Corrigé du DM n° 8

A - Une propriété de Perron-Frobenius

1) On a $H_n=\left(h_{i,j}^{(n)}\right)_{0\le i,j\le n-1}=\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0\le i,j\le n-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous $i,j\in[\![0,n-1]\!]$:

$$h_{j,i}^{(n)}=\frac{1}{j+i+1}=\frac{1}{i+j+1}=h_{i,j}^{(n)}.$$

Donc, H_n est une matrice symétrique réelle.

De plus, pour tout $X={}^t\left(x_0\ \ x_1\ \cdots\ x_{n-1}\right)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $H_nX={}^t\left(\sum_{j=0}^{n-1}h_{0,j}^{(n)}x_j\ \ \sum_{j=0}^{n-1}h_{1,j}^{(n)}x_j\ \cdots\ \sum_{j=0}^{n-1}h_{n-1,j}^{(n)}x_j\right)$, donc :

$${}^tXH_nX=\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i\sum_{j=0}^{n-1}h_{i,j}^{(n)}x_j\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}h_{i,j}^{(n)}x_ix_j=\sum_{0\le i,j\le n-1}\frac{x_ix_j}{i+j+1}.$$

Or, avec $\tilde{X}:t\mapsto\sum_{k=0}^{n-1}x_kt^k$, polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\left(\tilde{X}(t)\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{n-1}x_it^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}x_jt^j\right)=\sum_{0\le i,j\le n-1}x_ix_jt^{i+j}.$$

Donc :

$$\int_0^1\left(\tilde{X}(t)\right)^2dt=\sum_{0\le i,j\le n-1}x_ix_j\int_0^1t^{i+j}dt=\sum_{0\le i,j\le n-1}\frac{x_ix_j}{i+j+1}={}^tXH_nX.$$

Ainsi, ${}^tXH_nX=\int_0^1\left(\tilde{X}(t)\right)^2dt\ge0$ et comme $\tilde{X}^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,1]$:

$${}^tXH_nX=\int_0^1\left(\tilde{X}(t)\right)^2dt=0\quad\Leftrightarrow\quad\forall\,t\in[0,1],\ \tilde{X}(t)=0.$$

Ainsi, la fonction polynomiale $\tilde{X}$ admet une infinité de racines : elle est donc nulle, ce qui revient à dire que tous ses coefficients sont nuls, donc que $x_0=x_1=\ldots=x_{n-1}=0$, soit $X=0$.

Finalement, pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX\ge0$ avec égalité si et seulement si $X=0$, donc H_n est définie positive et ainsi :

$$\boxed{H_n\text{ est une matrice symétrique réelle, définie positive.}}$$

2) Remarquons déjà que si $\lambda\in Sp(H_n)$ et $X\neq0$ est un vecteur propre associé à λ, on a :

$${}^tXH_nX={}^tX(\lambda X)=\lambda\,{}^tXX=\lambda\|X\|^2>0\quad\Rightarrow\quad\lambda>0\ \text{ (car }\|X\|^2>0).$$

Donc toutes les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

On note $\mathcal{V}=\ker\left(H_n-\rho_nI_n\right)$ avec $\rho_n=\max\left(Sp(H_n)\right)>0$.

Comme H_n est une matrice symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de H_n. On note λ_i la valeur propre de H_n associée à U_i et on suppose que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \rho_n .$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = x_1 U_1 + \dots + x_n U_n$ et :

$$H_n X = H_n(x_1 U_1 + \dots + x_n U_n) = x_1 H_n U_1 + \dots + x_n H_n U_n = x_1 \lambda_1 U_1 + \dots + x_n \lambda_n U_n .$$

Donc :

$${}^t X H_n X = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

Remarquons qu'alors, comme $\lambda_k \leq \rho_n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^t X H_n X = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \rho_n x_1^2 + \dots + \rho_n x_n^2 = \rho_n (x_1^2 + \dots + x_n^2) = \rho_n \|X\|^2 .$$

- Si $X \in \mathcal{V}$, alors comme on l'a vu plus haut ${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$.
- Si ${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$, soit $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = \rho_n x_1^2 + \dots + \rho_n x_n^2$, alors :

  $$(\rho_n - \lambda_1) x_1^2 + \dots + (\rho_n - \lambda_n) x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_n - \lambda_1) x_1^2 = \dots = (\rho_n - \lambda_n) x_n^2 = 0 .$$

  car $(\rho_n - \lambda_k) x_k^2 \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

  Ceci implique que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq \rho_n$, $x_k^2 = 0$ et donc que $X = x_{n-\alpha} U_{n-\alpha} + \dots + x_n U_n$ avec $\mathcal{V} = \ker(H_n - \rho_n I_n) = \mathrm{Vect}(U_{n-\alpha}, \dots, U_n)$ et ainsi, $X \in \mathcal{V}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{X \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad {}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2}$$

3) On a vu plus haut que :

$${}^t X_0 H_n X_0 = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i + j + 1} \text{ et } {}^t |X_0| H_n |X_0| = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i||x_j|}{i + j + 1} = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i x_j|}{i + j + 1} .$$

Or, pour tous $i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{x_i x_j}{i + j + 1} \leq \dfrac{|x_i x_j|}{i + j + 1}$, donc :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i + j + 1} \leq \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i x_j|}{i + j + 1} .$$

