n} < 1$, donc $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le -\frac{t}{n}$, ce qui donne :

$$0 < 1-\frac{t}{n} \le e^{-\frac{t}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le (e^{-\frac{t}{n}})^n = e^{-t}.$$

Comme $t^{x-1} > 0$, on a bien à nouveau, $0 \le f_n(t) \le e^{-t}t^{x-1}$.

Ainsi on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{0 \le f_n(t) \le e^{-t}t^{x-1}}$$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et à partir d'un certain rang ($n \ge t$), on a :

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} = e^{n\left(-\frac{t}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1} = e^{-t+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}t^{x-1}$$

  donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$ et ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu dans la question **Q2**) ;
- d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| \le e^{-t}t^{x-1}$ et la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (toujours d'après la question **Q2**).

Avec le théorème de convergence dominée, on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$, donc :

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt}$$

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en posant le changement de variable $u=\dfrac{t}{n}$, on a :

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\int_0^1(1-u)^n\, n^{x-1}u^{x-1}n\,du=n^x\int_0^1(1-u)^n\,u^{x-1}du\,.$$

Avec le résultat admis, on obtient :

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=n^x\,\frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(k+x)}\,.$$

Et d'après la question précédente :

$$\boxed{\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(k+x)}}$$

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]=e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{xH_n}e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{xH_n}e^{-xH_n}\,.$$

Soit :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]}$$

On a de plus pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+x}{k}\right)=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(k+x)\,.$$

Comme pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)>0$, on a $\Gamma(x)\neq0$ et on a aussi $\dfrac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(k+x)}\neq0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc on peut reformuler le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(k+x)}{n^x n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{n^x n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right).$$

Soit, avec ce qui précède :

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^x}e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]=x\lim_{n\to+\infty}e^{x(H_n-\ln n)}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

Or, d'après la question **Q1**, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(H_n-\ln n\right)=\gamma$, donc par continuité de $h\mapsto e^{xh}$ sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{x(H_n-\ln n)}=e^{\gamma x}$ et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)}=x\,e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]}$$

Q4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x\mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}$, et la série négative $\sum\left(-\frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}\right)$ converge (car elle est proportionnelle à une série de Riemann convergente), donc $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ ($g=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n$ est bien définie).
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions, avec $g_n' : x\mapsto \frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}=-\frac{x}{n(x+n)}$.
- Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, tout $x\in\left]0,a\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left|g_n'(x)\right|=\frac{x}{n(x+n)}\le\frac{a}{n^2}$, et la série $\sum\frac{a}{n^2}$ converge (car elle est proportionnelle à une série de Riemann convergente), donc $\sum g_n'$ converge normalement (grâce à l'hypothèse de domination), donc converge uniformément sur $\left]0,a\right]$.

Alors, $g=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n$ est de classe C^1 sur $\left]0,a\right]$, avec pour tout $x\in\left]0,a\right]$:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)}.$$

Comme $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}\left]0,a\right]=\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que :

$$\boxed{g=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n \text{ est bien définie et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } g' : x\mapsto-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)}.}$$

Q5. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question **Q3**, $\Gamma(x)>0$. De plus, $x>0$, $e^{\gamma x}>0$, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$1+\frac{x}{k}>0 \text{ et } e^{-\frac{x}{k}}>0.$$

On peut donc passer aux ln dans la formule de Weierstrass établie dans la question **Q4.**(d).

Avec la continuité de la fonction ln, ceci donne :

$$\ln\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right) = \ln\left(x e^{\gamma x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right) = \ln x + \gamma x + \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)$$
$$= \ln x + \gamma x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right] = \ln x + \gamma x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + g(x).$$

Or, d'après les questions **Q2** et **Q4**, toutes les fonctions en jeu dans la relation ci-dessus sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et en dérivant cette relation, on obtient :

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}+\gamma+g'(x) = \frac{1}{x}+\gamma-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)} = \frac{1}{x}+\gamma-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right).$$

Et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\psi(x) = -\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)}$$

Q6. Avec la formule ci-dessus, on a par télescopage :

$$\psi(1) = -1-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}\right) = -1-\gamma+1-0.$$

Soit :

$$\boxed{\psi(1) = -\gamma}$$

On a $\psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et d'après la question **Q2**, $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, e^{-t}dt$,

donc $\psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = -\gamma$, soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\, dt = -\gamma}$$

Q7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x+1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc d'après la question **Q5** :

$$\psi(x+1)-\psi(x) = -\frac{1}{x+1}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x+1}\right)-\left[-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1+x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1+x}\right)$$

Et par télescopage, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}}$$

Pour tout entier $n\geq 2$, on a $n\in\mathbb{R}_+^*$, donc on peut encore utiliser la relation de la question **Q5** :

$$\psi(n)=-\frac{1}{n}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right).$$

Et pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right)&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+n}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+N}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\left(\sum_{k=1}^{n+N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n+N}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=H_N-H_{n+N}+H_n\end{aligned}$$

Alors, avec la question **Q1** :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right)&=\left(\ln N+\gamma+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\right)-\left(\ln(n+N)+\gamma+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\right)+H_n\\&=\ln\left(\frac{N}{n+N}\right)+\underset{N\to+\infty}{o}(1)+H_n=H_n+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right)=H_n=H_{n-1}+\frac{1}{n}$ et donc :

$$\boxed{\psi(n)=-\gamma+H_{n-1}}$$

Q8. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|h_n(t)|=\left|\frac{1}{n+t+1}-\frac{1}{n+t+x}\right|=\frac{|x-1|}{(n+t+1)(n+t+x)}\leq\frac{|x-1|}{n^2}.$$

