**Lycée Fénelon Sainte-Marie – La Plaine Monceau** **Classe de PSI***
**Année 2023-2024** **Mathématiques**

# Compte-rendu du concours blanc

## Commentaires généraux

Les quantificateurs mathématiques et les abréviations n'ont rien à faire dans une phrase en Français. Dehors, les $\forall$, les « $f$ est $\mathcal{C}^1$ », les $\iff$, les « cpm »... En particulier si votre copie est courte !

Presque toutes les copies sont claires, aérées, bien présentées, les résultats mis en valeur. Quelques rares irréductibles continuent à rendre un torchon : aux « grands concours », cela ne pardonne pas.

Citez les questions précédentes que vous utilisez (« d'après **Q39** ») et vérifiez bien les hypothèses (« $f$ est continue donc d'après **Q39**... »).

Quand une formule est donnée, on exige une démonstration parfaite ! Ne bidouillez pas, ne tordez pas la réalité. Le correcteur sait où se cache chaque difficulté.

Ne tentez pas d'arnaquer le correcteur. Cela marchait peut-être avec votre professeur de Terminale, mais avec un correcteur de concours c'est risqué.

De la méthode ! Dans une question longue (TCD, dérivation d'une intégrale à paramètre, supplémentarité d'espaces...), mettez en valeurs les diverses étapes. Cela aide le correcteur à s'y retrouver. Le jour J, le correcteur ne passera pas une heure à recoller les morceaux de votre puzzle.

Attention à l'orthographe ! Prenez 5 minutes en fin d'épreuve pour vous relire, corriger vos fautes, peaufiner vos démos. Ce ne sont pas ces quelques minutes qui vous permettront de racler des points en gribouillant à la va-vite une dernière question (en général fausse ou avec arguments manquants, donc zéro point). Mieux vaut les consacrer à la relecture.

Attention en particulier aux mots mathématiques classiques : Riemann, Bernoulli, récurrence, parallèle, spectral.

La simple vision de « il est évident que » ou « nécessairement » met en rage tout correcteur normalement constitué. Si une question était si évidente, on ne lui attribuerait pas de point !

## Problème 1

**Q1.**

- Calculs ! Le DL du logarithme est à connaître.
- Pas de soustraction d'équivalents.
- En mathématiques, on utilise surtout des DL, et pas des équivalents.
- Théorème de comparaison des séries **à termes positifs** (ou négatifs).
- Équivalent à zéro est extrêmement rare : ceci signifie « exactement nul quand $n$ est grand », ce qui n'arrive pas très souvent... A-t-on déjà vu un sujet qui vous fait étudier une suite nulle ?
- Il est faux d'affirmer que $\alpha_n \sim \beta_n$ implique $\alpha_n - \beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Contre-exemple : $\alpha_n = n$ et $\beta_n = n + (-1)^n$.

**Q2.** Plutôt correct.

**Q3.** Théorème : si $f$ est **continue**, positive et non identiquement nulle sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles, alors $\displaystyle\int_I f > 0$.

**Q4.**
a.

- Justifiez **brièvement**. On attendait la concavité du logarithme ! Démontrer que la fonction $h \mapsto \ln(1-h) - (-1)$ est négative (comme on le fait en Terminale) est possible, mais long.

- On veut une inégalité pour **tout** $h$, et pas uniquement pour $h$ proche de 0 (en clair : pas de DL !).

b.

- Citez le nom « théorème de convergence dominée ».
- Il faut bien mettre en valeur les **trois** hypothèses (et pas les noyer au milieu de calculs).
- Pour la domination, citez explicitement le a.
- Pour ceux qui n'ont pas vu le lien avec le a. et qui recherchent leur propre majoration : celle-ci doit être indépendante de $n$.
- Effectuez pour de vrai le calcul de la limite de $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ quand $n \to +\infty$. Et avec un DL, pas un équivalent !

c.

- Parlez de changement de variable **affine** (en fait le seul réellement au programme), ce qui vous évite de devoir vérifier toutes les hypothèses du théorème de changement de variable (bijectif, de classe $\mathcal{C}^1$ et de bijection réciproque de classe $\mathcal{C}^1$).
- Citez explicitement la formule de l'énoncé (« d'après la formule admise par l'énoncé... »).

d.

- Ne passez pas une heure à démontrer la première formule, cela ne rapportera pas plus de points.
- Horreur : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x}$. La linéarité de la sommation nécessite que les séries en jeu convergent.