Soit :

$$\boxed{{}^t X_0 H_n X_0 \leq {}^t |X_0| H_n |X_0|}$$

Or, $X_0 \in \mathcal{V}$ donc, d'après la question précédente :

$${}^t X_0 H_n X_0 = \rho_n \|X_0\|^2 .$$

On a vu aussi dans la question précédente que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^t X H_n X \leq \rho_n \|X\|^2$, donc :

$${}^t |X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \| |X_0| \|^2 .$$

Enfin, $\left\| |X_0| \right\|^2 = |x_0|^2 + \ldots + |x_{n-1}|^2 = x_0^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = \|X_0\|^2$, donc :

$$ {}^tX_0 H_n X_0 \le {}^t|X_0| H_n |X_0| \quad \Rightarrow \quad \rho_n \|X_0\|^2 \le {}^t|X_0| H_n |X_0| \le \rho_n \left\| |X_0| \right\|^2 = \rho_n \|X_0\|^2 \quad \Rightarrow \quad {}^t|X_0| H_n |X_0| = \rho_n \left\| |X_0| \right\|^2. $$

Mais alors, avec la réciproque de la question 2, on obtient :

$$\boxed{|X_0| \in \mathcal{V}}$$

4) On a :

$$ H_n|X_0| = {}^t\left(\sum_{j=0}^{n-1} h_{0,j}^{(n)} |x_j| \ \ \sum_{j=0}^{n-1} h_{1,j}^{(n)} |x_j| \ \ \cdots \ \ \sum_{j=0}^{n-1} h_{n-1,j}^{(n)} |x_j| \right) = {}^t\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+1} \ \ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+2} \ \ \cdots \ \ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+n} \right). $$

Donc, si $H_n|X_0|$ possède une coordonnée nulle, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+k} = 0$ et comme tous les termes de la somme sont positifs, ceci implique que pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $\dfrac{|x_j|}{j+k} = 0$, soit $x_j = 0$.

Ainsi, si $H_n|X_0|$ possède une coordonnée nulle, $X_0 = 0$, ce qui est absurde car X_0 est supposé non nul et donc :

$$\boxed{H_n|X_0| \text{ n'a aucune coordonnée nulle.}}$$

On a vu que $|X_0| \in \mathcal{V}$, donc $H_n|X_0| = \rho_n |X_0| = {}^t\left(\rho_n|x_0| \ \ \rho_n|x_1| \ \ \cdots \ \ \rho_n|x_{n-1}| \right)$. Alors, pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $\rho_n|x_j| \ne 0$ et donc $x_j \ne 0$. Ainsi :

$$\boxed{X_0 \text{ n'a aucune coordonnée nulle.}}$$

5) Soient $X, Y \in \mathcal{V}$, non nuls, avec $X = {}^t(x_0 \ \ x_1 \ \ \cdots \ \ x_{n-1})$ et $Y = {}^t(y_0 \ \ y_1 \ \ \cdots \ \ y_{n-1})$.

D'après la question précédente, les coordonnées de X sont non nulles, et donc, entre autres, on a $x_0 \ne 0$.

Comme $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$ Y - \frac{y_0}{x_0} X \in \mathcal{V}. $$

La première coordonnée de ce vecteur est $y_0 - \dfrac{y_0}{x_0} x_0 = 0$, donc $Y - \dfrac{y_0}{x_0} X$ est un vecteur de $\mathcal{V}$ possédant une coordonnée nulle. D'après la question précédente, il est nul, soit :

$$ Y = \frac{y_0}{x_0} X. $$

Ainsi, deux vecteurs de $\mathcal{V}$ sont toujours colinéaires , donc : $\underline{\dim \mathcal{V} \le 1}$.

Mais $\mathcal{V}$ est un sous-espace propre de H_n, donc : $\underline{\dim \mathcal{V} \ge 1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\dim \mathcal{V} = 1}$$

B - Inégalité de Hilbert

6) Posons $P = a_p X^p + \ldots + a_1 X + a_0$ et $Q = \dfrac{a_p}{p+1} X^{p+1} + \ldots + \dfrac{a_1}{2} X^2 + a_0 X$. On a $Q' = P$, donc :

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = Q(1) - Q(-1).$$

Par ailleurs :

$$\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{p} a_k e^{ik\theta} \right) e^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{p} a_k e^{i(k+1)\theta} \right) d\theta = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}d\theta = \sum_{k=0}^{p} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1} \left[(-1)^{k+1} - 1 \right] = \frac{1}{i} \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1} (-1)^{k+1} - \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1} \right] = \frac{1}{i} \left[Q(-1) - Q(1) \right] = i \left[Q(1) - Q(-1) \right]$$

Donc $\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = i \int_{-1}^{1} P(t)dt$ et :

$$\left| \int_{-1}^{1} P(t)dt \right| = \left| \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| P(e^{i\theta})e^{i\theta} \right| d\theta.$$

Soit :

$$\boxed{\left| \int_{-1}^{1} P(t)dt \right| \leq \int_0^\pi \left| P(e^{i\theta}) \right| d\theta}$$

On a vu que pour tout $X = {}^t\left(x_0 \ \ x_1 \ \cdots \ x_{n-1} \right) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX = \int_0^1 \left(\tilde{X}(t) \right)^2 dt$, donc en appliquant l'inégalité ci-dessus au polynôme $P = \tilde{X}^2$, on obtient :

$$\left| \int_{-1}^{1} \left(\tilde{X}(t) \right)^2 dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \left(\tilde{X}(e^{i\theta}) \right)^2 \right| d\theta.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\left(\tilde{X}(t) \right)^2 \geq 0$, donc :

$${}^tXH_nX = \int_0^1 \left(\tilde{X}(t) \right)^2 dt \leq \int_{-1}^{1} \left(\tilde{X}(t) \right)^2 dt = \left| \int_{-1}^{1} \left(\tilde{X}(t) \right)^2 dt \right|.$$