La série $\displaystyle\sum\frac{|x-1|}{n^2}$ converge (car elle est proportionnelle à une série de Riemann convergente), donc $\sum h_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum h_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x+n\in\mathbb{R}_+^*$ et $1+n\in\mathbb{R}_+^*$, on peut donc utiliser à nouveau la formule de la question **Q5** :

$$\begin{aligned}\psi(x+n)-\psi(1+n)&=-\frac{1}{x+n}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x+n}\right)-\left[-\frac{1}{n+1}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1+n}\right)\right]\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+n+1}-\frac{1}{k+n+x}\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n}+\sum_{k=1}^{+\infty}h_k(n)\end{aligned}$$

Comme $\sum h_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{t\to+\infty}h_k(t)=0$, on peut conclure que $\lim\limits_{t\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}h_k(t)=0$, et en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}h_k(n)=0.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x+n}=0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\big(\psi(x+n)-\psi(1+n)\big)=0}$$

Q9. *Quelle surprise que les trois conditions données dans l'énoncé…*

D'après **Q6**, **Q7** et **Q8**, ψ (qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles) vérifie les trois conditions de l'énoncé, donc ψ est une solution du problème.

Soient maintenant f et g deux solutions du problème. On a alors :

- $f(1)=g(1)=-\gamma$, donc $(f-g)(1)=0$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x+1)-f(x)=g(x+1)-g(x)=\frac{1}{x}$, donc $(f-g)(x+1)=(f-g)(x)$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(x+n)-f(1+n)\big)=\lim\limits_{n\to+\infty}\big(g(x+n)-g(1+n)\big)=0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\big((f-g)(x+n)-(f-g)(1+n)\big)=0.$$

Ainsi, si on pose $\delta=f-g$, la fonction δ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles et vérifie :

(i) $\delta(1)=0$;

(ii) pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\delta(x+1)=\delta(x)$;

(iii) pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\delta(x+n)-\delta(1+n)\big)=0$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a $\delta(x+0)=\delta(x)$ et si pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\delta(x+n)=\delta(x)$, alors avec la relation (ii), on a $\delta(x+n+1)=\delta(x+n)=\delta(x)$. Ceci prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\delta(x+n)=\delta(x).$$

Avec (i), on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta(1+n) = \delta(1) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta(x+n) - \delta(1+n) = \delta(x) - 0 = \delta(x).$$

Et avec (iii), on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\delta(x+n) - \delta(1+n)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \delta(x) = 0$, soit :

$$\delta(x) = 0.$$

Ainsi, $\delta = f - g = 0$, donc $f = g$ et le problème possède au plus une solution.

Finalement, la fonction ψ est une solution du problème qui possède au plus une solution, donc :

$$\boxed{\text{La seule fonction définie sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ à valeurs réelles et vérifiant les trois conditions données est } \psi.}$$

Q10. *Une application en probabilités.*

a. Au premier tirage, il y a n boules numérotées de 1 à n et équiprobables dans l'urne. On a donc :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.}$$

L'espérance de X (qui existe car $X(\Omega)$ est fini) est donnée par :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

b. On a aussi $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car à l'issue du premier tirage on ne rajoute pas de boule portant un nouveau numéro. De plus, si on a tiré la boule ℓ au premier tirage, on effectue le second tirage avec $n+\ell$ dan l'urne dont $\ell+1$ boules numérotées ℓ. Alors :

$$P_{(X=\ell)}(Y = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+\ell} & \text{si } \ell \neq k \\[2mm] \dfrac{\ell+1}{n+\ell} & \text{si } \ell = k \end{cases}$$

La famille $\left((X = \ell)\right)_{\ell \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{n} P(X = \ell) P_{(X=\ell)}(Y = k) = \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n+\ell} + \frac{1}{n} \frac{k+1}{n+k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n+\ell} + \frac{1}{n} \frac{k}{n+k}.$$

Ainsi :

$$\boxed{Y(\Omega)=[\![1,n]\!] \text{ et pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{n+\ell}+\frac{k}{n+k}\right).}$$

D'après la question **Q7**, on a (avec $n+1\geq 2$ et $2n+1\geq 2$), $\psi(n+1)=-\gamma+H_n$ et $\psi(2n+1)=-\gamma+H_{2n}$, donc, avec $i=n+\ell$:

$$\psi(2n+1)-\psi(n+1)=H_{2n}-H_n=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{n+\ell}$$

Ainsi, on a bien pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)}$$

c. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)}&=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{k}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{n+k-n}{n+k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-1+\frac{n}{n+k}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k-n+n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}-n+n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\frac{n+1}{2}-n+n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1-n}{2}+n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

Or, on a vu que $\psi(2n+1)-\psi(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)}=\frac{1-n}{2}+n\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{n}kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)\\&=\frac{1}{n}\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)}\\&=\frac{1}{n}\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1-n}{2}+n\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big)\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(Y)=\frac{3n+1}{2}\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big)+\frac{1-n}{2}}$$

Problème 2

Q11. Soit $A=(a_{i,j})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$f_i(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} \quad \text{et} \quad g_j(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\ .$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{1\le i,j\le n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}g_j(A)\,.$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n}f_i=\sum_{j=1}^{n}g_j$, soit $\sum_{i=1}^{n}f_i-\sum_{j=1}^{n}g_j=0$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La famille } (f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n) \text{ est liée.}}$$

