

## Corrigés des TD du chapitre 16

### Exercice 1

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique. On note  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tous  $i, j \in 1, n$  :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (\alpha_i \alpha_k \alpha_k \alpha_j) = \alpha_i \alpha_j \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) = \alpha_i \alpha_j = a_{i,j}.$$

Donc,  $A^2 = A$  et  $A$  est une matrice de projecteur.

De plus, si on pose  $e_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n$ , on a pour tout  $j \in 1, n$  :

$$f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \alpha_j \varepsilon_k = \alpha_j \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k = \alpha_j e_1.$$

Comme  $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$ , les  $\alpha_j$  ne sont pas tous nuls (et  $e_1 \neq 0$ ), donc :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1).$$

Par le théorème du rang, on a  $\dim \ker f = n - \text{rg}(f) = n - 1$ .

Soit  $p \in 1, n$  tel que  $\alpha_p \neq 0$ . Pour tout  $j \in 1, n$ , on a :

$$f(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = \alpha_p f(\varepsilon_j) - \alpha_j f(\varepsilon_p) = \alpha_p \alpha_j e_1 - \alpha_j \alpha_p e_1 = 0.$$

Donc,  $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \in \ker f$  et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  sont des réels, on a :

$$\sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j (\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = 0 \iff \sum_{j=1, j \neq p}^n \alpha_p \lambda_j \varepsilon_j - \left( \sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j \alpha_j \right) \varepsilon_p = 0.$$

Comme  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est libre, ceci donne  $\alpha_p \lambda_j = 0$ , soit  $\lambda_j = 0$  (car  $\alpha_p \neq 0$ ) pour tout  $j \in 1, n \setminus \{p\}$ .

Ainsi, la famille  $(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p)_{j \in 1, n \setminus \{p\}}$  est une famille libre de  $n-1$  vecteurs de  $\ker f$ , qui est de dimension  $n-1$ , donc  $(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p)_{j \in 1, n \setminus \{p\}}$  est une base de  $\ker f$ .

Enfin, pour tout  $j \in 1, n \setminus \{p\}$ , on a :

$$(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p | e_1) = \alpha_p (\varepsilon_j | e_1) - \alpha_j (\varepsilon_p | e_1) = \alpha_p \alpha_j - \alpha_j \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout  $j \in 1, n \setminus \{p\}$ ,  $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \perp e_1$ , ce qui prouve que :

$$\ker f \perp \text{Im } f.$$

Finalement :

L'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Vect}(\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n)$ .

**Exercice 2**

1) L'application  $(f, g) \mapsto (f | g)$  est clairement symétrique et bilinéaire (du fait de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale). De plus, pour tout  $f \in E$ , on a  $(f | f) = \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$  et, comme  $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$  et  $\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$ , on a :

$$(f | f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

Or,  $f^2$  est positive et continue sur  $[0;1]$ , donc :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Ainsi,  $(f | f) = 0$  si et seulement si  $f = 0$ , et finalement,  $(f, g) \mapsto (f | g)$  est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur  $E$ , donc :

$$(f, g) \mapsto (f | g) \text{ définit un produit scalaire sur } E.$$

2) Remarquons que  $W$  est l'espace vectorielle des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 :  $y'' - y = 0$ .

Si on note  $f_1 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto e^t$  et  $f_2 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto e^{-t}$ , on a  $f_1, f_2 \in E$  et ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions de  $y'' - y = 0$ , donc :

$$W = \text{Vect}(f_1, f_2).$$

Ceci prouve entre autres que  $W$  est bien un sous-espace de  $E$ . On prouve facilement que  $V$  est non vide (il contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires, donc  $V$  est aussi un sous-espace de  $E$ .

Soit maintenant  $f \in E$ .

S'il existe  $(f_v, f_w) \in V \times W$  tel que  $f = f_v + f_w$ , alors on a  $f_w = af_1 + bf_2$  avec :

$$\begin{cases} f(0) = f_v(0) + f_w(0) = f_w(0) = a + b \\ f(1) = f_v(1) + f_w(1) = f_w(1) = ae + \frac{b}{e} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} \\ b = \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} \end{cases}$$

Donc :

$$f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2 \text{ et } f_v = f - f_w.$$

Ainsi, si  $f_v$  et  $f_w$ , elles sont uniques.

Réciproquement, si on pose  $f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2$  et  $f_v = f - f_w$ , on a immédiatement :

$$f = f_v + f_w \text{ et } f_w \in W.$$

On montre facilement que  $f_v(0) = f(0) - f_w(0) = 0$  et  $f_v(1) = f(1) - f_w(1) = 0$ , donc que  $f_v \in V$ .

Ceci prouve par analyse-synthèse que :

$$\underline{E = V \oplus W.}$$

Pour montrer que  $V \perp W$ , il suffit de prouver que  $f_1$  et  $f_2$  sont orthogonales à toute fonction de  $V$ .