Et ainsi :

$$\boxed{{}^tXH_nX \leq \int_0^\pi \left| \left(\tilde{X}(e^{i\theta}) \right)^2 \right| d\theta}$$

7) On a pour tout $\theta \in [0, \pi]$:

$$\left| \left(\tilde{X}(e^{i\theta}) \right)^2 \right| = \left| \tilde{X}(e^{i\theta}) \right|^2 = \tilde{X}(e^{i\theta}) \overline{\tilde{X}(e^{i\theta})} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k (e^{i\theta})^k \right) \left(\overline{\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell (e^{i\theta})^\ell} \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell e^{i(k-\ell)\theta}.$$

Donc :

$$\int_0^\pi \left| \left(\tilde{X}(e^{i\theta}) \right)^2 \right| d\theta = \int_0^\pi \left(\sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell e^{i(k-\ell)\theta} \right) d\theta = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell \int_0^\pi e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \, \pi + \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} x_k x_\ell \left[\frac{e^{i(k-\ell)\pi} - 1}{i(k-\ell)} \right]$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 + \frac{1}{i} \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} x_k x_\ell \left[\frac{(-1)^{k-\ell} - 1}{k-\ell} + \frac{(-1)^{\ell-k} - 1}{\ell-k} \right] = \pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2$$

Soit :

$$\int_0^{\pi}\left|\left(\tilde{X}(e^{i\theta})\right)^2\right|d\theta=\pi\|X\|^2.$$

Et ainsi :

$$\boxed{{}^tXH_nX\le\pi\|X\|^2}$$

8) Soit $X={}^t\left(x_0\ \ x_1\ \cdots\ x_{n-1}\right)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de H_n associé à ρ_n (donc ${}^tXH_nX=\rho_n\|X\|^2$).

Posons $Y={}^t\left(x_0\ \ x_1\ \cdots\ x_{n-1}\ \ 0\right)\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. D'après la question 2, on a :

$$ {}^tYH_{n+1}Y\le\rho_{n+1}\|Y\|^2 \qquad \textbf{(1)}.$$

Or, d'une part, $\|Y\|^2=x_1^2+...+x_n^2+0^2=x_1^2+...+x_n^2=\|X\|^2$ et d'autre part $\tilde{Y}=\tilde{X}$, donc :

$$ {}^tYH_{n+1}Y=\int_0^1\left(\tilde{Y}(t)\right)^2dt=\int_0^1\left(\tilde{X}(t)\right)^2dt={}^tXH_nX=\rho_n\|X\|^2.$$

Alors, **(1)** devient $\rho_n\|X\|^2\le\rho_{n+1}\|X\|^2$ et comme X est non nul, on a $\|X\|^2>0$ et :

$$\underline{\rho_n\le\rho_{n+1}.}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (\rho_n)_{n\ge1} \text{ est croissante.}}$$

Toujours avec le vecteur propre X (avec $\|X\|^2>0$) on a, d'après la question précédente :

$$ {}^tXH_nX=\rho_n\|X\|^2\le\pi\|X\|^2 \quad\Rightarrow\quad \rho_n\le\pi.$$

Ainsi, la suite $(\rho_n)_{n\ge1}$ est majorée par π et comme elle est croissante :

$$\boxed{\text{La suite } (\rho_n)_{n\ge1} \text{ est convergente.}}$$

C - Un opérateur intégral

9) On a $E=\left\{f\in C\left([0,1[,\mathbb{R}\right),\int_0^1|f|<\infty\right\}$. Soit $f\in E$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,1[$, on a :

$$K_n(xt)f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(xt)^kf(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x^kt^kf(t).$$

Et, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ et tout $t\in[0,1[$, on a $\left|t^kf(t)\right|\le\left|f(t)\right|$. Comme f est intégrable sur $[0,1[$, $t\mapsto t^kf(t)$ l'est aussi par théorème de comparaison, et donc $\int_0^1K_n(xt)f(t)dt$ est bien défini et vaut $\sum_{k=0}^{n-1}x^k\int_0^1t^kf(t)dt$.

Ainsi, $T_n(f)$ est bien définie et est polynomiale, donc continue et intégrable sur $[0,1[$. Ainsi, T_n est bien à images dans E. De plus, T_n est linéaire par linéarité de l'intégrale, donc :

$$\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

Pour $f \in E$, posons $a_k = \int_0^1 t^k f(t)dt$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. On a alors :

$$T_n(f)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![0,n-1]\!],\ a_k = 0$$

car le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Ainsi, 0 est valeur propre de T_n si et seulement s'il existe $f \in E\setminus\{0\}$ telle que $\int_0^1 t^k f(t)dt = 0$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. Or, si l'on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^1 PQ$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (qui est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$) est une droite, donc contient des polynômes non nuls.