Soit maintenant $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_{n-1})\in\mathbb{C}^{2n-1}$ tel que $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n+\mu_1 g_1+\dots+\mu_{n-1}g_{n-1}=0$, soit pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\lambda_1 f_1(M)+\dots+\lambda_n f_n(M)+\mu_1 g_1(M)+\dots+\mu_{n-1}g_{n-1}(M)=0\,.$$

Pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, prenons $M=E_{i,j}$ la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où le 1 est en position i,j. On a pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f_k(E_{i,j})=\delta_{k,i}$ et $g_k(E_{i,j})=\delta_{k,j}$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(E_{i,j})+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k g_k(E_{i,j})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{k,i}+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k\delta_{k,j}=\lambda_i+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k\delta_{k,j}=0\,.$$

Si $j=n$, on obtient $\lambda_i=0$ et si $j<n$, on obtient $\lambda_i+\mu_j=0$, donc $\mu_j=0$.

Ainsi, $\lambda_1=\dots=\lambda_n=\mu_1=\dots=\mu_{n-1}=0$ et donc :

$$\boxed{\text{La famille } (f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_{n-1}) \text{ est libre.}}$$

Q12. On a :

$$\mathcal{M}_0=\left\{A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=f_i(A)=0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=g_j(A)=0\right\}.$$

Soit :

$$\mathcal{M}_0=\left(\bigcap_{1\le i\le n}\ker f_i\right)\cap\left(\bigcap_{1\le j\le n}\ker g_j\right).$$

Ainsi, $\mathcal{M}_0$ est une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc :

$$\boxed{\mathcal{M}_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,.}$$

On a :

$$A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=0\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\begin{cases}\displaystyle a_{i,n}=-\sum_{j=1}^{n-1}a_{i,j}\\ \displaystyle a_{n,j}=-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i,j}\end{cases}$$

Avec, en particulier :

$$a_{n,n}=-\sum_{j=1}^{n-1}a_{n,j}=-\sum_{j=1}^{n-1}\left(-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i,j}\right)=\sum_{1\le i,j\le n-1}a_{i,j}\ .$$

Donc :

$$A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_0 \quad\Leftrightarrow\quad A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}a_{1,j}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}a_{n-1,j}\\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_{i,1} & \cdots & -\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_{i,n-1} & \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n-1}a_{i,j}\end{pmatrix}.$$

Soit, toujours en notant $\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_0 \quad\Leftrightarrow\quad A=\sum_{1\le i,j\le n-1}a_{i,j}\left(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}\right).$$

Ainsi, la famille $\left(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}\right)_{1\le i,j\le n-1}$ est génératrice de $\mathcal{M}_0$.

De plus, le coefficient en position i,j de $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n-1}a_{i,j}\left(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}\right)$ est $a_{i,j}$, donc si on a $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n-1}a_{i,j}\left(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}\right)=0_n$, alors $a_{i,j}=0$ pour tous $i,j\in[\![1,n-1]\!]$, et donc la famille $\left(E_{i,j}-E_{i,n}-E_{n,j}+E_{n,n}\right)_{1\le i,j\le n-1}$ est libre. Cette famille forme alors une base de $\mathcal{M}_0$ et comme elle contient matrices :

$$\boxed{\mathcal{M}_0 \text{ est de dimension } (n-1)^2.}$$

Q13. Par définition de $\mathcal{M}_0$, on a :

$$\mathcal{M}_0\subset\mathcal{M}.$$

Pour $\alpha\in\mathbb{C}$, la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de αI_n est α, donc $\alpha I_n\in\mathcal{M}$. Ainsi :

$$\mathrm{Vect}\left(I_n\right)\subset\mathcal{M}.$$

Soit $M\in\mathcal{M}_0\cap\mathrm{Vect}\left(I_n\right)$. Comme $M\in\mathrm{Vect}\left(I_n\right)$, il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $M=\alpha I_n$ et on vient de voit que la somme des coefficients de chaque ligne de M est alors α. Mais, $M\in\mathcal{M}_0$, donc la somme des coefficients de chaque ligne de M est nulle et ainsi, $\alpha=0$ et donc $M=0_n$. Ceci prouve que :

$$\mathcal{M}_0\cap\mathrm{Vect}\left(I_n\right)=\{0_n\}.$$

Les trois points précédents permettent d'écrire :

$$\underline{\mathcal{M}_0 \oplus \operatorname{Vect}(I_n) \subset \mathcal{M}}.$$

Soit maintenant $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}$.

Notons α la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de A et posons $B = A - \alpha I_n$.

Avec ce qui précède sur αI_n et les notations de la question **Q11**, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$f_i(B) = f_i(A) - f_i(\alpha I_n) = \alpha - \alpha = 0$$
$$g_i(B) = g_i(A) - g_i(\alpha I_n) = \alpha - \alpha = 0$$

Donc, $B \in \mathcal{M}_0$ et ainsi, $A = B + \alpha I_n \in \mathcal{M}_0 \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$. Ceci prouve que :

$$\underline{\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0 \oplus \operatorname{Vect}(I_n)}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \operatorname{Vect}(I_n)}$$

Comme $\dim \mathcal{M}_0 = (n-1)^2$ (d'après la question précédente) et $\dim \operatorname{Vect}(I_n)$, donc :

$$\boxed{\dim \mathcal{M} = (n-1)^2 + 1}$$

Q14. Soit m est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice $M = (\alpha_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

On veut montrer que :

$$M \in \mathcal{M} \iff (H \text{ et } D \text{ sont stables par } m).$$

($\Rightarrow$) On suppose que $M \in \mathcal{M}$. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} = \alpha.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

On a $m(x) = (y_1, \dots, y_n)$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j$.