**Q4.**

- Ne pas confondre $f$ et $f(x)$ ! Il est agaçant de lire « $f(x)$ est continue » ou $\|f(x)\|_\infty$. La norme $\|\cdot\|_\infty$ s'applique à une fonction, pas à un nombre réel. Aux « grands concours », cela ne pardonne pas !
- Pour une convergence de série, majorez la valeur absolue.
  Contre-exemple : $-n \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc $\displaystyle\sum_n -n$ est convergente ?
- Pour la convergence normale, il est préférable de faire apparaître une $\|\cdot\|_\infty$. Version minimaliste : écrire explicitement que le majorant est indépendant de la variable.
- Vu plusieurs fois : $g_n' \leq 0$ et $g_n(0) = 0$ donc $|g_n(x)| \leq 0$ pour tout $x$ !

**Q5.**

- Formule donnée, donc démo parfaite exigée.
- Vérifiez la stricte positivité avant de prendre le ln (ou l'inverse).
- Citez les questions utilisées (en l'occurrence **Q2** et **Q4**).
- Vérifiez la dérivabilité avant de dériver.
- Invoquez la continuité de ln quand vous prenez la limite.

**Q6.** Plusieurs personnes ont tenté de calculer l'intégrale sans utiliser les questions précédentes. Mauvais plan !

**Q7.** Encore la même horreur : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x}$. La linéarité de la sommation nécessite que les séries en jeu convergent.

**Q8.**

- Pour la convergence normale, soit on utilise $\|\cdot\|_\infty$ soit on écrit **explicitement** que le majorant est indépendant de la variable : « $|f_n(x)| \leq \dfrac{K}{n^2}$ avec $\dfrac{K}{n^2}$ indépendant de $x$, donc (...) la série converge normalement ».
- ...et il faut une valeur absolue !

- Nombreuses formules mélangeant les indices : $\psi(x+n)-\psi(n)=\sum_n h_n(n)$ !

**Q9.** Citez précisément les questions précédentes, en vue de justifier que $\psi$ est une solution.

**Q10.**

a.

- Expliquez pourquoi la loi est uniforme.
- Pensez à écrire $X(\Omega)$ et pas seulement $P([X=n])$ : ceci fait partie de la réponse attendue.
- L'énoncé attendait une démonstration de l'espérance.

b. Plusieurs personnes ont lancé des formules pifométriques pour $P([Y=k]|[X=n])$. Expliquez !

## Problème 2

**Q11.**

- Ne mélangez pas $f_i$ et $f_i(M)$.
- Beaucoup de démos démesurément longues, alors que la solution peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} g_j$.
- Quelques baratins et pipeautages (tant pour « liée » que « libre »), ce qui décrédibilise le candidat.

**Q12.**

- N'oubliez pas de vérifier que $\mathcal{M}_0$ est non vide !
- La dimension a vu apparaître un florilège de réponses toutes plus originales, fantaisistes et fausses. Un candidat a même affirmé que $\mathcal{M}_0$ était de dimension nulle.

**Q13.** De la méthode ! Mettez en valeurs les diverses étapes (une inclusion, l'autre, la somme directe).

**Q14.** Le sens $\Rightarrow$ a été plusieurs fois abordé. La stabilité de $D$ a été plutôt bien traitée. Par contre, pas de « de manière analogue $H$ est stable » !

**Q15.**

- Plutôt bien traité.
- En toute rigueur, après avoir démontré $p_{\sigma\circ\sigma'}(e_i)=p_\sigma\circ p_{\sigma'}(e_i)$ pour tout $i$, il faut affirmer que les deux endomorphismes sont égaux car ils le sont sur une base.

**Q16.** Rarement abordée, et seulement des démonstrations fantaisistes.

**Q17.** Le fait que $P_\sigma\times P_{\sigma^{-1}}=I_n$ suffit à prouver à la fois que $P_\sigma$ est inversible et $P_\sigma^{-1}=P_{\sigma^{-1}}$.

**Q18.** La formule $P_{\sigma^k}=(P_\sigma)^k$ nécessitait une démonstration par récurrence. Dans le doute : prenez 2 minutes à la faire ! Comme cela vous êtes sûr d'avoir le point.

**Q19.**

- Beaucoup de confusion entre « matrice de symétrie » $(A^2=I_n)$ et « matrice symétrique » $(A^\top=A)$.
- Le terme « spectral » dans le théorème éponyme ne prend pas de « e » final. Cette faute d'orthographe est très agaçante !

**Q20.**

(a) Question généralement bien traitée, bravo !

(b) Là, par contre, beaucoup de baratin.

---

Fénelon Sainte-Marie
La Plaine Monceau
GROUPE SCOLAIRE