Soit alors Q un tel polynôme. On a $Q \in \left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right)^{\perp}$, donc pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\langle X^k, Q\rangle = 0$, soit :

$$\int_0^1 t^k Q(t)dt = 0.$$

Or, la fonction polynôme Q appartient à E (et n'est pas nulle), donc il existe bien $Q \in E\setminus\{0\}$ telle que $\int_0^1 t^k Q(t)dt = 0$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, et ainsi :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } T_n.}$$

Remarquons qu'en s'inspirant des polynômes de Legendre, on peut prendre $Q = \dfrac{d^n}{dX^n}\left[(X^2-X)^n\right]$.

10) Remarquons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\tilde{X} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc la restriction de $\tilde{X}$ à $[0,1[$ appartient à *E*.

On a pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$:

$$\int_0^1 t^k \tilde{X}(t)dt = \int_0^1 t^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j\right)dt = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \int_0^1 t^{k+j}dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{k+j+1} = y_k$$

où ${}^t\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1}\end{pmatrix} = H_n X$.

Alors, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T_n(\tilde{X})(x) = \int_0^1 K_n(xt)\tilde{X}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k \tilde{X}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k .$$

Soit :

$$\boxed{T_n(\tilde{X}) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k \ \text{ avec } \ {}^t\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1}\end{pmatrix} = H_n X .}$$

Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de H_n est $X = {}^t\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

On a alors ${}^t\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1}\end{pmatrix} = H_n X = \lambda X = {}^t\begin{pmatrix} \lambda x_0 & \lambda x_1 & \cdots & \lambda x_{n-1}\end{pmatrix}$, donc :

$$T_n(\tilde{X}) : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} y_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k t^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k = \lambda \tilde{X}(t).$$

Donc, $T_n(\tilde{X}) = \lambda \tilde{X}$ et comme $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), on a $\tilde{X} \neq 0$. Ainsi, λ est valeur propre non nulle de T_n.

Réciproquement, si λ est valeur propre non nulle de T_n, alors il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$, soit $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f)$. Donc, f est polynomiale de degré au plus $n-1$.

Posons alors $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$ avec $X = {}^t\left(x_0 \; x_1 \; \cdots \; x_{n-1}\right) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $f = \tilde{X}$, donc, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T_n(f)(x) = T_n(\tilde{X})(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (H_n X)_k x^k = \lambda f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k x^k .$$

Les deux fonctions polynomiales $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (H_n X)_k x^k$ et $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k x^k$ coïncident donc sur $[0,1[$, donc sont égale. Elles ont alors les mêmes coefficients, soit $(H_n X)_k = \lambda x_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, $H_n X = \lambda X$ et λ est valeur propre (non nulle) de H_n.

Finalement :

$$\boxed{H_n \text{ et } T_n \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$$

11) On a $\mathscr{A} = \left\{ \varphi \in E \setminus \forall\, x \in]0,1[, \varphi(x) > 0,\ \lim_{0^+} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R},\ \lim_{1^-} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarquons que si $\varphi \in \mathscr{A}$:

- $\varphi \in E$, alors $\lim_{0^+} \varphi = \varphi(0) \in \mathbb{R}$, donc si $\lim_{0^+} \frac{1}{\varphi}$ est finie, alors c'est $\frac{1}{\varphi(0)}$ et $\varphi(0) \neq 0$;
- $\varphi > 0$ sur $]0,1[$, donc $\varphi(0) > 0$ et $\lim_{1^-} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R}_+$, donc $\lim_{1^-} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Réciproquement, pour $\varphi \in E$, si les conditions ci-dessus sont respectées alors $\varphi \in \mathscr{A}$. Ainsi :

$$\mathscr{A} = \left\{ \varphi \in E \setminus \forall\, x \in [0,1[, \varphi(x) > 0,\ \lim_{1^-} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \right\}.$$

On veut prouver que :

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \left[\sup_{x \in]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t)\, dt \right) \right] = \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \left[\sup_{x \in]0,1[} \left(\frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right) \right].$$

Ceci revient à prouver que pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$:

$$\rho_n \leq \sup_{x \in]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t)\, dt \right) = \sup_{x \in]0,1[} \left(\frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right).$$

D'après la question précédente, $f \in E$ est un vecteur propre (non nul) de T_n associé à ρ_n si et seulement si f est de la forme $t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$ où $X = {}^t\left(x_0 \; x_1 \; \cdots \; x_{n-1}\right)$ est un vecteur propre de H_n associé à ρ_n.

De plus, d'après la partie **A**, il existe un vecteur propre $X = {}^t\left(x_0 \; x_1 \; \cdots \; x_{n-1}\right)$ de H_n associé à ρ_n dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

On peut donc considérer $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$ telle que $T_n(f) = \rho_n f$ et $x_k > 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a alors $f(0) = x_0 > 0$, $\lim_{1^-} f = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $f > 0$ sur $[0,1[$.

Ainsi, $f \in \mathscr{A}$ et on a pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sup_{]0,1[}\left(\frac{T_n(f)}{f}\right) = \sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{\rho_n f}{f}\right) = \rho_n .$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{A}$ quelconque.

Remarquons déjà que $T_n(\varphi)$ est polynômiale, donc continue sur $[0,1]$ et, par hypothèse, $\dfrac{1}{\varphi}$ admet un prolongement continu sur $[0,1]$, donc $\dfrac{T_n(\varphi)}{\varphi}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ et donc $\displaystyle\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)}\right)$ existe et vaut $\displaystyle\max_{x\in[0,1]}\left(\frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)}\right)$ (où le prolongement $\dfrac{T_n(\varphi)}{\varphi}$ est rappelé $\dfrac{T_n(\varphi)}{\varphi}$).