- Si $x \in H$, on a $x_1 + \dots + x_n = 0$ et :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha x_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j = 0.$$

  Ainsi, $m(x) \in H$ et donc, <u>H est stable par m</u>.

- Si $x \in D$, alors $x_1 = ... = x_n$ et :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \right) x_1 = \alpha x_1 .$$

  On a alors $y_1 = ... = y_n$, donc $m(x) \in D$ et ainsi, <u>D est stable par m</u>.

($\Leftarrow$) On suppose que *H* et *D* sont stables par *m*.

- Comme $D = \text{Vect}(u)$ est stable par *m*, on a $m(u) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1,j}, ..., \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} \right) \in D$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1,j} = ... = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} .$$

  En posant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1,j} = \alpha$, on a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = \alpha$.

  De plus, $m(u) = \alpha u = \sum_{i=1}^{n} \alpha e_i$.

- Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $e_j - e_i \in H$, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(e_j - e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} e_j - \sum_{i=1}^{n} e_i = n\, e_j - u \in H .$$

  Comme *H* est stable par *m*, on a :

$$m(n\, e_j - u) = n\, m(e_j) - m(u) = n \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(n\alpha_{i,j} - \alpha \right) e_i \in H .$$

  Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(n\alpha_{i,j} - \alpha \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} - n\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = \alpha .$$

  Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = \alpha$.

Finalement, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = \alpha$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = \alpha$, donc $M \in \mathcal{M}$.

En définitive, on a bien :

$$\boxed{M \in \mathcal{M} \iff (H \text{ et } D \text{ sont stables par } m).}$$

<u>Partie II</u> - *Matrices de permutation*

Q15. Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$p_\sigma \circ p_{\sigma'}(e_i) = p_\sigma \left(p_{\sigma'}(e_i) \right) = p_\sigma \left(e_{\sigma'(i)} \right) = e_{\sigma(\sigma'(i))} = e_{\sigma \circ \sigma'(i)} = p_{\sigma \circ \sigma'}(e_i) .$$

Ainsi, $p_\sigma \circ p_{\sigma'}$ et $p_{\sigma\circ\sigma'}$ coïncident sur une base (la base canonique), donc :

$$\boxed{p_{\sigma\circ\sigma'} = p_\sigma \circ p_{\sigma'}}$$

Q16. Soit $\sigma \in S_n$.

La famille $(\sigma^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de S_n (qui est stable par composition). Or, S_n est fini, donc cette famille ne peut pas prendre une infinité de valeurs distinctes et ainsi, au moins deux de ses éléments sont égaux. Autrement dit, il existe $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $a<b$ et $\sigma^a = \sigma^b$.

Comme σ est bijective, on a $\sigma^b(\sigma^a)^{-1} = \sigma^{b-a} = id_{[\![1,n]\!]}$, et donc en posant $k = b-a > 0$:

$$\boxed{\text{Il existe } k\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma^k = id.}$$

Q17. Soit $\sigma\in S_n$. D'après **Q15**, on a $p_{\sigma^{-1}} \circ p_\sigma = p_{\sigma^{-1}\circ\sigma} = p_{id_{[\![1,n]\!]}} = id_{\mathbb{C}^n}$, donc $P_{\sigma^{-1}}P_\sigma = I_n$ et ainsi, P_σ est inversible et $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

De plus, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $p_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$, donc $P_\sigma = M_{\mathscr{B}_c}(p_\sigma) = \left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1\le i,j\le n}$. Alors, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, si $\left[P_\sigma P_\sigma^\top\right]_{i,j}$ désigne le coefficient en position $i\times j$ de la matrice $P_\sigma P_\sigma^\top$, on a :

$$\left[P_\sigma P_\sigma^\top\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma(i),k}\delta_{\sigma(j),k} = \delta_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

Et comme σ est bijective, donc injective, on a $\sigma(i)=\sigma(j)$ si et seulement si $i=j$, donc $\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} = \delta_{i,j}$ et ainsi, $P_\sigma P_\sigma^\top = I_n$. Finalement, on a bien :

$$\boxed{P_\sigma \text{ est inversible et } P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^\top.}$$

Q18. Soit $\sigma\in S_n$.

On a $\sigma^0 = id_{[\![1,n]\!]}$, donc $p_{\sigma^0} = p_{id_{[\![1,n]\!]}} = id_{\mathbb{C}^n} = p_\sigma^0$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, si $p_{\sigma^k} = p_\sigma^k$, alors d'après la question **Q15**, on a $p_{\sigma^{k+1}} = p_{\sigma^k\circ\sigma} = p_{\sigma^k}\circ p_\sigma = p_\sigma^{k+1}$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $p_{\sigma^k} = p_\sigma^k$ et donc que $P_{\sigma^k} = P_\sigma^k$.