Soit  $f \in V$ . On a  $f(0) = f(1) = 0$  et :

$$(f | f_1) = \int_0^1 f(t)e^t dt + \int_0^1 f'(t)e^t dt = \int_0^1 [f(t)e^t + f'(t)e^t] dt = [f(t)e^t]_0^1 = f(1)e - f(0) = 0$$

$$(f | f_2) = \int_0^1 f(t)e^{-t} dt + \int_0^1 f'(t)(-e^{-t}) dt = - \int_0^1 [-f(t)e^{-t} + f'(t)e^{-t}] dt = - [f(t)e^{-t}]_0^1 = -\frac{f(1)}{e} + f(0) = 0$$

Donc, pour tout  $f \in V$ , on a  $f \perp f_1$  et  $f \perp f_2$ , et ainsi :

$$\underline{V \perp W.}$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{E = V \overset{\perp}{\oplus} W}$$

4) Pour toute  $f \in E_{\alpha,\beta}$ , on a  $f(0) = \alpha$  et  $f(1) = \beta$ . Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$f = f_v + f_w$$

avec  $f_v \in V$  et  $f_w = \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \in W$ .

Alors, avec  $f_v \perp f_w$ , on a  $\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt = \|f\|^2 = \|f_v\|^2 + \|f_w\|^2$  et :

$$\|f_w\|^2 = \left\| \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \right\|^2 = \left( \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 \|f_1\|^2 + 2 \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} (f_1 | f_2) + \left( \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \|f_2\|^2.$$

On a :

$$\|f_1\|^2 = \int_0^1 [f_1(t)^2 + f_1'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{2t} dt = e^2 - 1$$

$$(f_1 | f_2) = \int_0^1 f_1(t)f_2(t) dt + \int_0^1 f_1'(t)f_2'(t) dt = \int_0^1 e^t e^{-t} dt + \int_0^1 e^t (-e^{-t}) dt = 0$$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^1 [f_2(t)^2 + f_2'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{-2t} dt = -e^{-2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

Donc :

$$\|f_w\|^2 = \left( \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 (e^2 - 1) + \left( \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \frac{e^2 - 1}{e^2} = \frac{(\alpha - e\beta)^2 + (e\alpha - \beta)^2}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}.$$

Enfin :

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left( \int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f\|^2) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f_v\|^2 + \|f_w\|^2) = \|f_w\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left( \int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}}$$

**Exercice 3**

Soient  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$  des bases orthonormées de  $F$  et  $G$  respectivement (avec  $n = \dim E$ ,  $p = \dim F$  et  $n - p = \dim G$ ). La famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  est alors une base de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ .

On a alors  $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  où le 1 apparaît  $p$  fois et :

$$s(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ -e_k & \text{si } p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

On a alors :

- pour tout  $(i, j) \in 1, p^2$ ,  $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$  (car  $(e_1, \dots, e_p)$  est orthonormée) ;
- pour tout  $(i, j) \in p+1, n^2$ ,  $(s(e_i) | s(e_j)) = (-e_i | -e_j) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$  (car  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  est orthonormée) ;
- pour tout  $(i, j) \in 1, p \times p+1, n$ ,  $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | -e_j) = -(e_i | e_j)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} G = F^\perp &\Leftrightarrow G \perp F \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ est orthonormée} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in 1, n^2, (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in 1, p \times p+1, n, (e_i | e_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in 1, p \times p+1, n, (e_i | e_j) = -(e_i | e_j) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \overline{[1, p]} \times \overline{[p+1, n]}, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \overline{[1, n]}, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \end{aligned}$$

Ceci prouve que (i) équivaut à (ii).

De plus, comme  $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  est diagonale donc symétrique,  $s$  est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la base  $\mathcal{B}$  est orthonormée, donc (iii) est équivalente à (i) et (ii) et ainsi :

Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

**Exercice 4**

Notons  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (muni du produit scalaire canonique) et  $\mathcal{B}' = (c_1, \dots, c_n)$  où les  $c_k$  sont les vecteurs colonnes de  $A$ . Comme  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B}'$  est une base et on a  $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  (la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ).

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe  $\mathcal{B}'' = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  telle que, pour tout  $k \in 1, n$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_k)$ . Ceci se traduit par pour tout  $k \in 1, n$  :

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \Rightarrow c_k = \lambda_{1,k}e_1 + \dots + \lambda_{k,k}e_k.$$

$$\text{Alors } P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_{n-2,n-1} & \lambda_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ donc } R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \text{ est triangulaire supérieure.}$$

Par ailleurs, comme  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique, la base canonique  $\mathcal{B}$  est orthonormée. Comme la base  $\mathcal{B}''$  l'est aussi,  $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$  est orthogonale.