Posons $g = \dfrac{\varphi}{f}$.

D'après ce qui précède, *f* est peut être prolongée en 1 en une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$ et φ est continue et strictement positive sur $[0,1[$ avec $\displaystyle\lim_{1^-}\varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Alors, *g* est continue et strictement positive sur $[0,1[$ (comme quotient de telles fonctions) et $\displaystyle\lim_{1^-} g \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Ceci permet d'affirmer que g possède un minimum $g(a) > 0$ sur $[0,1[$ (avec $a \in [0,1[$).

Alors, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1[$, on a $K_n(xt)f(t) \geq 0$ et :

$$K_n(xt)\varphi(t) = K_n(xt)f(t)g(t) \geq K_n(xt)f(t)g(a) .$$

Donc, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt \geq \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)f(t)g(a)dt .$$

Or :

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)f(t)g(a)dt = g(a)\frac{f(x)}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}\int_0^1 K_n(xt)f(t)dt = \frac{g(a)}{g(x)}\frac{T_n(f)(x)}{f(x)} = \frac{g(a)}{g(x)}\rho_n .$$

Donc, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\frac{g(a)}{g(x)}\rho_n \leq \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt \leq \max_{x\in[0,1]}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right) = \sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right)$$

En particulier pour $x = a \in [0,1[$, on obtient :

$$\rho_n \leq \sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\rho_n \leq \inf_{\varphi\in\mathscr{A}}\left[\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right)\right]}$$

De plus, on a vu plus haut que $f \in \mathscr{A}$ et $\displaystyle\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{f(x)}\int_0^1 K_n(xt)f(t)dt\right) = \rho_n$, donc le sup ci-dessus est atteint en $\varphi = f$: c'est un minimum.

Ainsi :

$$\boxed{\rho_n = \min_{\varphi\in\mathscr{A}}\left[\sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right)\right] = \inf_{\varphi\in\mathscr{A}}\left[\sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt\right)\right]}$$

12) Soient $\varphi\in\mathscr{A}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $x\in\,]0,1[$, $J_n(x)=\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}dt=\int_0^1 g(x,t)dt$ avec $g:(x,t)\mapsto\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}$, définie sur $]0,1[\times[0,1[$.

- Pour tout $x\in\,]0,1[$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$, car pour tout $t\in[0,1[$, $|g(x,t)|=g(x,t)\le\frac{1}{1-x}\varphi(t)$ et par hypothèse, φ est intégrable sur $[0,1[$.
- Pour tout $t\in[0,1[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,1[$.
- Pour tout $x\in\,]0,1[$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}$ est continue par morceaux sur $[0,1[$.
- Pour tout $a\in\,]0,1[$ et tout $(x,t)\in\,]0,a]\times[0,1[$, on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\le\frac{1}{(1-a)^2}\varphi(t)$ et la fonction $t\mapsto\frac{1}{(1-a)^2}\varphi(t)$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$.

Alors, J_n est de classe C^1 sur $]0,a]$ pour tout $a\in\,]0,1[$, donc sur $]0,1[$ et pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$J_n'(x)=\int_0^1\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^1\frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt.$$

On a alors pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$xJ_n'(x)=\int_0^1\frac{xt^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt=\int_0^1\frac{(xt-1+1)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt=\int_0^1\left(\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}-\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\right)dt.$$

Et comme $J_n(x)=\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}dt$ converge, on obtient pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\boxed{xJ_n'(x)=\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt-J_n(x)}$$

13) Soient $x\in\,]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$.

Remarquons que pour tout $t\in[0,1[$, $tx<1$ donc $1-tx\neq0$.

Commençons par le cas où $n=0$. On a alors $nJ_n(x)=nJ_{n-1}(x)=0$ et on veut montrer que :

$$0=\varphi(0)+(x-1)\int_0^1\frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt+\int_0^1\frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt.$$

Les fonctions $t\mapsto\frac{1-t}{1-tx}$ et φ sont C^1 sur $[0,1[$ (la première est rationnelle, de dérivée $t\mapsto\frac{x-1}{(1-tx)^2}$).

On peut donc réaliser une intégration par parties sur $[0,a]$ pour tout $a\in\,]0,1[$, ce qui donne :

$$\int_0^a\frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt=\left[\frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^a-\int_0^a\frac{(x-1)\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt=\frac{(1-a)\varphi(a)}{1-ax}-\varphi(0)-(x-1)\int_0^a\frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt.$$

Or, $\lim_{t\to 1^-}(1-t)\varphi(t)=0$ et, pour tout $t\in[0,1[$, $\left|\dfrac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\right|=\dfrac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\leq\dfrac{\varphi(t)}{(1-x)^2}$ avec $\dfrac{\varphi}{(1-x)^2}$ intégrable sur $[0,1[$ (car φ l'est), donc $\int_0^1\dfrac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt$ converge et ainsi, on peut faire tendre a vers 1^- dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_0^1\frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt=-\varphi(0)-(x-1)\int_0^1\frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt\,.$$

Soit :

$$0=\varphi(0)+(x-1)\int_0^1\frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt+\int_0^1\frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt\,.$$

Ceci établit la relation voulue pour $n=0$, avec, dans ce cas, $c=\varphi(0)$.

Soit maintenant $n\in\mathbb{N}^*$.