Or, on a vu qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = id_{[\![1,n]\!]}$, ce qui donne :

$$P_\sigma^k = P_{\sigma^k} = P_{id_{[\![1,n]\!]}} = I_n.$$

Le polynôme X^k-1 est donc annulateur de P_σ et comme ce polynôme est scindé à racines simples (les racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité) dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Q19. Soit $\sigma \in S_n$. Remarquons que $P_\sigma = \left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme les symétries de $\mathbb{R}^n$ sont diagonalisables, si P_σ c'est une matrice de symétrie (de $\mathbb{R}^n$ car $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), alors elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $Sp(P_\sigma) \subset \mathbb{R}$.

On a vu qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^k - 1$ est annulateur de P_σ, et donc le spectre de P_σ est inclus dans l'ensemble des les racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Or, les seules racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité réelles sont 1 et éventuellement – 1. On a donc $Sp(P_\sigma) \subset \{-1,1\}$. Comme P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P_\sigma = Q^{-1}DQ$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1 ou – 1. On a donc $D^2 = I_n$, donc $P_\sigma^2 = I_n$ et ainsi, P_σ est une matrice de symétrie.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si c'est une matrice de symétrie.}}$$

Q20. (a) Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = I_2$, donc A est une matrice de symétrie : elle est donc diagonalisable avec $Sp(A) \subset \{-1,1\}$.

De plus, si A ne possédait qu'une seule valeur propre elle serait semblable à une matrice scalaire, donc scalaire elle-même. Ce n'est pas le cas, donc $Sp(A) = \{-1,1\}$ et ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Autre version : On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

Ainsi, $Sp(A) = \{-1,1\}$ et χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. Ceci permet de conclure que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On suppose qu'il existe $\sigma \in S_n$ telle que M est semblable à P_σ, soit $P_\sigma = Q^{-1}MQ$. Comme M est une matrice de symétrie, on a $M^2 = I_n$, donc $P_\sigma^2 = \left(Q^{-1}MQ\right)^2 = Q^{-1}M^2Q = Q^{-1}Q = I_n$. Or, d'après **Q15**, $P_\sigma^2 = P_{\sigma^2}$, donc $P_{\sigma^2} = I_n$ et ainsi :

$$\boxed{\sigma^2 = id_{[\![1,n]\!]}}$$

Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si $\sigma(i) = j \neq i$, on a $\sigma(j) = \sigma(\sigma(i)) = \sigma^2(i) = i$ et donc $\sigma(j) \neq j$.

Ainsi, le cardinal de $\{i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i\}$ est pair et on peut écrire :

$$\{i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i\} = \{i_1, j_1, \dots, i_r, j_r\}$$

avec $\sigma(i_\ell) = j_\ell$ pour tout $\ell \in [\![1,r]\!]$.

Comme $[\![1,n]\!] = \{i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i\} \cup \{k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) = k\}$ et l'union est disjointe, on peut écrire, en posant $q = n - 2r$:

$$\{k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) = k\} = \{k_1, \dots, k_q\}.$$

Alors, la famille $\left(e_{i_1}, e_{j_1}, \dots, e_{i_r}, e_{j_r}, e_{k_1}, \dots, e_{k_q}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et dans cette base la matrice de p_σ est $\Delta = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_q\right)$ où le bloc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ apparait r fois. Ainsi, P_σ est semblable à Δ (car c'est la matrice de p_σ dans la base canonique) et comme M est semblable à P_σ, la transitivité de la relation de similitude matricielle permet de conclure que :

$$\boxed{M \text{ est semblable à } diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_q\right).}$$

En posant à nouveau $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = X^2 - 1$ et :

$$\chi_M = \chi_\Delta = (\chi_A)^r \chi_{I_q} = \chi_A = \left(X^2 - 1\right)^r (X-1)^q = (X+1)^r (X-1)^r (X-1)^q = (X+1)^r (X-1)^{r+q}.$$

Comme M est diagonalisable car c'est une matrice de symétrie, on a :

$$\dim(M - I_n) = r + q$$
$$\dim(M + I_n) = r$$

Et comme $q \geq 0$, on obtient bien :

$$\boxed{\dim(M + I_n) \leq \dim(M - I_n)}$$

(c) On suppose que $\dim(M + I_n) \leq \dim(M - I_n)$.

Remarquons que M est diagonalisable et l'inégalité implique que 1 est forcément valeur propre de M. Si c'est la seule alors $M = I_n = P_{id_{[\![1,n]\!]}}$ et on a le résultat voulu.

On suppose maintenant que 1 n'est pas la seule valeur propre de M, et donc $Sp(M) = \{-1, 1\}$. Posons alors :

$$\begin{cases} r = \dim(M + I_n) \geq 1 \\ q = \dim(M - I_n) - \dim(M + I_n) \geq 0 \end{cases}$$

Alors, la matrice M (qui est diagonalisable) est semblable à $diag\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, I_q\right)$ (où le – 1 apparait r fois et le 1 apparait $r+q$ fois).

On a vu dans la question (a) que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, donc il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ tell que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q$ et en posant $R = diag\left(Q, \dots, Q, I_q\right)$, on a $R \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $R^{-1} = diag\left(Q^{-1}, \dots, Q^{-1}, I_q\right)$ et, avec le produit par blocs :

$$R^{-1} diag\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_q\right) R = diag\left(Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q, \dots, Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q, I_q\right).$$

Soit :

$$R^{-1} diag\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_q\right) R = diag\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, I_q\right)$$

Enfin, $\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_q\right) = P_\sigma$ où σ est la permutation de $[\![1, n]\!]$ qui échange k et $k+1$ pour tout $k \in \{1, 3, \dots, 2r-1\}$ et laisse invariants les entiers entre $2r+1$ et $n = 2r+q$.