Enfin, la relation de Chasles donne  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ , soit, avec  $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ,  $R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$  et  $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$  :

$$A = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure.}$$

### Exercice 5

1) On a par définition :

$$rg(A) = rg(\mathcal{F})$$

2) Pour tout  $i \in 1, p$ , appelons  $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$  les coordonnées de  $x_i$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$ .

On a alors, pour tout  $(i, j) \in 1, p^2$  :

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j}.$$

Par ailleurs,  $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  ${}^t A = (x_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  donc  $A^T A$  est définie et  $A^T A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Si on pose  $A^T A = (a_{i,j})$ , on a pour tout  $(i, j) \in 1, p^2$  :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j} = (x_i | x_j).$$

Ainsi :

$$G = A^T A$$

3) Soit  $X \in \ker A$ . On a :

$$(A^T A)X = A^T (AX) = A^T 0 = 0 \Rightarrow X \in \ker(A^T A).$$

Ainsi :

$$\underline{\ker A \subset \ker(A^T A)}.$$

Soit maintenant  $X \in \ker(A^T A)$ , on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^T (AX) = (X^T A^T)(AX) = X^T (A^T AX) = X^T 0 = 0.$$

Ainsi,  $\|AX\| = 0$ , donc  $AX = 0$ , soit  $X \in \ker A$ . Ceci permet de conclure que :

$$\underline{\ker(A^T A) \subset \ker A}.$$

Finalement :

$$\ker(A^T A) = \ker A$$

Par le théorème du rang, on a  $rg(A) + \dim(\ker A) = p$  et  $rg(A^T A) + \dim(\ker(A^T A)) = p$ .

Or, comme  $\ker(A^T A) = \ker A$ , on a  $\dim(\ker(A^T A)) = \dim(\ker A)$  et ainsi,  $rg(A^T A) = rg(A)$ .

Comme  $G = A^T A$  et  $rg(A) = rg(\mathcal{F})$ , on a finalement :

$$\boxed{rg(\mathcal{F}) = rg(G)}$$

4) La matrice  $G = A^T A$  est une matrice symétrique réelle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , donc, d'après le théorème spectrale, elle est diagonalisable. Si ses valeurs propres (distinctes ou non) sont  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , on a :

$$\det G = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p.$$

Soit  $k \in 1, p$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre de  $G$  associé à  $\lambda_k$ . On a  $GX = A^T AX = \lambda_k X$ , donc :

$$X^T A^T AX = \lambda_k X^T X \Leftrightarrow (AX)^T AX = \|AX\|^2 = \lambda_k \|X\|^2 \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\|^2 \neq 0).$$

Or,  $\|AX\|^2 \geq 0$  et  $\|X\|^2 > 0$ , donc  $\lambda_k \geq 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \in 1, p$ , on a  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \geq 0$ , soit :

$$\boxed{\det G \geq 0}$$

On a  $\det G = 0$  quand  $rg(G) = rg(x_1, x_2, \dots, x_p) < p$ , donc :

$$\boxed{\det G = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ est liée.}}$$

5) Si  $x \in F$ , alors  $d(x, F) = 0$  et la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ , donc  $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = 0$  et la formule désirée est vérifiée (les deux membres valent 0).

Si  $x \notin F$ , posons  $e_{p+1} = x - p_F(x) \neq 0$ , où  $p_F(x)$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .

On a alors  $d^2 = d(x, F)^2 = \|e_{p+1}\|^2 = (e_{p+1} | e_{p+1})$  et  $e_{p+1} \in F^\perp$ , donc pour tout  $k \in 1, p$ ,  $(e_k | e_{p+1}) = 0$ . Ainsi :

$$G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{pmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & (e_1 | e_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_p) & \dots & (e_p | e_p) & (e_p | e_{p+1}) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \dots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | e_{p+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(e_1, e_2, \dots, e_p) & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d^2 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & G(e_1, e_2, \dots, e_p) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d^2 \end{pmatrix} = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p).$$

Par ailleurs :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x - p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x - p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x - p_F(x)) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) - (e_{p+1} | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Or,  $p_F(x) \in F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ , donc  $p_F(x) = \sum_{i=1}^p a_i e_i$  et :

$$\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (e_{p+1} | p_F(x)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (e_{p+1} | e_i) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) & \cdots & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) & (x | x) - (x | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Et comme plus haut, on a  $\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (x | p_F(x)) \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (x | e_i) \end{pmatrix}^T$  donc :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) & \cdots & (e_p | x) & (x | x) \end{vmatrix} = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Ainsi, on a :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p) = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Et comme la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base, elle est libre, donc  $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p) \neq 0$  et ainsi :

$$d^2 = d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}$$

**Exercice 6**

Comme la matrice  $A$  est symétrique réelle  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , elle est diagonalisable dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  (muni du produit scalaire canonique). Donc, il existe  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $D = P^T A P$  où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  et  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (qui est orthonormée) à la base  $\mathcal{B}$  (donc  $P \in O(n)$ ).