La fonction $t\mapsto\dfrac{t^n(1-t)}{1-tx}$ est rationnelle, donc de classe C^1 sur $[0,1[$, de dérivée :

$$t\mapsto\frac{(nt^{n-1}-nt^n)(1-tx)+(x-1)t^n}{(1-tx)^2}\,.$$

Comme φ est aussi de classe C^1 sur $[0,1[$, on peut donc réaliser une intégration par parties sur $[0,a]$ pour tout $a\in\,]0,1[$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt&=\left[\frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^a-\int_0^a\frac{(nt^{n-1}-nt^n)(1-tx)+(x-1)t^n}{(1-tx)^2}\varphi(t)dt\\&=\frac{a^n}{1-ax}(1-a)\varphi(a)-n\int_0^a\frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}dt+n\int_0^a\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}dt-(x-1)\int_0^a\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{a^n}{1-ax}(1-a)\varphi(a)\xrightarrow[a\to 1^-]{}0$$

$$\int_0^a\frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}dt\xrightarrow[a\to 1^-]{}J_{n-1}(x)$$

$$\int_0^a\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}dt\xrightarrow[a\to 1^-]{}J_n(x)$$

$$\forall\, t\in[0,1[,\ \left|\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\right|\leq\frac{\varphi(t)}{(1-x)^2}\quad\Rightarrow\quad\int_0^a\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt\ \text{ converge (comme plus haut)}$$

Donc, on peut faire tendre a vers 1^- dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt=-nJ_{n-1}(x)+nJ_n(x)-(x-1)\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt\,.$$

Soit :

$$nJ_n(x)=nJ_{n-1}(x)+(x-1)\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt\,.$$

La relation est vérifiée pour $n\in\mathbb{N}^*$ avec $c=0$.

Finalement, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{nJ_n(x)=c+nJ_{n-1}(x)+(x-1)\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt\quad \text{avec } \begin{cases}c=\varphi(0) & \text{quand } n=0\\ c=0 & \text{quand } n>0\end{cases}}$$

14) Soient $x\in\,]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 12 :

$$(x-1)\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt=-\,x(1-x)J_n\,'(x)+(x-1)J_n(x).$$

Donc d'après la question 13 :

$$nJ_n(x)=c+nJ_{n-1}(x)-x(1-x)J_n\,'(x)+(x-1)J_n(x)+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt.$$

Soit :

$$\begin{aligned}x(1-x)J_n\,'(x)&=c+nJ_{n-1}(x)-nJ_n(x)+(x-1)J_n(x)+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt\\&=c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\left[J_{n-1}(x)-xJ_n(x)\right]+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt\end{aligned}$$

Si $n=0$, ceci donne $x(1-x)J_0\,'(x)=c+(x-1)J_0(x)+\int_0^1\frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt$ qui est le résultat voulu (en posant, pour $n=0$, $n\int_0^1 t^{n-1}\varphi'(t)dt=0$. Si $n\geq 1$, on a :

$$J_{n-1}(x)-xJ_n(x)=\int_0^1\frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}dt-x\int_0^1\frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}dt=\int_0^1\frac{(t^{n-1}-xt^n)\varphi(t)}{1-tx}dt=\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)dt.$$

Donc, dans tous les cas :

$$\boxed{x(1-x)J_n\,'(x)=c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)dt+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt}$$

15) L'équation (E): $(1-t)y'=-\gamma y$, se récrit pour $t\in[0,1[$: $y'=-\dfrac{\gamma}{1-t}y$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Pour tout $t\in[0,1[$, $1-t>0$, donc :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } [0,1[\text{ sont les fonctions } t\mapsto Ke^{\gamma\ln(1-t)}=K(1-t)^{\gamma} \text{ avec } K\in\mathbb{R}.}$$

Les hypothèses faites sur φ sont nombreuses :

- $\varphi\in C^1\left([0,1[,\mathbb{R}\right)$;
- $\int_0^1|\varphi|<\infty$;
- $\forall\, x\in[0,1[,\ \varphi(x)>0$;
- $\lim\limits_{1^-}\varphi\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$;
- $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)\varphi(t)=0$.

Soit $g : t \mapsto K(1-t)^\gamma$ avec $K \in \mathbb{R}$ une solution de (E).

On a $g \in C^1\big([0,1[,\mathbb{R}\big)$ quels que soient K et g, et $\varphi > 0$ sur $[0,1[$ si et seulement si $K > 0$. On suppose que c'est le cas. Alors :

- $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t) = K \lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^\gamma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \le 0$;
- $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)g(t) = K \lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^{\gamma+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma > -1$;
- Pour $-1 < \gamma \le 0$ et tout $a \in [0,1[$:

$$\int_0^a |g(t)|\,dt = K\int_0^a (1-t)^\gamma dt = K\left[-\frac{(1-t)^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right]_0^a = \frac{K}{\gamma+1}\big(1-(1-a)^{\gamma+1}\big) \xrightarrow[a\to 1^-]{} \frac{K}{\gamma+1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 |g| < \infty.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Une solution } t \mapsto K(1-t)^\gamma \text{ de } (E) \text{ vérifie les hypothèses faites sur } \varphi \text{ si et seulement si } \begin{cases} K > 0 \\ -1 < \gamma \le 0 \end{cases}.}$$

On suppose dans la suite que $\varphi : t \mapsto K(1-t)^\gamma$ avec $\varphi(0) = K = 1 > 0$, donc :

$$\varphi : t \mapsto (1-t)^\gamma$$

avec $-1 < \gamma \le 0$. Alors :

$$\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}dt = \int_0^1 \frac{t^n\left[-\gamma\varphi(t)\right]}{1-tx}dt = -\gamma J_n(x)$$

$$\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)dt = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt$$

La relation de la question 14 se récrit :

$$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt - \gamma J_n(x).$$

16) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \,]0,1[$, $\Phi_n(x) = \dfrac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{x^n J_n(x)}{(1-x)^\gamma}$.