Ainsi, M est semblable à $diag\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, I_q\right)$ qui est elle-même semblable à P_σ, donc :

$$\boxed{M \text{ est semblable à une matrice de permutation.}}$$

Finalement, si M est semblable à une matrice de permutation, alors d'après la question (b), on a $\dim\left(M + I_n\right) \leq \dim\left(M - I_n\right)$ et on vient d'établir la réciproque, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} M \text{ est semblable à une matrice de permutation} \\ \text{si et seulement si } \dim\left(M + I_n\right) \leq \dim\left(M - I_n\right). \end{array}}$$

Q21. (a) Soit $\sigma \in S_n$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$p_\sigma(x) = p_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(j)} e_j .$$

en posant le changement d'indice $j = \sigma(i)$, soit $i = \sigma^{-1}(j)$.

- Pour $x = u = \sum_{i=1}^{n} e_i$, ceci donne $p_\sigma(u) = \sum_{j=1}^{n} e_j$ (avec $x_{\sigma^{-1}(j)} = 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$), soit $p_\sigma(u) = u$ et donc D est stable par p_σ.

- Pour $x \in H$, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, donc toujours avec le changement d'indice $j = \sigma(i)$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(j)} = 0$ et donc $p_\sigma(x) \in H$. Ainsi, H est stable par p_σ.

Finalement, comme σ était quelconque dans S_n :

$$\boxed{D \text{ et } H \text{ sont stables par tous les endomorphismes } p_\sigma \text{ quand } \sigma \text{ décrit } S_n.}$$

(b) On suppose qu'il existe deux entiers i et j distincts de $[\![1,n]\!]$ tels que $e_i - e_j \in F$.

Comme le sous-espace F est stable par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n, il est stable par $p_{\tau_{k,j}}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i, j\}$ et donc :

$$p_{\tau_{k,j}}(e_i - e_j) = p_{\tau_{k,j}}(e_i) - p_{\tau_{k,j}}(e_j) = e_{\tau_{k,j}(i)} - e_{\tau_{k,j}(j)} \in F.$$

Comme $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i, j\}$, on a $\tau_{k,j}(i) = i$ et $\tau_{k,j}(j) = k$, donc $e_{\tau_{k,j}(i)} - e_{\tau_{k,j}(j)} = e_i - e_k \in F$.

On a aussi $e_i - e_i = 0 \in F$ et $e_i - e_j \in F$ par hypothèse, donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ e_i - e_k \in F.}$$

(c) On suppose ici que $u \in F$.

Comme F est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, on a $D = \operatorname{Vect}(u) \subset F$.

Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in F$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} p_{\tau_{i,j}}(x) - x &= \sum_{k=1}^{n} x_k e_{\tau_{i,j}(k)} - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} x_k e_k + x_i e_j + x_j e_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} x_k e_k - x_i e_i - x_j e_j \\ &= (x_j - x_i)(e_i - e_j) \end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, F est stable par $p_{\tau_{k,j}}$, donc $p_{\tau_{i,j}}(x) \in F$ et ainsi :

$$p_{\tau_{i,j}}(x) - x = (x_j - x_i)(e_i - e_j) \in F.$$

Supposons que $x \notin D$. Alors, x n'est pas colinéaire à u, et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j \neq x_i$. On a alors $x_j - x_i \neq 0$ et :

$$\frac{1}{x_j - x_i}(x_j - x_i)(e_i - e_j) = e_i - e_j \in F.$$

D'après la question précédente, on a alors $e_i - e_k \in F$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(e_i - e_k) = n e_i - \sum_{k=1}^{n} e_k = n e_i - u \in F\,.$$

Comme $u \in F$, on a $e_i = \dfrac{1}{n}(n e_i - u + u) \in F$ et ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i \in F$. Ceci veut dire que $F = \mathbb{C}^n$, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, supposer que $x \notin D$ mène à une absurdité, donc $x \in D$.

On vient donc d'établir que $x \in F$, $x \in D$, donc que $F \subset D$ et comme on a vu que $D \subset F$:

$$\boxed{\text{Si } u \in F\text{, alors } F = D.}$$

(d) On suppose ici que $u \notin F$.

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in F$ non nul. Comme $u \notin F$, x n'est pas colinéaire à u, donc il existe deux entiers $i, j \in [\![1,n]\!]$ distincts tels que $x_i \neq x_j$. On montre alors comme dans la question précédente que $\dfrac{1}{x_j - x_i}\left(p_{\tau_{i,j}}(x) - x\right) = e_i - e_j \in F$.

Alors, d'après la question (b), $e_i - e_k \in F$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, donc :

$$\mathrm{Vect}\left((e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\right) \subset F\,.$$

Si $\sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \lambda_k (e_i - e_k) = 0$ (où les λ_k sont des scalaires), on a $\left(\sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \lambda_k\right) e_i - \sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \lambda_k e_k = 0$.
Comme la famille $(e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre, ceci implique que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, et ainsi, la famille $(e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}$ est libre.
Comme cette famille contient $n-1$ vecteurs, on a :

$$\dim\left[\mathrm{Vect}\left((e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\right)\right] = n-1\,.$$

De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, on a $e_i - e_k \in H$ (car $1 + (-1) = 0$!), donc :

$$\mathrm{Vect}\left((e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\right) \subset H\,.$$

Or, H est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$, donc $\dim H = n-1 = \dim\left[\mathrm{Vect}\left((e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\right)\right]$ et ainsi :

$$\mathrm{Vect}\left((e_i - e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\right) = H\,.$$

On a donc $H \subset F$ et si l'inclusion était stricte, on aurait $\dim H = n-1 < \dim F \leq n$, donc $\dim F = n$ et $F = \mathbb{C}^n$, qui est faux. Ainsi, l'inclusion $H \subset F$ n'est pas stricte, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{Si } u \notin F\text{, alors } F = H.}$$

(e) D'après (a), *D* et *H* sont stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n.