Pour tout  $k \in 1, n$ , notons  $U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  la matrice colonne des coordonnées de  $u_k$  dans la base canonique. On a immédiatement  $U_k^T U_k = \|u_k\|^2 = 1$  (en identifiant une matrice  $1 \times 1$  et son coefficient).

De plus, si on note  $E_{i,j}$  les matrices de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k}.$$

Donc :

$$A = P D P^T = P \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k} \right) P^T = \sum_{k=1}^n \lambda_k P E_{k,k} P^T.$$

Enfin, si pour tout  $k \in 1, n$ ,  $U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$ , on a  $P = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et :

$$P E_{k,k} P^T = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,k} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,k} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{k,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & \cdots & u_{k,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,k} u_{1,k} & \cdots & u_{1,k} u_{k,k} & \cdots & u_{1,k} u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,k} u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} u_{k,k} & \cdots & u_{k,k} u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,k} u_{1,k} & \cdots & u_{n,k} u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} u_{n,k} \end{pmatrix} = U_k U_k^T.$$

Donc, on a bien  $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$  et ainsi :

Il existe bien  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$  tels que pour tout  $k \in 1, n$ ,  $U_k^T U_k = 1$  et  $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$ .

**Exercice 7**

Dans tout l'exercice, on identifie  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1) Comme  $u$  est autoadjoint, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$   $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , d'après le théorème spectral. Et quitte à réorganiser les vecteur, on peut supposer que pour tout  $i \in 1, n$ ,  $\lambda_i$  soit la valeur propre (réelle) associée à  $e_i$  avec  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Alors, pour tout  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  de  $E$  tel que  $x \neq 0$ , on a  $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$  et :

$$(x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$



Comme pour tout  $i \in 1, n$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$  et  $x_i^2 \geq 0$ , on a :

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq (x | u(x)) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2.$$

Et comme  $\|x\|^2 > 0$ , on obtient, pour tout vecteur  $x$  non nul de  $E$  :

$$\lambda_1 \leq \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n$$

2) Soit  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$X^T H X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

Si on pose  $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f(t)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}.$$

Comme  $f$  est une fonction polynômiale,  $f^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( x_i x_j \left[ \frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = X^T H X.$$

Ainsi, comme  $f^2$  est continue et positive sur  $[0,1]$ , on a  $X^T H X = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$  avec :

$$X^T H X = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = 0.$$

Ceci veut dire que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  tout entier (elle est polynômiale et admet une infinité de racines), et donc que tous ses coefficients sont nuls, soit pour tout  $i \in 1, n$ ,  $x_i = 0$  et donc  $X = 0$ .

Ceci prouve que :

$H$  est définie positive.

3) a. On a  $S = A^T A$ , donc :

$$S^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = S.$$

Donc,  $S$  est symétrique.

De plus, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$X^T S X = X^T (A^T A) X = (X^T A^T)(A X) = (A X)^T (A X) = \|A X\|^2 \geq 0.$$

Donc,  $S$  est positive et ainsi :

$S$  est une matrice symétrique positive.

b. Si  $S$  est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $k \in 1, n$  et  $P \in O(n)$  telles que  $S = P^T D P$ . Comme les  $\lambda_k$  sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a  $D = \Delta^2$  et  $\Delta^T = \Delta$  (car  $\Delta$  est diagonale), donc :

$$S = P^T D P = P^T \Delta^2 P = P^T \Delta^T \Delta P = (\Delta P)^T (\Delta P) = A^T A \text{ avec } A = \Delta P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi :

Si  $S$  est une matrice symétrique positive, alors il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = A^T A$ .

Comme  $(-A)^T (-A) = A^T A$  :

La matrice  $A$  n'est pas unique.

c. Nous revenons ici à  $S = A^T A$ . On a vu que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^T S X = \|AX\|^2$ , donc :

$$X^T S X = 0 \Leftrightarrow \|AX\| = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Alors :

$$S \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X^T S X = 0 \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X \in \ker A \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \ker A = \{0\}.$$

Autrement dit :

$S$  est définie positive si et seulement si  $A$  est inversible.

d. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On a d'une part :

$$X \in \ker S \Leftrightarrow S X = 0 \Rightarrow X^T S X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Donc  $\ker S \subset \ker A$ .

Et d'autre part :

$$X \in \ker A \Leftrightarrow A X = 0 \Rightarrow S X = A^T A X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker S.$$

Donc  $\ker A \subset \ker S$ .