Par hypothèse, φ est de classe C^1 et ne s'annule pas sur $[0,1[$. La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $]0,1[$ et J_n l'est aussi d'après la question 12. Ainsi, $x \mapsto x^n J_n(x)$ est dérivable sur $]0,1[$ en tant que produit de telles fonctions et en tant que quotient de telles fonctions :

$$\boxed{\Phi_n \text{ est dérivable sur }]0,1[.}$$

De plus, pour tout $x \in \,]0,1[$ (en prenant $nx^{n-1}J_n(x) = 0$ quand $n = 0$) :

$$\begin{aligned}\Phi_n'(x) &= \frac{x^{n-1}\left[nJ_n(x) + xJ_n'(x)\right](1-x)^\gamma + x^n J_n(x)\gamma(1-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^{2\gamma}} \\ &= \frac{x^{n-1}\left[n(1-x)J_n(x) + x(1-x)J_n'(x)\right] + \gamma x^n J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}}\end{aligned}$$

Et avec la relation établie à la fin de la question précédente, on obtient :

$$\Phi_n'(x)=\frac{x^{n-1}\left[n(1-x)J_n(x)+c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt-\gamma J_n(x)\right]+\gamma x^n J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$=\frac{x^{n-1}(\gamma+1)(x-1)J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}}+\left(c+n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt\right)\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$=-\frac{\gamma+1}{x}\frac{x^n J_n(x)}{(1-x)^\gamma}+\left(c+n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt\right)\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

Et ainsi, on obtient pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\boxed{\Phi_n'(x)=-(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x}+c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\quad\text{avec }c_n=c+n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt.}$$

17) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\,]0,1[$, on a :

$$x^{\gamma+1}\Phi_n'(x)+(\gamma+1)x^\gamma\Phi_n(x)=c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}x^{\gamma+1}=c_n\frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}.$$

Or, $x\mapsto x^{\gamma+1}\Phi_n'(x)+(\gamma+1)x^\gamma\Phi_n(x)$ est la dérivée de $x\mapsto x^{\gamma+1}\Phi_n(x)$ qui s'annule en 0.

De plus, $n+\gamma>-1$, donc $x\mapsto\dfrac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}$ est intégrable en 0 et ainsi :

$$x^{\gamma+1}\Phi_n(x)=c_n\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{\gamma+1}}dt$$

Soit, pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\boxed{\Phi_n(x)=\frac{c_n}{x^{\gamma+1}}\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{\gamma+1}}dt}$$

18) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $a\in\,]0,1[$, on a $\varphi_\alpha:t\mapsto(1-t)^{-\alpha}$ vérifie toutes les conditions précédentes sur φ.

En particulier $\varphi_\alpha\in\mathscr{A}$, donc :

$$\rho_n=\inf_{\varphi\in\mathscr{A}}\left[\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1K_n(xt)\varphi(t)dt\right)\right]\le\inf_{\alpha\in\,]0,1[}\left[\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1K_n(xt)\varphi_\alpha(t)dt\right)\right].$$

Or, pour tout $x\in\,]0,1[$ et tout $t\in[0,1[$, on a $1-tx\neq0$, donc :

$$\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1K_n(xt)\varphi_\alpha(t)dt=\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(xt)^k\right)\varphi_\alpha(t)dt=\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1\frac{1-(xt)^n}{1-xt}\varphi_\alpha(t)dt$$

$$=\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1\frac{\varphi_\alpha(t)}{1-xt}dt-\frac{x^n}{\varphi_\alpha(x)}\int_0^1\frac{t^n\varphi_\alpha(t)}{1-xt}dt=\frac{J_0(x)}{\varphi_\alpha(x)}-\frac{x^nJ_n(x)}{\varphi_\alpha(x)}=\Phi_0(x)-\Phi_n(x)$$

$$=\frac{c_0}{x^{-\alpha+1}}\int_0^x\frac{t^{-\alpha}}{(1-t)^{-\alpha+1}}dt-\frac{c_n}{x^{-\alpha+1}}\int_0^x\frac{t^{n-\alpha}}{(1-t)^{-\alpha+1}}dt=\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x\frac{1-c_nt^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}dt$$

avec $c_0=\varphi_\alpha(0)=1$ et $c_n=n\int_0^1t^{n-1}(1-t)^{-\alpha}dt$. Remarquons qu'il a déjà été vu que toutes les intégrales dans la suite d'égalités ci-dessus convergent.