Et si *F* un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, et stable par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n, alors soit $u \in F$ et dans ce cas $F = D$ d'après (c), soit $u \notin F$ et dans ce cas $F = H$ d'après (d).

Ainsi, les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$, distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, et stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n sont *D* et *H*, donc :

> Les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n sont $\{0\}$, $\mathbb{C}^n$, la droite *D* et l'hyperplan *H*.

PARTIE III - *Matrices magiques et matrices de permutation*

Q22. Soit $\sigma \in S_n$. On a vu **Q17** que $P_\sigma = \left(\alpha_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$, avec $\alpha_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Alors :

- pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),j} = 1$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(i),j} = 1$.

Ainsi, la somme des coefficients de P_σ par ligne et par colonne est constante (et vaut toujours 1), donc $P_\sigma \in \mathcal{M}$ pour tout $\sigma \in S_n$.

Comme on vu plus haut que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(P_\sigma, \sigma \in S_n\right) \subset \mathcal{M}}$$

Q23. Pour tout $\sigma \in S_n$, $\tilde{p}_\sigma \in \mathcal{L}(H)$. Posons $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(\tilde{p}_\sigma \in \mathcal{L}(H), \sigma \in S_n\right)$.

Par définition, $\mathcal{A}$ est un sous espace de $\mathcal{L}(H)$.

On veut prouver que tout endomorphisme *f* de *H* peut s'écrire sous la forme $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \tilde{p}_{\sigma_j}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ et $\sigma_j \in S_n$, ce qui revient à prouver que tout endomorphisme *f* de *H* appartient à $\mathcal{A}$, autrement dit que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$. Pour cela, on veut utiliser le théorème de Burnside : il faut donc réunir les hypothèses sur le sous-espace $\mathcal{A}$, soit prouver que :

(i) $id_H \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par produit (i.e. compsoition ici) ;

(iii) les seuls sous-espaces de *H* stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et *H*.

Prouvons ces trois points.

(i) On a $p_{id_{[\![1,n]\!]}} = id_{\mathbb{C}^n}$, donc $\tilde{p}_{id_{[\![1,n]\!]}} = id_H$ et ainsi :

$$\underline{id_H \in \mathcal{A}}.$$

(ii) Soit $f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \tilde{p}_{\sigma_j}$ et $g = \sum_{j=1}^{N'} \mu_j \tilde{p}_{\sigma'_j}$ deux éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$fg = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \tilde{p}_{\sigma_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{N'} \mu_i \tilde{p}_{\sigma'_i}\right) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N'} \lambda_j \mu_i \tilde{p}_{\sigma_j} \tilde{p}_{\sigma'_i}.$$

Or, pour tout $x \in H$ et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a $\tilde{p}_{\sigma'_i}(x) = p_{\sigma'_i}(x) \in H$, donc, avec la question **Q15**, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{\sigma_j} \tilde{p}_{\sigma'_i}(x) &= \tilde{p}_{\sigma_j}\left(\tilde{p}_{\sigma'_i}(x)\right) = \tilde{p}_{\sigma_j}\left(p_{\sigma'_i}(x)\right) \\ &= p_{\sigma_j}\left(p_{\sigma'_i}(x)\right) = p_{\sigma_j} p_{\sigma'_i}(x) = p_{\sigma_j \circ \sigma'_i}(x) = \tilde{p}_{\sigma_j \circ \sigma'_i}(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $fg = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N'} \lambda_j \mu_i \tilde{p}_{\sigma_j \circ \sigma'_i} \in \mathcal{A}$ et donc :

$$\underline{\mathcal{A} \text{ est stable par produit}}.$$

(iii) Soit F un sous-espace de H stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, donc, entre autres, par tous les endomorphismes $\tilde{p}_\sigma$ quand σ décrit S_n. Autrement dit, pour tout $\sigma \in S_n$ et tout $x \in F$, on a $\tilde{p}_\sigma(x) = p_\sigma(x) \in F$. Donc, F est stable par p_σ. Or, comme F un sous-espace de H, qui est lui-même un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, F est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$.