Ainsi,  $\ker A = \ker S$ , donc, avec le théorème du rang, on obtient :

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker A) = n - \dim(\ker S) = \text{rg}(S).$$

Ainsi, on a bien :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$$

4) Si  $S$  est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $k \in 1, n$  et  $P \in O(n)$  telles que  $S = P^T D P$ . Comme les  $\lambda_k$  sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a alors  $D = \Delta^2$  et, avec  $PP^T = I_n$  :

$$S = P^T D P = P^T \Delta^2 P = P^T \Delta \Delta P = P^T \Delta (PP^T) \Delta P = (P^T \Delta P)(P^T \Delta P) = R^2.$$

avec  $R = P^T \Delta P$ . Comme  $\sqrt{\lambda_k}$  sont positifs et  $P \in O(n)$ ,  $R$  est bien une matrice symétrique positive.

Ainsi, il existe bien une matrice  $R$  symétrique positive telle que  $R^2 = S$ . Reste à prouver l'unicité.

Soit  $M$  une matrice symétrique positive telle que  $M^2 = S$ .

Comme  $M$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient  $\mu_1, \dots, \mu_p$  ses valeurs propres distinctes deux à deux (toutes positives, car  $M$  est positive) et  $E_1, \dots, E_p$  les sous-espaces propres associés.

Soit  $k \in 1, p$ . Pour tout  $X \in E_k$ , on a  $MX = \mu_k X$ , donc :

$$SX = M^2 X = M(MX) = M(\mu_k X) = \mu_k MX = \mu_k (\mu_k X) = \mu_k^2 X.$$

Ainsi,  $\mu_k^2$  est une valeur propre de  $S$  et  $E_k \subset F_k$ , où  $F_k$  est sous-espace propre associé à  $\mu_k^2$ .

Remarquons que comme les  $\mu_k$  sont positives, on a :  $\mu_k^2 = \mu_{k'}^2 \Leftrightarrow \mu_k = \mu_{k'} \Leftrightarrow k = k'$ .

On a alors  $\dim E_k \leq \dim F_k$ , donc :

$$n = \dim E_1 + \dots + \dim E_p \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_p \leq n.$$

Ainsi,  $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = n$  et, comme pour tout  $k \in 1, p$ , on a  $\dim E_k \leq \dim F_k$ , ceci implique que pour tout  $k \in 1, p$ ,  $\dim E_k = \dim F_k$ .

Finalement, pour tout  $k \in 1, p$ ,  $E_k \subset F_k$  et  $\dim E_k = \dim F_k$ , donc les sous-espaces propres de  $M$  et  $S$  sont les mêmes et les valeurs propres de  $S$  sont  $\mu_1^2, \dots, \mu_p^2$ .

Or, la matrice connue est  $S$ , donc ce qui précède se reformule en : les valeurs propres de  $M$  sont  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres distinctes deux à deux (et positives) de  $S$  et le sous-espace propre de  $M$  associé à  $\sqrt{\lambda_k}$  est le sous-espace propre de  $S$  associé à  $\lambda_k$ .

Ainsi, les valeurs propres et sous-espaces propres de  $M$  sont fixés, ce qui détermine complètement la matrice  $M$  et donc  $R$  est unique.

Finalement :

Il existe une et une seule matrice  $R$  symétrique positive telle que  $R^2 = S$ .

Remarquons que si on omet le caractère positif, il existe plusieurs matrices dont le carré est  $S$ .

5) Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres positives de  $A$ .

Pour tout  $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow X + AX = X + \lambda X \Leftrightarrow (I_n + A)X = (1 + \lambda)X.$$

Donc, les valeurs propres de  $I_n + A$  sont  $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$  et, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la valeur propre  $1 + \lambda_k$  de  $I_n + A$ ,  $1 + \lambda_k$  est de même multiplicité que la valeur propre  $\lambda_k$  de  $A$ . Ainsi :

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n).$$

On veut donc prouver que si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont  $n$  réels positifs (distincts ou pas), on a :

$$1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \leq \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}.$$

Précédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Pour  $n = 1$ , soit  $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ . On a alors  $1 + \sqrt[1]{\lambda_1} = 1 + \lambda_1 = \sqrt[1]{1 + \lambda_1}$ , donc la relation est vérifiée.
- Supposons l'inégalité vraie à un rang  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ .

Posons  $a = \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$  et  $b = \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}$ . Par hypothèse de récurrence, on a  $1 + a \leq b$ .

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(t) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + t)} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t} - 1 = b^{\frac{n}{n+1}}(1 + t)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}t^{\frac{1}{n+1}} - 1.$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , en tant que différence de telles fonctions et, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f'(t) = \frac{1}{n+1} b^{\frac{n}{n+1}} (1+t)^{\frac{1}{n+1}-1} - \frac{1}{n+1} a^{\frac{n}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}-1} = \frac{1}{n+1} \left[ \left( \frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} - \left( \frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right].$$

On a donc :

$$f(t) \geq 0 \Leftrightarrow \left( \frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \geq \left( \frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow \frac{b}{1+t} \geq \frac{a}{t} \Leftrightarrow (b-a)t \geq a.$$

Et comme  $1 + a \leq b$ , on a  $b - a \geq 1 > 0$ , donc  $f(t) \geq 0$  quand  $t \geq \frac{a}{b-a} \geq 0$ .