Ainsi :

$$\rho_n \le \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\left[\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,dt\right)\right].$$

Reste à montrer que :

$$c_n = n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt = \theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}.$$

Or, on a $\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{(1-\alpha)-1}\,dt$ avec $n>0$ et $1-\alpha>0$, donc d'après les résultats admis dans l'énoncé :

$$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{(1-\alpha)-1}\,dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = \frac{(n-1)!\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

De plus, avec la relation $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

- Pour $n=1$, on a $\Gamma(2-\alpha)=\Gamma(1-\alpha+1)=(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, donc la relation est vraie au rang $n=1$.
- Si pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, on a $\Gamma(n+1-\alpha)=(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+2-\alpha) &= \Gamma(n+1-\alpha+1) = (n+1-\alpha)\Gamma(n+1-\alpha)\\ &= (n+1-\alpha)\left[(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\right] \text{ par hypothès de récurrence}.\\ &= (1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)(n+1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

  Donc, la relation est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\rho_n \le \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\left[\sup_{x\in\,]0,1[}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,dt\right)\right] \quad \text{avec} \quad \theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}.}$$

19) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $\rho_n \le \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\left[\theta_n^{\frac{1-\alpha}{n}}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\right]$, on $\rho_n \le \theta_n^{\frac{1-\alpha}{n}}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}$ pour tout $\alpha\in\,]0,1[$, en particulier pour $\alpha=\frac{1}{2}$, soit :

$$\rho_n \le \theta_n^{\frac{1}{2n}}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Or :

$$\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{2dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \left[\arcsin(2t-1)\right]_0^{\theta_n^{-1/n}} = \arcsin\left(2\theta_n^{-1/n}-1\right)+\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\rho_n \le \theta_n^{1/2n}\left[\arcsin\left(2\frac{1}{(\theta_n^{1/2n})^2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right].$$

Par ailleurs, avec $\alpha=\dfrac{1}{2}$, on a :

$$\theta_n=\frac{n!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^n n!}{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}=\frac{2\times 4\times\ldots\times(2n)\times 2^n n!}{(2n)!}=\frac{2^n n!\times 2^n n!}{(2n)!}=2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Donc :

$$\theta_n^{1/2n}=2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}=\omega_n.$$

Ainsi :

$$\rho_n\le\omega_n\left[\arcsin\left(2\frac{1}{\omega_n^2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right].$$

Remarquons que :

$$\theta_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{2}{2-\frac{1}{2}}\times\ldots\times\frac{n}{n-\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\quad\Rightarrow\quad\omega_n=\theta_n^{1/2n}\ge 2^{1/2n}>1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\omega_n}\in\left]0,1\right[.$$

Posons $h(x)=\arcsin\left(2x^2-1\right)+\dfrac{\pi}{2}-2\arcsin x$ sur $\left]0,1\right[$. La fonction h est dérivable sur $\left]0,1\right[$ en tant que somme de telles fonctions (car quand $x\in\left]0,1\right[$, on a $2x^2-1\in\left]-1,1\right[$ et arcsin est dérivable sur $\left]-1,1\right[$) et pour tout $x\in\left]0,1\right[$:

$$h'(x)=\frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4x}{\sqrt{\left(1-(2x^2-1)\right)\left(1+(2x^2-1)\right)}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{4x}{\sqrt{(2-2x^2)2x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

Ainsi, h est constante et $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$, donc h est nulle et ainsi, pour tout $x\in\left]0,1\right[$:

$$\arcsin\left(2x^2-1\right)+\frac{\pi}{2}=2\arcsin x.$$

Et donc, $\arcsin\left(2\dfrac{1}{\omega_n^2}-1\right)+\dfrac{\pi}{2}=2\arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, d'où :

$$\boxed{\rho_n\le 2\omega_n\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)}$$

20) Avec la formule de Stirling, on a :

$$2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sim 2^{2n}\frac{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}=\sqrt{\pi n}.$$

Donc :

$$\omega_n = 2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n} = \left(2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n} = \exp\left[\frac{1}{2n}\ln\left(2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2n}\ln\left(\sqrt{\pi n}+o(\sqrt{n})\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{2n}\left(\ln\left(\sqrt{\pi n}\right)+\ln\left(1+o(1)\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\ln(\pi n)}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1+\frac{\ln(\pi n)}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{\ln n}{4n}+\frac{\ln \pi}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{\ln n}{4n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Et ainsi :

$$\boxed{\omega_n - 1 \sim \frac{\ln n}{4n}}$$

Posons $\varepsilon_n = \omega_n - 1$. On a alors :

$$\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = \pi - 2(1+\varepsilon_n)\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = u_n - 2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

avec $u_n = \pi - 2\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$.

On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\omega_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, $u_n \sim \sin u_n$. Or :

$$\sin u_n = \sin\left[\pi - 2\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right] = \sin\left[2\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right] = 2\sin\left[\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right]\cos\left[\arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right]$$

$$= 2\frac{1}{\omega_n}\sqrt{1-\frac{1}{\omega_n^2}} = 2\frac{\sqrt{\omega_n^2-1}}{\omega_n^2} = 2\frac{\sqrt{\omega_n+1}}{\omega_n^2}\sqrt{\omega_n-1} = 2\frac{\sqrt{\omega_n+1}}{\omega_n^2}\sqrt{\varepsilon_n}$$

Comme $\omega_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a :

$$u_n \sim \sin u_n \sim 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_n}\,.$$

Enfin, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on $\varepsilon_n = o\left(\sqrt{\varepsilon_n}\right)$ et $2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim \pi\varepsilon_n$, donc :

$$2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = o\left(\sqrt{\varepsilon_n}\right) = o(u_n)\,.$$

Finalement, $\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = u_n + o(u_n)$, donc $\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim u_n \sim 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_n}$, soit :

$$\boxed{\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}}$$