Ainsi, F est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit S_n, donc F est $\{0\}$, $\mathbb{C}^n$, D ou H. Comme $F \subset H$ et $F \neq \mathbb{C}^n$, et comme $u \notin H$, donc $F \neq D$. Ainsi :

$$\underline{\text{Les seuls sous-espaces de } H \text{ stables par tous les éléments de } \mathcal{A} \text{ sont } \{0\} \text{ et } H}.$$

Les trois hypothèses sont donc vérifiées, donc d'après le théorème de Burnside :

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(\tilde{p}_\sigma \in \mathcal{L}(H), \sigma \in S_n\right) = \mathcal{L}(H)}$$

Q24. On a vu que $u \notin H$, donc $D \cap H = \mathrm{Vect}(u) \cap H = \{0\}$. Comme D est une droite et H est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\mathbb{C}^n = H \oplus D.$$

De plus, si J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1 et φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J, alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\varphi(e_i) = u$, donc :

- $\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) = n\,u$ et $D \subset \ker\left(\varphi - n\, id_{\mathbb{C}^n}\right)$, soit $\varphi(x) = n\,x$ pour tout $x \in D$;

- pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in H$, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, donc :

$$\varphi(x)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)u=0.$$

Soit alors $M\in\mathcal{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

D'après la question **Q14** :

- H est stable par m, donc d'après la question précédente, il existe $N\in\mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C}$ et $\sigma_1,\dots,\sigma_N\in S_n$ tels que $\tilde{m}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\tilde{p}_{\sigma_j}$ où $\tilde{m}$ est l' endomorphisme induit par m sur H, donc pour tout $x\in H$:

$$m(x)=\tilde{m}(x)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\tilde{p}_{\sigma_j}(x)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x)\ ;$$

- D est stable par m, donc il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $x\in D$, $m(x)=\lambda x$.

Soit maintenant $x\in\mathbb{C}^n$.

D'après ce qui précède, il existe $(x_H,x_D)\in H\times D$ tel que $x=x_H+x_D$ et :

$$m(x)=m(x_H)+m(x_D)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x_H)+\lambda x_D.$$

Par ailleurs, on a vu dans la question **Q21.**(a) que pour tout $\sigma\in S_n$, $p_\sigma(u)=u$ donc en posant $x_D=ku$ avec $k\in\mathbb{C}$, on a $p_\sigma(x_D)=p_\sigma(ku)=k\,p_\sigma(u)=ku=x_D$ et :

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x_D)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j x_D=\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)x_D.$$

De plus, $\varphi(x_H)=0$ et $\varphi(x_D)=n\,x_D$, donc $\varphi(x)=\varphi(x_H)+\varphi(x_D)=n\,x_D$, soit $x_D=\frac{1}{n}\varphi(x)$ et :

$$\begin{aligned}m(x)&=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x_H)+\lambda x_D+\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x_D)-\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)x_D\\&=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left[p_{\sigma_j}(x_H)+p_{\sigma_j}(x_D)\right]+\left(\lambda-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)x_D\\&=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}(x)+\left(\lambda-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)\frac{1}{n}\varphi(x)=\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}+\alpha\varphi\right)(x)\end{aligned}$$

avec $\alpha=\left(\lambda-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)\frac{1}{n}$.

Remarquons que λ et les λ_j sont des scalaires indépendants de x, donc α l'est aussi et la relation ci-dessus étant vraie pour tout $x\in\mathbb{C}^n$:

$$\boxed{\text{Il existe bien } N\in\mathbb{N}^*,\ \lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C},\ \sigma_1,\dots,\sigma_N\in S_n \text{ et } \alpha\in\mathbb{C} \text{ tels que } m=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j p_{\sigma_j}+\alpha\varphi.}$$

Q25. L'ensemble S_n contient $n!$ permutations, donc il y a $n!$ matrices du type P_σ

Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ donnés.

Pour $\sigma \in S_n$, la matrice P_σ contient un 1 en position (i, j) si et seulement si $p_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = e_i$, donc si et seulement si $\sigma(j) = i$. Toutes les autres matrices de type P_σ contiennent 0 en position (i, j). Or, pour construire une telle permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(j) = i$, il faut et il suffit de donner les images de tous les entiers de $[\![1,n]\!]$ distincts de *j* (car l'image de *j* étant *i*) et ces images ne doivent pas être *i*, donc il faut et il suffit de construire une bijection de $[\![1,n]\!] \backslash \{j\}$ (qui contient $n-1$ éléments) dans $[\![1,n]\!] \backslash \{i\}$ (qui contient aussi $n-1$ éléments). Il y a $(n-1)!$ telles bijections possibles.

Ainsi il y a $(n-1)!$ permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(j) = i$, donc $(n-1)!$ matrices du type P_σ qui contiennent 1 en position (i, j) et toutes les autres contiennent 0 en position (i, j).

Ceci étant vrai pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a, en notant $P = \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma = (\rho_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$\rho_{i,j} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(j)=i} 1 = (n-1)!.$$

Ainsi, $P = (n-1)!J$ et donc :

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} p_\sigma = (n-1)!\,\varphi}$$

Ceci prouve que $\varphi \in \mathrm{Vect}(p_\sigma, \sigma \in S_n)$ et donc, d'après la question précédente, pour toute $M \in \mathcal{M}$, $m = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{\sigma_j} + \alpha\varphi \in \mathrm{Vect}(p_\sigma, \sigma \in S_n)$, donc $M \in \mathrm{Vect}(P_\sigma, \sigma \in S_n)$ et ainsi :

$$\underline{\mathcal{M} \subset \mathrm{Vect}(P_\sigma, \sigma \in S_n).}$$

Comme on avait établi que $\mathrm{Vect}(P_\sigma, \sigma \in S_n) \subset \mathcal{M}$ dans la question **Q22**, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(P_\sigma, \sigma \in S_n)}$$

Remarque : On aurait pu aussi utiliser (en justifiant) le fait que $J = \sum_{i=1}^{n} P_{c_i}$ où les c_i sont définis **Q21** (et dont on ne s'est finalement pas servi jusqu'alors…)