Ceci prouve que  $f$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{a}{b-a}\right]$  et croissante sur  $\left[\frac{a}{b-a}, +\infty\right[$  et donc que  $f$  admet un

minimum en  $\frac{a}{b-a}$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b-a}\right) &= b^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \\ &= b^{\frac{n}{n+1}} \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - a^{\frac{n}{n+1}} \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = \frac{b-a}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = (b-a)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

Or, on a vu que  $b - a \geq 1$ , donc  $(b - a)^{\frac{n}{n+1}} \geq 1$  et  $f\left(\frac{a}{b-a}\right) \geq 0$ .

Ainsi, le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  est positif, donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(\lambda_{n+1}) \geq 0$ .

Finalement, on obtient pour tout  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$  :

$$f(\lambda_{n+1}) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} - 1 \geq 0.$$

Soit :

$$1 + \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} \leq \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui prouve que l'on a bien :

$$1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det (I_n + A)}$$

### Exercice 8

1) La relation  $\leq$  étant une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ ,  $<$  est immédiatement réflexive et transitive.

Reste à voir l'antisymétrie. Soient  $A, B \in E$  telles que  $A < B$  et  $B < A$ .

On a alors pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^T A X \leq X^T B X$  et  $X^T B X \geq X^T A X$ , soit :

$$X^T A X = X^T B X \Leftrightarrow X^T (A - B) X = X^T C X = 0 \text{ avec } C = A - B.$$

Comme  $E$  est un espace vectoriel,  $C \in E = S_n(\mathbb{R})$ , donc  $C$  est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe deux matrices  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (où les  $\lambda_k$  sont réels) telles que  $C = P^T D P$  et pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :

$$X^T C X = X^T P^T D P X = Y^T D Y = 0$$

avec  $Y = P X$ , qui décrit  $\mathbb{R}^n$  quand  $X$  décrit  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, pour tout  $Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y^T D Y = 0$ .

En notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on a alors pour tout  $k \in 1, n$ ,  $e_k^T D e_k = \lambda_k = 0$  et ainsi,  $D = 0_n$ , donc  $C = 0_n$ , soit  $A = B$ . Finalement,  $<$  est antisymétrique et donc, c'est une relation d'ordre.

Si on pose  $A = E_{1,1}$  et  $B = E_{2,2}$ , on a :

$$\left. \begin{array}{l} e_1^T A e_1 = 1 \\ e_1^T B e_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e_1^T A e_1 > e_1^T B e_1$$

$$\left. \begin{array}{l} e_2^T A e_2 = 0 \\ e_2^T B e_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow e_2^T A e_2 < e_2^T B e_2$$

Donc, on n'a ni  $A < B$ , ni  $B < A$  et la relation  $<$  n'est pas totale.

Finalement :

La relation  $<$  est une relation d'ordre non total sur  $E$ .

2) Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $E$ , croissante et majorée pour la relation  $<$ .

Il existe alors  $M \in E$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k < A_{k+1} < M$ , soit pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :

$$X^T A_k X \leq X^T A_{k+1} X \leq X^T M X.$$

Ainsi, pour  $X \in \mathbb{R}^n$  réel fixé, la suite réelle  $(X^T A_k X)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, donc convergente.

En particulier, pour tout  $i \in 1, n$ , la suite  $(e_i^T A_k e_i)_{k \in \mathbb{N}}$  converge.

Or, si on note  $A_k = (a_{k,i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on a  $(e_i^\top A_k e_i)_{k \in \mathbb{N}} = (a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$  et donc  $(a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $a_{i,i}$ .

De plus, pour tout  $i, j \in 1, n$  tel que  $i \neq j$ , la suite  $((e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j))_{k \in \mathbb{N}}$  converge et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$(e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) = a_{k,i,i} + a_{k,i,j} + a_{k,j,i} + a_{k,j,j}.$$

Mais,  $A_k \in E$ , donc  $A_k$  est symétrique et  $a_{k,i,j} = a_{k,j,i}$ , donc :

$$(e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) = a_{k,i,i} + 2a_{k,i,j} + a_{k,j,j} \Leftrightarrow a_{k,i,j} = \frac{1}{2} \left[ (e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) - a_{k,i,i} - a_{k,j,j} \right].$$

Et comme les suites  $(a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{k,j,j})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $((e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j))_{k \in \mathbb{N}}$  convergent, la suite  $(a_{k,i,j})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $a_{i,j}$ .

Ceci prouve que la suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Or, l'application  $M \mapsto M^\top$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc  $A_k^\top \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A^\top$ , mais pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in S_n(\mathbb{R})$  donc  $A_k^\top = A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$  et par unicité de la limite, on obtient  $A^\top = A$ , soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .

Ainsi :

Toute suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , croissante et majorée pour  $<$ , converge dans  $E$ .

### Exercice 9

1) Notons  $A = (a_{i,j})$ . On veut :

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall P \in O_n(\mathbb{R}), P^{-1}AP = P^\top AP \text{ est à diagonale nulle.}$$

( $\Rightarrow$ ) Si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , alors pour tous  $i, j \in 1, n$ ,  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  et en particulier, pour tout  $i \in 1, n$ ,  $a_{i,i} = -a_{i,i}$ , soit  $a_{i,i} = 0$ , donc si  $A$  est antisymétrique, elle est à diagonale nulle.

Or, pour toute matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$ , on a  $(P^\top AP)^\top = P^\top A^\top (P^\top)^\top = P^\top (-A)P = -P^\top AP$ . Ainsi,  $P^\top AP$  est antisymétrique, donc à diagonale nulle.

( $\Leftarrow$ ) On suppose ici que pour toute matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $P^\top AP$  est à diagonale nulle. En particulier,  $A$  est à diagonale nulle (car  $I_n \in O_n(\mathbb{R})$  et  $I_n^\top AI_n = A$ ).

Soit maintenant pour tous  $i, j \in 1, n$  tels que  $i \neq j$  :

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

On a  $P_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$  et si on note  $P_{i,j}^\top A = (c_{k,\ell})$  et  $P_{i,j}^\top AP_{i,j} = (b_{k,\ell})$ , on a, avec les  $a_{k,k}$  nuls :

$$\begin{cases} c_{i,i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_{j,i} \\ c_{i,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_{i,j} \end{cases} \quad \text{donc} \quad b_{i,i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,i} + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i}).$$

Or,  $P^\top AP$  est à diagonale nulle donc  $b_{i,i} = 0$ , ce qui donne  $a_{j,i} = -a_{i,j}$ . Ainsi,  $A$  est antisymétrique.

Finalement, on a bien :

$A$  est antisymétrique si et seulement si  $P^{-1}AP$  est à diagonale nulle pour toute matrice orthogonale  $P$ .

2) Soit  $X \in \ker(I_n - A)$ . On a  $(I_n - A)X = 0$ , donc :

$$AX = X.$$

Or :

$$(AX | X) = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = X^\top (-A)X = -X^\top AX = -(X | AX) = -(AX | X).$$

Donc,  $(AX | X) = 0$ , mais comme  $AX = X$ , on obtient  $(X | X) = 0$ , soit  $X = 0$ .

Ainsi,  $\ker(I_n - A) = \{0\}$ , donc  $I_n - A$  est inversible.

Alors,  $(I_n - A)^\top$  est aussi inversible et  $(I_n - A)^\top = I_n^\top - A^\top = I_n + A$ , donc  $I_n + A$  est inversible.

Finalement :

$I_n + A$  et  $I_n - A$  sont inversibles.

3) On pose  $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ .

Avec  $(I_n - A)^\top = I_n + A$  et de même,  $(I_n + A)^\top = I_n - A$ , on a :

$$B^\top = \left[ (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \right]^\top = (I_n - A)^\top \left[ (I_n + A)^{-1} \right]^\top = (I_n - A)^\top \left[ (I_n + A)^\top \right]^{-1} = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}.$$

Or,  $(I_n + A)^{-1}$  et  $I_n - A$  commutent. En effet :

$$(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n + A)^{-1} [2I_n - (I_n + A)] = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$$

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = [2I_n - (I_n + A)](I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$$

Donc,  $B^\top = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$  et :

$$BB^\top = \left[ (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \right] \left[ (I_n - A)^{-1}(I_n + A) \right] = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)^{-1}(I_n + A) = (I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n.$$

Donc,  $B \in O_n(\mathbb{R})$ . De plus :

$$\begin{aligned} \det B &= \det \left[ (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \right] = \left[ \det(I_n + A) \right]^{-1} \det(I_n - A) \\ &= \left[ \det {}^t(I_n + A) \right]^{-1} \det(I_n - A) = \left[ \det(I_n - A) \right]^{-1} \det(I_n - A) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$B \in SO_n(\mathbb{R})$

4) On a vu plus haut que  $B = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$ , soit :

$$I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}.$$

Comme  $(I_n + A)^{-1}$  est inversible :

$$I_n + B \text{ est inversible.}$$

De plus :

$$(I_n + B)^{-1} = [2(I_n + A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A).$$

Alors :

$$A = 2(I_n + B)^{-1} - I_n = (I_n + B)^{-1}[2I_n - (I_n + B)].$$

Donc, on a bien :

$$A = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$$

### Exercice 10

1) Comme  $u \in S(E)$ ,  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée de  $E$ .

Autrement dit, il existe une base orthonormée de  $E$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  telle que :

$$D = M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$$

où  $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  et  $\lambda_k$  apparaît  $\alpha_k$  fois dans la diagonale de  $D$  (avec  $\alpha_k$  la multiplicité de  $\lambda_k$ ).

- Si  $0 \notin Sp(u)$ , alors  $\ker u = \{0\}$  et  $\text{Im} u = E$ , donc on a bien  $E = \ker u \oplus \text{Im} u$ .
- Si  $0 \in Sp(u)$ , alors en posant  $\lambda_1 = 0$ , on a  $\ker u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{\alpha_1})$  et  $\text{Im} u = \text{Vect}(e_{\alpha_1+1}, \dots, e_n)$ . Comme la réunion de  $(e_1, \dots, e_{\alpha_1})$  et  $(e_{\alpha_1+1}, \dots, e_n)$  forme la base orthonormée  $\mathcal{B}$ , on a à nouveau  $E = \ker u \oplus \text{Im} u$ .

Finalement, dans tous les cas, on a bien :

$$E = \ker u \oplus \text{Im} u$$

2) Comme  $u \in S(E)$ ,  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Pour  $k \in 1, n$ , soit  $\lambda_k$  la valeur propre associée à  $e_k$ . On a  $\lambda_k \geq 0$  car  $v \in S^+(E)$  et pour tout  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$  :

$$u(x) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k e_k \quad \text{donc} \quad (u(x) | x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0.$$

De plus :

$$(u(x) | x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in 1, n, \lambda_k x_k^2 = 0 \quad (\text{car } \lambda_k x_k^2 \geq 0) \Leftrightarrow \forall k \in 1, n, \lambda_k x_k = 0.$$

Ainsi :

$$(u(x) | x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k e_k = 0.$$



Donc, pour tout  $x \in E$ ,  $(u(x)|x) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $x \in \ker u$ .

Ces résultats sont les mêmes pour  $v$ .

Soit  $x \in \ker u \cap \ker v$ .

On a alors  $u(x) = v(x) = 0$ , donc  $u(x) + v(x) = (u+v)(x) = 0$ , soit  $x \in \ker(u+v)$ .

Ainsi :  $\ker u \cap \ker v \subset \ker(u+v)$ .

Soit maintenant  $x \in \ker(u+v)$ .

On a alors  $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$ , donc  $u(x) = -v(x)$  et  $(u(x)|x) = (-v(x)|x) = -(v(x)|x)$ .

Or, on a vu que  $(u(x)|x) \geq 0$  et  $(v(x)|x) \geq 0$ , donc  $(u(x)|x) = -(v(x)|x)$  implique  $(u(x)|x) = (v(x)|x) = 0$ .

Et, d'après ce que l'on a vu plus haut, ceci implique  $u(x) = v(x) = 0$ , soit  $x \in \ker u \cap \ker v$ .

Ainsi :  $\ker(u+v) \subset \ker u \cap \ker v$ .

Finalement, on a bien :

$$\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$$

Pour tout  $x \in E$ , on a  $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \text{Im } u + \text{Im } v$ , donc :

$$\underline{\text{Im}(u+v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v} \quad (1)$$

Ceci implique que :  $\text{rg}(u+v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v)$ .

Soient  $x \in \ker u \cap \ker v$  et  $y \in \text{Im } u + \text{Im } v$ . Il existe  $x_1, x_2 \in E$  tels que  $y = u(x_1) + v(x_2)$  et :

$$(y|x) = (u(x_1) + v(x_2)|x) = (u(x_1)|x) + (v(x_2)|x) = (x_1|u(x)) + (x_2|v(x)) = (x_1|0) + (x_2|0) = 0.$$

Ainsi,  $(\ker u \cap \ker v) \perp (\text{Im } u + \text{Im } v)$ , donc :

$$(\ker u \cap \ker v) + (\text{Im } u + \text{Im } v) = (\ker u \cap \ker v) \oplus (\text{Im } u + \text{Im } v) = (\ker(u+v)) \oplus (\text{Im } u + \text{Im } v) \subset E$$

Alors :

$$\dim(\ker(u+v)) + \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq n \Leftrightarrow \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq n - \dim(\ker(u+v)).$$

Avec le théorème du rang, ceci implique que :  $\dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \text{rg}(u+v)$ .

Ainsi :

$$\underline{\text{rg}(u+v) = \dim(\text{Im } u + \text{Im } v)} \quad (2)$$

Les résultats (1) et (2) permettent alors de conclure que :

$$\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$$